**複素関数・同演習 宿題 No. 9** (2024 年 11 月 27 日出題, 12 月 3 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

**問 9**

(1) 複素数の範囲で次の各方程式を解け (ただし $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \dfrac{1}{\tan z}$ とする)。

(a) $e^z = -\sqrt{e}$ (b) $e^z = \sqrt{3} - i$ (c) $\sin z = 0$ (d) $\cos z = 3i$ (e) $\cot z = i$

**問 9 解説**　複素指数関数、複素対数関数は実関数のときと異なるところがある。

- $e^a > 0$ が成り立つとは限らない。
- $e^a = e^b$ から $a = b$ は導かれない。
- $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log a^n = n \log a$ が成り立つとは限らない。

一方、

$c = 0$ のとき $e^z = c$ の解は存在しないが、$c \neq 0$ であれば $e^z = c$ の解は必ず (無限個) 存在する。
($c = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ とすると $z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$)

今回の問題も、色々な解き方ができるが、少ない基本的事項を用いて解く方法を紹介している (出題の意図としては、基本的事項の練習をしてもらう) つもり。

(1) (a) $-\sqrt{e}$ の極形式は $-e = \sqrt{e} \cdot e^{i\pi}$. ゆえに

$$z = \log v = \log \sqrt{e} + i(\pi + 2n\pi) = \frac{1}{2} + (2n+1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(b) $c := \sqrt{3} - i$ とおく。$|c| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$

$$\frac{c}{|c|} = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

であるから、$c$ の極形式は $c = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

$$z = \log c = \log 2 + (-\pi/6 + 2n\pi)\, i = \log 2 + (2n - 1/6)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(c) $X := e^{iz}$ とおくと、$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{X - 1/X}{2i}$ であるから

$$\begin{aligned}
\sin z = 0 &\Leftrightarrow \frac{X - 1/X}{2i} = 0 \Leftrightarrow X^2 - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \cdot e^{i \cdot 0} \\
&\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad 2iz = \log 1 + (0 + 2n\pi)i \\
&\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = n\pi.
\end{aligned}$$

(d) $X := e^{iz}$ とおくと、$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{X + 1/X}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
\cos z = 3i &\Leftrightarrow \frac{X + 1/X}{2} = 3i \Leftrightarrow X^2 - 6iX + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow X = 3i \pm \sqrt{(3i)^2 - 1 \cdot 1} = -3i \pm \sqrt{10}i = (\sqrt{10} - 3)e^{i \cdot \pi/2}, (\sqrt{10} + 3)e^{3i\pi/2} \\
&\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log\left(\sqrt{10} + 3\right) + i(\pi/2 + 2n\pi), \log\left(\sqrt{10} - 3\right) + i(3\pi/2 + 2n\pi) \\
&\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = (2n + 1/2)\pi - i \log\left(\sqrt{10} + 3\right), (2n + 3/2)\pi - i \log\left(\sqrt{10} - 3\right).
\end{aligned}$$

注:

$$-\log\left(\sqrt{10} - 3\right) = \log \frac{1}{\sqrt{10} - 3} = \log \frac{\sqrt{10} + 3}{10 - 9} = \log\left(\sqrt{10} + 3\right), \quad -\log\left(\sqrt{10} + 3\right) = \log\left(\sqrt{10} - 3\right)$$

であるから、次のようにも書いても良い。

$$z = 2n\pi + i \log\left(\sqrt{10} + 3\right), (2n+1)\pi + i \log\left(\sqrt{10} - 3\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(e) $X := e^{iz}$ とおくと、$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \cdot \dfrac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\dfrac{X+1/X}{X-1/X}$ であるから

$$\cot z = i \Leftrightarrow i\frac{X+1/X}{X-1/X} = i \Leftrightarrow \frac{X+1/X}{X-1/X} = 1 \Leftrightarrow X+1/X = X-1/X \Leftrightarrow \frac{1}{X} = 0 \Leftrightarrow e^{-iz} = 0.$$

この方程式の解は存在しない ($\because$ 複素指数関数は 0 にならない)。 ■

(分数を整理するとき、下手をすると同値変形でない変形をやってしまう。)