

# 信号処理とフーリエ変換 第8回

## ～離散 Fourier 変換 (1)～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2022/>

2022年11月16日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 離散 Fourier 変換
  - 離散 Fourier 係数
  - Fourier 係数のサンプリング定理

- これから3回、**離散 Fourier 変換**を説明する。講義ノート [1] の§3の内容である。
  - ① 離散 Fourier 係数を説明する。周期関数をサンプリングしたデータから Fourier 係数を近似的に求めたものが、**離散 Fourier 係数**であり、それを求める操作 (写像) が**離散 Fourier 変換**とみなせる。離散フーリエ係数の基本的な性質と、Fourier 係数に関する**サンプリング定理**を紹介する。
  - ② 離散 Fourier 変換は  $\mathbb{C}^n$  上の線形変換である。その**反転公式**を述べて証明する。鍵となるのは**選点直交性**と呼ばれる性質である。
  - ③ 音声信号をサンプリングして得たデータ (離散信号) を離散 Fourier 変換する実験を行う。音声データから離散 Fourier 係数を得ること、またその逆変換の両方に **FFT** が適用できる。

## 3 離散 Fourier 変換

これから説明する **離散 Fourier 変換** は、Fourier 級数の話の離散化として現れる。

## 3 離散 Fourier 変換

これから説明する **離散 Fourier 変換** は、Fourier 級数の話の離散化として現れる。実際にデータ処理する場合はサンプリングした離散データを扱わざるを得ず、離散 Fourier 変換の応用上の重要性はとても高い。

### 3 離散 Fourier 変換

これから説明する **離散 Fourier 変換** は、Fourier 級数の話の離散化として現れる。実際にデータ処理する場合はサンプリングした離散データを扱わざるを得ず、離散 Fourier 変換の応用上の重要性はとても高い。

一方、離散 Fourier 変換は、周期数列についての Fourier 変換であり、Fourier 級数の近似理論にとどまらない意味を持っている。

## 3 離散 Fourier 変換

これから説明する **離散 Fourier 変換** は、Fourier 級数の話の離散化として現れる。実際にデータ処理する場合はサンプリングした離散データを扱わざるを得ず、離散 Fourier 変換の応用上の重要性はとても高い。

一方、離散 Fourier 変換は、周期数列についての Fourier 変換であり、Fourier 級数の近似理論にとどまらない意味を持っている。

§2 (普通の Fourier 変換) もそうであったが、複素指数関数のみで説明する (あまり時間に余裕がなく、式を短く書きたいので、三角関数バージョンの説明はサボる)。

## 3.1 離散 Fourier 係数 サンプリング

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $T$  とする。 $f$  がある程度滑らかならば<sup>1</sup>、次が成り立つ。

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(2) \quad c_n := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

---

<sup>1</sup>注: これまでは原点について対称な区間での積分  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx$  で表していた。



## 3.1 離散 Fourier 係数 サンプリング

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $T$  とする。 $f$  がある程度滑らかならば<sup>1</sup>、次が成り立つ。

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(2) \quad c_n := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

次式で  $\{x_j\}$ ,  $\{f_j\}$  を定める。 $x_0, x_1, \dots, x_N$  は  $[0, T]$  の  $N$  等分点となる。

$$(3) \quad h := \frac{T}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

<sup>1</sup>注: これまでは原点について対称な区間での積分  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx$  で表していた。

## 3.1 離散 Fourier 係数 サンプリング

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $T$  とする。 $f$  がある程度滑らかならば<sup>1</sup>、次が成り立つ。

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(2) \quad c_n := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

次式で  $\{x_j\}$ ,  $\{f_j\}$  を定める。 $x_0, x_1, \dots, x_N$  は  $[0, T]$  の  $N$  等分点となる。

$$(3) \quad h := \frac{T}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

$f$  が周期  $T$  であることから  $(x_{j+N} = (j+N)h = jh + T = x_j + T)$  なので

$$(4) \quad f_{j+N} = f_j \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

すなわち  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  は周期  $N$  の周期数列である。

<sup>1</sup>注: これまでは原点について対称な区間での積分  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx$  で表していた。

