複素関数・同演習 宿題 No. 6 (2024 年 10 月 30 日出題, 11 月 12 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 6 (1) c は複素数、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、z は複素数の値を取る変数とする。このとき冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径、収束円とは何か？

(2) 次の冪級数 (a)–(e) の収束半径と収束円を求めよ。

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+2)^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{6^n}(z+5)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (7n)! z^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^8(z-9)^{10n+1}}{(-11)^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

- なぜか良く分からないが、Cauchy-Hadamard の公式を使って解いた人が例年に比べて多かった。しかし、公式を明らかに勘違いしていたり (上極限 $\limsup_{n\to\infty}$ なのに、$\lim_{n\to\infty} \sup$ とか $\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sup \sqrt[n]{|a_n|}}$ とか$\cdots\rho = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|}}$ は正しいけれど)、$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ の計算の根拠を書かなかったり、なかなか悩ましい読み物でした。

  根拠については、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \text{ の多項式 (値は正)}} = 1$ とか、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ を覚えて使っているということでしょうか。証明書けますか？

  ratio test (d'Alembert の公式) は、計算が簡単 (高校数学で分かる) になることが多いので、個人的にはそちらを使うのがおすすめ (慣れると Cauchy-Hadamard も便利なのだけど、lim sup の説明や練習に時間をさけないので…)。

- 「優級数の定理」、「d'Alembert の公式」、「Cauchy-Hadamard の公式」にはどれも、名前が同じだけど、内容が違うという定理がある。混同している人がいた。(授業では、複素係数の冪級数に使えるバージョンだけ説明している。)

  d'Alembert の公式でいうと、次の 2 つがある。

  「正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、$s := \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が確定するとき、$s < 1$ ならば (その級数は) 収束し、$s > 1$ ならば (その級数は) 発散する。」

  「$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$」が確定すれば、それは (その冪級数の) 収束半径である。

  分母分子反対なのが混乱のもとかなあ…

- 収束円を言葉で説明する人がいるけれど、円周が含まれるかどうか曖昧になりがちなので (「ただし境界は含まない」とちゃんと書いた人が 1 名のみ)、式で書くことを勧める。

- $D(c;\rho)$ という記号はこの授業で前から決めて使っているもの。「収束円を $D(c;\rho)$ と書く。」とした人がいるけれど、ちょっとおかしい (ここでその記号を定義しているみたい)。「$D(c;\rho)$ を収束円とよぶ。」

- 収束半径は、収束半径に相当するものが一意的に存在するという定理を示した後に、「上の定理の ρ をその冪級数の収束半径とよぶ」と定義しているテキストが多い。その真似をするか (定理を書くことになる)、条件のところを抜き出すかになる。ちなみに ChatGPT に収束半径の定義を尋ねてみたら、ちゃんと答えられなかった (多分、手短な形で書いてあるテキストが少ないからだと思われる)。

問 6 解説

(1) 「ρ $(0 \leq \rho \leq +\infty)$ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径とは、

$$|z-c| < \rho \Rightarrow \text{(冪級数が) 収束、} |z-c| > \rho \Rightarrow \text{(冪級数が) 発散、}$$

を満たすことをいう。」

文がおかしくなっているのが少なくなかった。赤字の部分が ρ に関する条件であることを理解していないのかな。そこで書き換えてみる。

「ρ $(0 \leq \rho \leq +\infty)$ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径とは、ρ が

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ が、} |z-c|<\rho \text{ で収束し、} |z-c|>\rho \text{ で発散する}$$

という条件を満たすことをいう。」

収束円については「また、このとき $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|<\rho\}$ をその冪級数の収束円とよぶ。」で良い。授業中の記号を使って「また、このとき $D(c;\rho)$ をその冪級数の収束円とよぶ。」としてもよい。

(2) 以下では、冪級数の中心を c, n 次の項の係数を a_n, 収束半径を ρ と書くことにする。

(a) $c=-1$, $a_n=\dfrac{1}{(n+2)^3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3}{(n+2)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}=\frac{(1+0)^3}{(1+0)^3}=1.$$

ゆえに収束半径は 1, 収束円は $D(-1;1)$.

