複素関数・同演習 練習問題　(2025年1月21日, 提出する必要はない)

__年__ 組____番　氏名______________

問 14　次の定積分を留数を用いて求めよ。a は正の数とする。

(1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^4+1)} dx$　(2) $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3}\, dx$　(3) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta$

(2025/1/23 の補講の後に解答 PDF を公開します。)

問 14 解説

(1) $p(z) := (z^2+1)(z^4+1)$, $q(z) := z^2$, $f(z) := \frac{q(z)}{p(z)}$ とおく。$p(z)$ と $q(z)$ はともに z の多項式であり、$\deg p(z) = 6$, $\deg q(z) = 2$ であるから、$\deg p(z) \geq \deg q(z) + 2$ を満たす。また任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $p(x) = (x^2+1)(x^4+1) \geq (0+1)(0+1) = 1$ であるから $p(x) \neq 0$. 被積分関数 f の極 c を求めよう。それらは p の零点である。

$$p(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^2+1 = 0 \vee c^4+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \pm i \vee c = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

これらはいずれも p の 1 位の零点であるので、f の高々1 位の極である。そのうち $\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものは、$c_1 = i$, $c_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. ゆえに (1/21 の講義の定理によって)

$$I = 2\pi i \sum_{c=i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z^4+1)}; c\right).$$

(ここに現れた留数の計算には、1/15 に紹介した定理が便利である。)

P_i, Q_i $(i = 1, 2, 3)$ を次のように定めると、c_i の近傍で正則で c_i は P_i の 1 位の零点である。

- $P_1(z) := z^2+1$, $Q_1(z) := \dfrac{z^2}{z^4+1}$
- $P_2(z) := z^4+1$, $Q_2(z) := \dfrac{z^2}{z^2+1}$
- $P_3(z) := z^4+1$, $Q_3(z) := \dfrac{z^2}{z^2+1}$

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left(\frac{Q_1(c_1)}{P_1'(c_1)} + \frac{Q_2(c_2)}{P_2'(c_2)} + \frac{Q_3(c_3)}{P_3'(c_3)}\right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2z}\frac{z^2}{z^4+1}\bigg|_{z=i} + \frac{1}{4z^3}\cdot\frac{z^2}{z^2+1}\bigg|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4z^3}\frac{z^2}{z^2+1}\bigg|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\pi}{2}. \end{aligned}$$

(例えば第 2 項では、$c_2 = e^{i\pi/4}$ より $c_2^2 = e^{i\pi/2} = i$, $c_2^3 = e^{i3\pi/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2^4 = -1$ を使うなどして計算の工夫ができる。)

(2) 被積分関数が偶関数であること、$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$ を用いると

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^3}dx.$$

$p(z) := (z^2+a^2)^3$, $q(z) := 1$, $f(z) := \frac{q(z)}{p(z)}$ とおく。$p(z)$ と $q(z)$ は z の多項式で、$\deg p(z) = 6$, $\deg q(z) = 0$ であるから $\deg p(z) \geq \deg q(z)+1$. また任意の実数 x に対して $p(x) = (x^2+a^2)^3 \geq a^6 > 0$ であるから $p(x) \neq 0$. $e^{iz} = e^{i\cdot 1\cdot z}$ で $1 > 0$ であるから、定理 27.3 が適用できる。

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^3}; c\right)\right) = -\pi \operatorname{Im} \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^3}; c\right).$$

(ここで $c = a+bi (a, b \in \mathbb{R})$ とするとき $\operatorname{Re}(ic) = \operatorname{Im}(-b+ai) = -b = -\operatorname{Im} c$ を用いた。)

被積分関数 $f(z)e^{iz}$ の極 c は p の零点である。$p(c) = 0 \Leftrightarrow c = \pm ai$. このうち $\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものは $c = ai$. これは p の 3 位の零点であるから、被積分関数の 3 位の極である。留数の計算に

は定理 26.8を用いよう。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^3};ai\right) &= \lim_{z\to ai}\frac{1}{(3-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[(z-ai)^3\frac{e^{iz}}{(z-ai)^3(z+ai)^3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[(z+ai)^{-3}e^{iz}\right]''\Big|_{z=ai} = \frac{e^{iz}}{2}\left[12(z+ai)^{-5}-6i(z+ai)^{-4}-(z+ai)^{-3}\right]\Big|_{z=ai}\\
&= \frac{e^{-a}}{2}\left(12\cdot\frac{-i}{32a^5}-6i\frac{1}{16a^4}-\frac{i}{8a^3}\right) = -ie^{-a}\frac{3+3a+a^2}{16a^5}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$I = \frac{(a^2+3a+3)\,e^{-a}\pi}{16a^5}.$$

(3) $z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから、$d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}.$$

留数定理を用いて

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^4\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{1}{16i}\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^4}{z^5}dz = \frac{1}{16i}\cdot 2\pi i\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}\left(\frac{(z^2+1)^4}{z^5};c\right)\\
&= \frac{\pi}{8}\operatorname{Res}\left(\frac{(z^2+1)^4}{z^5};0\right) = \frac{\pi}{8}\cdot\operatorname{Res}\left(\frac{z^8+4z^6+6z^4+4z^2+1}{z^5};0\right) = \frac{\pi}{8}\cdot 6 = \frac{3\pi}{4}.\blacksquare
\end{aligned}$$