## 3.1 離散 Fourier 係数 サンプリング

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  は周期  $T$  とする。 $f$  がある程度滑らかならば<sup>1</sup>、次が成り立つ。

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(2) \quad c_n := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

次式で  $\{x_j\}$ ,  $\{f_j\}$  を定める。 $x_0, x_1, \dots, x_N$  は  $[0, T]$  の  $N$  等分点となる。

$$(3) \quad h := \frac{T}{N}, \quad x_j = jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

$f$  が周期  $T$  であることから  $(x_{j+N} = (j+N)h = jh + T = x_j + T)$  なので

$$(4) \quad f_{j+N} = f_j \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

すなわち  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  は周期  $N$  の周期数列である。

信号処理では、 $f$  を (連続) 信号、 $x_j$  を**標本点**、 $h$  を**サンプリング周期** (標本化周期, sampling period)、 $1/h$  を**サンプリング周波数** (標本化周波数, sample rate, sampling rate) と呼ぶ。また、信号を測定して  $\{f_j\}$  を得ることを**サンプリング** (標本化) と呼ぶ。

<sup>1</sup>注: これまでは原点について対称な区間での積分  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx$  で表していた。

## 3.1 離散 Fourier 係数 周期積分は台形公式で計算すべし

Fourier 係数  $c_n$  を知りたいとき、 $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$  を用いて近似値を計算することを考える。

$c_n$  をどのように近似計算するのが良いか。

## 3.1 離散 Fourier 係数 周期積分は台形公式で計算すべし

Fourier 係数  $c_n$  を知りたいとき、 $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$  を用いて近似値を計算することを考える。

$c_n$  をどのように近似計算するのが良いか。結論を天下一りに述べると

**周期関数の 1 周期区間における積分の計算には台形則がベスト**  
(正しい意味でベスト。しばしば驚異的な高精度が達成される。)

(これは数値解析の常識であるが、説明は省略する。)

## 3.1 離散 Fourier 係数 数値積分の台形公式

## 3.1 離散 Fourier 係数 数値積分の台形公式

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  の定積分

$$I = \int_a^b F(x) dx$$

に対して

$$(5) \quad I_N := \sum_{j=1}^N \left( \frac{F(x_{j-1}) + F(x_j)}{2} h \right) = h \left( \frac{F_0}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} F_j + \frac{F_N}{2} \right)$$

をその近似値として採用するのが(複合) **台形公式**である。ただし

$$(6) \quad h := \frac{b-a}{N}, \quad x_j := a + jh, \quad F_j := F(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, N).$$

## 3.1 離散 Fourier 係数 数値積分の台形公式

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  の定積分

$$I = \int_a^b F(x) dx$$

に対して

$$(5) \quad I_N := \sum_{j=1}^N \left( \frac{F(x_{j-1}) + F(x_j)}{2} h \right) = h \left( \frac{F_0}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} F_j + \frac{F_N}{2} \right)$$

をその近似値として採用するのが(複合) **台形公式**である。ただし

$$(6) \quad h := \frac{b-a}{N}, \quad x_j := a + jh, \quad F_j := F(x_j) \quad (j = 0, 1, \dots, N).$$

$F$  が周期  $b-a$  の周期関数であれば、 $F(a) = F(b)$  であるから  $F_0 = F_N$ . ゆえに次式が成り立つ:

$$(7) \quad I_N = h \sum_{j=0}^{N-1} F_j = h \sum_{j=1}^N F_j.$$



## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の導入

$F(x) := \frac{1}{T} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}$  の積分に台形則を適用して、 $c_n$  を近似計算したものを  $C_n$  (大文字表記) とする:

$$(8) \quad C_n := \frac{1}{T} \cdot h \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j}.$$