(b) $c=-5$, $a_n=\dfrac{n^4}{6^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{6^n}\cdot\frac{6^{n+1}}{(n+1)^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{(1+1/n)^4}=\frac{6}{(1+0)^4}=6.$$

ゆえに収束半径は 6, 収束円は $D(-5;6)$.

(c) $c=0$, $a_n=(7n)!$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(7n)!}{(7(n+1))!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(7n+7)(7n+6)(7n+5)(7n+4)(7n+3)(7n+2)(7n+1)}=0.$$

ゆえに収束半径は 0, 収束円は $D(0;0)=\emptyset$.

(d) $\zeta:=(z-9)^{10}$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^8(z-9)^{10n+1}}{(-11)^n}=(z-9)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^8(z-9)^{10n}}{(-11)^n}=(z-9)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^8\zeta^n}{(-11)^n}.$$

右辺の ζ についてのベキ級数は、中心 0, 係数 $b_n:=\dfrac{n^8}{(-11)^n}$ であり、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|n^8|}{|(-11)^n|}\frac{|(-11)^{n+1}|}{(n+1)^8}=\lim_{n\to\infty}\frac{11}{(1+1/n)^8}=11$$

であるから収束半径は 11. ゆえに

$|\zeta|<11$ ならば収束し、$|\zeta|>11$ ならば発散する。

ゆえに与えられた冪級数は

$|(z-9)^{10}|<11$ ならば収束し、$|(z-9)^{10}|>11$ ならば発散する。
(言い換えると、$|z-9|<\sqrt[10]{11}$ ならば収束し、$|z-9|>\sqrt[10]{11}$ ならば発散する。)

ゆえに、収束半径は $\sqrt[10]{11}$, 収束円は $D\left(9;\sqrt[10]{11}\right)$.

(e) $c=0$, $a_n:=\begin{cases}1 & (n=k! \text{ となる } k\in\mathbb{N} \text{ が存在するとき})\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases}$

ここから、収束半径を求める (実は 1 である) 議論を行う。2 通り与える。

(一つの証明) $|z|<1$ ならば任意の n に対して $|a_n z^n| \le |z|^n$、かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するので、優級数の定理より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方 $|z| \ge 1$ のとき、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$n := N!$ とおくと、$n \ge N$ かつ $|a_n z^n| = |z^n| \ge 1$ が成り立つから、第 n 項は 0 に収束しない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束しない。

(別証明) $\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|$ は 1 または 0 である。$=1$ となる n は無限にたくさんあるので、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sup_{k \ge n} \sqrt[n]{|a_k|} = 1 \quad (\because k := n! \text{ とすると、} k > n \text{ かつ } a_k = 1).$$

ゆえに

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \ge n} \sqrt[n]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

ゆえに $\rho = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$. 収束円は $D(0;1)$.■

注意

- (細かいことだと思うかもしれないが) 収束半径 $= \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ がつねに成り立つわけではないので、

  $$\text{収束半径} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \cdots$$

  と書き出すのは良くない。

  $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \cdots = \text{何か}$$

  を得てから (極限が求まるか、$= +\infty$ になるかを確認してから)

  $$\therefore \quad \text{収束半径} = \text{何か}$$

  と書くべきである (文章は先頭から順に読まれるので)。

- 収束半径が負になる、明らかにおかしい結果を書く人がいる。収束半径に z を入れる人も (その z は一体何？)。収束半径は 0 以上の実定数か、または $+\infty$ である。

- 「z が収束する」と書いた人がいるが、「収束する」の主語は冪級数のはず。「(冪級数が) z で収束する」と直すのかな。