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の導入

$F(x) := \frac{1}{T} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}$  の積分に台形則を適用して、 $c_n$  を近似計算したものを  $C_n$  (大文字表記) とする:

$$(8) \quad C_n := \frac{1}{T} \cdot h \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j}.$$

$$(9) \quad \omega := e^{i\frac{2\pi}{T}h} = e^{\frac{2\pi i}{N}} \quad (\because \frac{h}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{N} = \frac{1}{N})$$

とおくと ( $\omega$  は 1 の原始  $N$  乗根である — すぐ後で後述)

$$e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j} = e^{-in\frac{2\pi}{T} \cdot jh} = e^{-inj\frac{2\pi}{N}} = \omega^{-nj}.$$

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の導入

$F(x) := \frac{1}{T} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x}$  の積分に台形則を適用して、 $c_n$  を近似計算したものを  $C_n$  (大文字表記) とする:

$$(8) \quad C_n := \frac{1}{T} \cdot h \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j}.$$

$$(9) \quad \omega := e^{i\frac{2\pi}{T}h} = e^{\frac{2\pi i}{N}} \quad (\because \frac{h}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{N} = \frac{1}{N})$$

とおくと ( $\omega$  は 1 の原始  $N$  乗根である — すぐ後で後述)

$$e^{-in\frac{2\pi}{T}x_j} = e^{-in\frac{2\pi}{T} \cdot jh} = e^{-inj\frac{2\pi}{N}} = \omega^{-nj}.$$

ゆえに

$$(10) \quad C_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}.$$

この  $C_n$  を  $f$  の **離散 Fourier 係数** と呼ぶ。

## 3.1 離散 Fourier 係数 準備: $\omega$ の性質 … 1 の原始 $N$ 乗根

### 補題 8.1 ( $\omega$ の性質 … 1 の原始 $N$ 乗根, 冪乗の和)

$N \in \mathbb{N}$  に対して  $\omega := e^{2\pi i/N}$  とおくと、次の (1), (2) が成り立つ。

## 3.1 離散 Fourier 係数 準備: $\omega$ の性質 … 1 の原始 $N$ 乗根

### 補題 8.1 ( $\omega$ の性質 … 1 の原始 $N$ 乗根, 冪乗の和)

$N \in \mathbb{N}$  に対して  $\omega := e^{2\pi i/N}$  とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

- ①  $1 \leq m \leq N-1$  ならば  $\omega^m \neq 1$ ,  $\omega^N = 1$  ( $\omega$  は 1 の原始  $N$  乗根).  
(ゆえに  $m \equiv 0 \pmod{N}$  ならば  $\omega^m = 1$ , そうでないならば  $\omega^m \neq 1$ .)

## 3.1 離散 Fourier 係数 準備: $\omega$ の性質 … 1 の原始 $N$ 乗根

### 補題 8.1 ( $\omega$ の性質 … 1 の原始 $N$ 乗根, 冪乗の和)

$N \in \mathbb{N}$  に対して  $\omega := e^{2\pi i/N}$  とおくとき、次の (1), (2) が成り立つ。

- ①  $1 \leq m \leq N-1$  ならば  $\omega^m \neq 1$ ,  $\omega^N = 1$  ( $\omega$  は 1 の原始  $N$  乗根).  
(ゆえに  $m \equiv 0 \pmod{N}$  ならば  $\omega^m = 1$ , そうでないならば  $\omega^m \neq 1$ .)
- ② 任意の  $m \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

証明.

## 3.1 離散 Fourier 係数 準備: $\omega$ の性質 $\cdots$ 1 の原始 $N$ 乗根

### 補題 8.1 ( $\omega$ の性質 $\cdots$ 1 の原始 $N$ 乗根, 冪乗の和)

$N \in \mathbb{N}$  に対して  $\omega := e^{2\pi i/N}$  とおくと、次の (1), (2) が成り立つ。

- ①  $1 \leq m \leq N-1$  ならば  $\omega^m \neq 1$ ,  $\omega^N = 1$  ( $\omega$  は 1 の原始  $N$  乗根).  
(ゆえに  $m \equiv 0 \pmod{N}$  ならば  $\omega^m = 1$ , そうでないならば  $\omega^m \neq 1$ .)
- ② 任意の  $m \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

### 証明.

- ① (常識的だけれど一応)  $\theta := \frac{2\pi}{N}$  とおくと、 $\omega = e^{i\theta}$ ,  $\omega^m = e^{im\theta}$ .  $1 \leq m \leq N-1$  ならば  $0 < m\theta < 2\pi$  であるから、 $\omega^m = e^{im\theta} \neq 1$ .  $\omega^N = e^{iN\theta} = e^{2\pi i} = 1$ .

## 3.1 離散 Fourier 係数 準備: $\omega$ の性質 $\cdots$ 1 の原始 $N$ 乗根

### 補題 8.1 ( $\omega$ の性質 $\cdots$ 1 の原始 $N$ 乗根, 冪乗の和)

$N \in \mathbb{N}$  に対して  $\omega := e^{2\pi i/N}$  とおくと、次の (1), (2) が成り立つ。

- ①  $1 \leq m \leq N-1$  ならば  $\omega^m \neq 1$ ,  $\omega^N = 1$  ( $\omega$  は 1 の原始  $N$  乗根).  
(ゆえに  $m \equiv 0 \pmod{N}$  ならば  $\omega^m = 1$ , そうでないならば  $\omega^m \neq 1$ .)
- ② 任意の  $m \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \begin{cases} N & (m \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

### 証明.

- ① (常識的だけれど一応)  $\theta := \frac{2\pi}{N}$  とおくと、 $\omega = e^{i\theta}$ ,  $\omega^m = e^{im\theta}$ .  $1 \leq m \leq N-1$  ならば  $0 < m\theta < 2\pi$  であるから、 $\omega^m = e^{im\theta} \neq 1$ .  $\omega^N = e^{iN\theta} = e^{2\pi i} = 1$ .
- ②  $m \equiv 0 \pmod{N}$  であれば、 $\omega^m = 1$  であるから  $\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = \sum_{j=0}^{N-1} 1 = N$ . (続く)

□



## 3.1 離散 Fourier 係数 準備: 1 の原始 $N$ 乗根 $\omega$ の性質

証明 (続き).

$m \equiv 0 \pmod{N}$  でなければ、 $\omega^m \neq 1$ . 初項 1, 公比  $\omega^m$  の等比級数の和であるから

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{mj} = 1 \cdot \frac{1 - (\omega^{mN})}{1 - \omega^m} = \frac{1 - (\omega^N)^m}{1 - \omega^m} = \frac{1 - 1}{1 - \omega^m} = 0.$$

□

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の性質

### 定理 8.2 (離散 Fourier 係数の性質)

周期  $T$  の周期関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  と  $N \in \mathbb{N}$  に対して

$$h := \frac{T}{N}, \quad \omega := e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$C_n := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定めるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の性質

### 定理 8.2 (離散 Fourier 係数の性質)

周期  $T$  の周期関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  と  $N \in \mathbb{N}$  に対して

$$h := \frac{T}{N}, \quad \omega := e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$C_n := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定めるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

- ①  $\{C_n\}_n$  は周期  $N$  の周期数列である:  $C_{n+N} = C_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の性質

### 定理 8.2 (離散 Fourier 係数の性質)

周期  $T$  の周期関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  と  $N \in \mathbb{N}$  に対して

$$h := \frac{T}{N}, \quad \omega := e^{2\pi i/N}, \quad x_j := jh, \quad f_j := f(x_j) \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$C_n := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を定めるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

①  $\{C_n\}_n$  は周期  $N$  の周期数列である:  $C_{n+N} = C_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

②  $f$  の複素 Fourier 係数  $c_n$  が  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$  を満たすならば、任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$(11) \quad C_n = \sum_{m \equiv n} c_m \quad \left( = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{n+pN} \right).$$

$\sum_{m \equiv n}$  は、 $m \equiv n \pmod{N}$  を満たすすべての  $m$  についての和を意味する。

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の性質

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$  という条件は、例えば  $f$  が連続で区分的に  $C^1$  級であれば満たされる。

証明.

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の性質

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$  という条件は、例えば  $f$  が連続で区分的に  $C^1$  級であれば満たされる。

証明.

①  $\omega^{-(n+N)j} = \omega^{-nj} \omega^{-Nj} = \omega^{-nj}$  であるから  $C_{n+N} = C_n$ .

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の性質

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$  という条件は、例えば  $f$  が連続で区分的に  $C^1$  級であれば満たされる。

証明.

①  $\omega^{-(n+N)j} = \omega^{-nj} \omega^{-Nj} = \omega^{-nj}$  であるから  $C_{n+N} = C_n$ .

②  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$  であるから

$$(12) \quad f_j = f(x_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}j\frac{T}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \omega^{nj}.$$

## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の性質

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$  という条件は、例えば  $f$  が連続で区分的に  $C^1$  級であれば満たされる。

証明.

①  $\omega^{-(n+N)j} = \omega^{-nj} \omega^{-Nj} = \omega^{-nj}$  であるから  $C_{n+N} = C_n$ .

②  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$  であるから

$$(12) \quad f_j = f(x_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}j\frac{T}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \omega^{nj}.$$

ゆえに (絶対収束することに注意して)

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f_j \omega^{-nj} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left( \omega^{-nj} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \omega^{mj} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(m-n)j} = \frac{1}{N} \sum_{m \equiv n} c_m N = \sum_{m \equiv n} c_m. \quad \square \end{aligned}$$



## 3.1 離散 Fourier 係数 離散 Fourier 係数の性質

定理 8.2 の (1) ( $\{C_n\}$  は周期  $N$  の周期数列) から、 $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  を求めよ、と要求されたとき、連続した  $N$  項、例えば

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix}$$

を計算すれば十分である。

“入力”  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  についても同様で、例えば

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

があれば十分である。

問題の舞台は  $\mathbb{C}^N$  ということになる。

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理

$C_n$  は  $c_n$  を近似するように定めたが、本当にそうか？ 答えは “In a sense, Yes. But, ...”

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理

$C_n$  は  $c_n$  を近似するように定めたが、本当にそうか？答えは “In a sense, Yes. But, ...”

### 定理 8.3 (Fourier 係数 (周期関数に対する Fourier 変換) に関するサンプリング定理)

周期  $T$  の関数  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が、有限 Fourier 級数

$$u(t) = \sum_{n=-M}^M c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

で表せるとき、すなわち  $u$  の Fourier 係数  $\{c_n\}$  について

$$|n| > M \Rightarrow c_n = 0$$

が成り立つとき、 $N > 2M$  を満たす  $N$  に対して、 $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$  は、

$$\begin{aligned} (\star) \quad C_n &= c_n \quad (0 \leq n \leq M), \\ C_{N-n} &= c_{-n} \quad (1 \leq n \leq M), \\ C_n &= 0 \quad (M < n < N - M) \end{aligned}$$

を満たす。(特に、全ての (0 でない) Fourier 係数  $\{c_n\}_{n=-M}^M$  は、離散 Fourier 係数  $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$  から求まる。ゆえに  $u(t)$  も完全に再現できる。)

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理 (第 11 回授業で説明する予定) であるが、上の定理 8.3 もそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 8.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は “通常のサンプリング定理” を紹介したときに再び取り上げよう。)

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理 (第 11 回授業で説明する予定) であるが、上の定理 8.3 もそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 8.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は “通常のサンプリング定理” を紹介したときに再び取り上げよう。)

仮定の自然さについて: Riemann-Lebesgue の定理から、

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$$

であるから、 $|n|$  が大きいとき  $|c_n|$  が小さいと期待するのは、それなりにもっともである。

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理 (第 11 回授業で説明する予定) であるが、上の定理 8.3 もそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 8.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は “通常のサンプリング定理” を紹介したときに再び取り上げよう。)

仮定の自然さについて: Riemann-Lebesgue の定理から、

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$$

であるから、 $|n|$  が大きいとき  $|c_n|$  が小さいと期待するのは、それなりにもっともである。

しかし、上の定理のように、 $|n|$  が大きいとき  $c_n = 0$  (ぴったり 0) としてしまおうと、 $f$  は実解析的となり、非常になめらかな関数ということになる。これは極端かもしれない。不連続関数にも使えるのが Fourier 級数の良いところだったのである。

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 vs. 通常のサンプリング定理

(現段階では、このスライドに書いてあることは分かりにくいかも)

通常、サンプリング定理と呼ばれるのは、(普通の Fourier 変換に関する) 別の定理 (第 11 回授業で説明する予定) であるが、上の定理 8.3 もそれに近い内容を持っている。(個人的な意見になるが、定理 8.3 の方が現実の (音などの) 現象の説明に便利である。この辺は “通常のサンプリング定理” を紹介したときに再び取り上げよう。)

仮定の自然さについて: Riemann-Lebesgue の定理から、

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$$

であるから、 $|n|$  が大きいとき  $|c_n|$  が小さいと期待するのは、それなりにもっともである。

しかし、上の定理のように、 $|n|$  が大きいとき  $c_n = 0$  (ぴったり 0) としてしまうと、 $f$  は実解析的となり、非常になめらかな関数ということになる。これは極端かもしれない。不連続関数にも使えるのが Fourier 級数の良いところだったのでは？

(信号処理分野の人は、小さいことと 0 であることの差をおおらかに考えているのかもかもしれないが、無限がからむので、そんなに簡単ではない…一数学者の意見)



## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 証明の前に

定理 8.3 の証明を書く前に、具体的な  $M, N$  に対して主張を確認すると、カラクリが見えてくる(と思う)。

$M = 1$  (つまり  $|n| > 1 \Rightarrow c_n = 0$ ),  $N = 10$  の場合、

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 証明の前に

定理 8.3 の証明を書く前に、具体的な  $M, N$  に対して主張を確認すると、カラクリが見えてくる(と思う)。

$M = 1$  (つまり  $|n| > 1 \Rightarrow c_n = 0$ ),  $N = 10$  の場合、

$$C_0 = \sum_{m \equiv 0} c_m = c_0 + c_{10} + c_{-10} + c_{20} + c_{-20} + c_{30} + \cdots = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0,$$

$$C_1 = \sum_{m \equiv 1} c_m = c_1 + c_{-9} + c_{11} + c_{-19} + c_{21} + \cdots = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1,$$

$$C_9 = \sum_{m \equiv 9} c_m = c_9 + c_{-1} + c_{19} + c_{-11} + c_{29} + c_{-21} + \cdots = 0 + c_{-1} + 0 + 0 + \cdots = c_{-1},$$

$$C_2 = \sum_{m \equiv 2} c_m = c_2 + c_{-8} + c_{12} + c_{-18} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

$$C_8 = \sum_{m \equiv 8} c_m = c_8 + c_{-2} + c_{18} + c_{-12} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

同様にして  $2 \leq n \leq 8$  に対して、 $C_n = 0$  が得られる。

0 でない  $c_n$  は、 $c_0 = C_0$ ,  $c_1 = C_1$ ,  $c_{-1} = C_9$  と求まる。

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 証明の前に

一方、 $M = 5$  (つまり  $|n| > 5 \Rightarrow c_n = 0$ ),  $N = 10$  の場合は

## 3.2 Fourier 係数のサンプリング定理 証明の前に

一方、 $M = 5$  (つまり  $|n| > 5 \Rightarrow c_n = 0$ ),  $N = 10$  の場合は

$$C_0 = \sum_{m \equiv 0} c_m = c_0 + c_{10} + c_{-10} + c_{20} + c_{-20} + c_{30} + \cdots = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0,$$

$$C_1 = \sum_{m \equiv 1} c_m = c_1 + c_{-9} + c_{11} + c_{-19} + c_{21} + \cdots = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1,$$

$$C_9 = \sum_{m \equiv 9} c_m = c_9 + c_{-1} + c_{19} + c_{-11} + c_{29} + c_{-21} + \cdots = 0 + c_{-1} + 0 + 0 + \cdots = c_{-1},$$

$$C_2 = \sum_{m \equiv 2} c_m = c_2 + c_{-8} + c_{12} + c_{-18} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = c_2,$$

$$C_8 = \sum_{m \equiv 8} c_m = c_8 + c_{-2} + c_{18} + c_{-12} + \cdots = 0 + 0 + \cdots = c_{-2},$$

$\vdots$   
 $\vdots$

$$C_4 = \sum_{m \equiv 4} c_m = c_4 + c_{-6} + c_{14} + c_{-16} + \cdots = c_4 + 0 + 0 + \cdots = c_4,$$

$$C_6 = \sum_{m \equiv 6} c_m = c_6 + c_{-4} + c_{16} + c_{-14} + \cdots = 0 + c_{-4} + 0 + \cdots = c_{-4},$$

ここまでは調子が良い。ところが

$$C_5 = \sum_{m \equiv 5} c_m = c_5 + c_{-5} + c_{15} + c_{-15} + \cdots = c_5 + c_{-5} + 0 + 0 + \cdots = c_5 + c_{-5} \quad (\text{混じる}).$$

$C_5 = c_5$  も  $C_5 = c_{-5}$  も成り立たない。 $c_5$  と  $c_{-5}$  は簡単に求まりそうにない。

少し考えると、 $M = 5$  であっても、 $N > 10$  であれば、うまく行く ((★) が成り立つ) ことが分かる。

### 定理 8.3 の証明.

定理 8.3 (2)

$$C_n = \sum_{m \equiv n} c_m = c_n + \sum_{p=1}^{\infty} (c_{n+pN} + c_{n-pN}).$$

を用いる。

### 定理 8.3 の証明.

定理 8.3 (2)

$$C_n = \sum_{m \equiv n} c_m = c_n + \sum_{p=1}^{\infty} (c_{n+pN} + c_{n-pN}).$$

を用いる。  $0 \leq n \leq M$  であれば、

- $n + pN \geq N > 2M > M$  であるから、  $c_{n+pN} = 0$ .
- $n - pN \leq M - N < -M$  であるから、  $c_{n-pN} = 0$ .

ゆえに  $C_n = c_n$ .

残りも同様にして証明できる。



## 定理 8.3 の証明.

定理 8.3 (2)

$$C_n = \sum_{m \equiv n} c_m = c_n + \sum_{p=1}^{\infty} (c_{n+pN} + c_{n-pN}).$$

を用いる。  $0 \leq n \leq M$  であれば、

- $n + pN \geq N > 2M > M$  であるから、 $c_{n+pN} = 0$ .
- $n - pN \leq M - N < -M$  であるから、 $c_{n-pN} = 0$ .

ゆえに  $C_n = c_n$ .残りも同様にして証明できる。 □

次のことはぜひ頭に入れて欲しい。

 $0 \leq n \ll N$  であるとき、

- $c_n$  の近似は  $C_n$
- $c_{-n}$  の近似は  $C_{N-n}$  ( $C_{N-n}$  は  $c_{N-n}$  ではなく、 $c_{-n}$  の近似である)

- [1] 桂田祐史：「信号処理とフーリエ変換」講義ノート，  
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/fourier-lecture-notes.pdf>，以前は「画像処理とフーリエ変換」というタイトルだったのを変更した。(2014～).