複素関数・同演習 宿題 No. 13 (2024 年 1 月 10 日, 1 月 16 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 13 **要注意** 補講を 1/23(木) 1,2 限に行います (間違えて伝達したことがあったかも)。

(1) $f(z)=\dfrac{4z^4+33z^3+96z^2+122z+67}{z^3+7z^2+15z+9}$ について、以下の問に答えよ ($f(z)$ の部分分数分解の結果は、Mathematica で `Apart[(4z^4+33z^3+96z^2+122z+67)/(z^3+7z^2+15z+9)]` として検算せよ)。

(a) -3 のまわりの f の Laurent 展開とそれが収束する円環領域 (なるべく大きいもの), 主部, -3 の極としての位数, 留数 $\mathrm{Res}(f;-3)$ を求めよ。

(b) f の -3 以外の極を全て求め、その位数とその点における f の留数を答えよ (もちろん Laurent 展開を求めれば分かるが、部分分数分解の結果だけから分かるはず)。

(2) $f(z)=\dfrac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}$ とするとき、(Laurent 展開も部分分数分解もせずに) $\mathrm{Res}(f;-1)$, $\mathrm{Res}(f;-2)$, $\mathrm{Res}(f;-3)$ を求めよ。

c が極の場合、$\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to c}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]$ (k は極 c の位数) を使うと良い。

問 13 解説

(1) (a) $f(z)$ の部分分数分解は (途中経過略で)

$$f(z)=5+4z+\frac{3}{z+1}-\frac{2}{z+3}+\frac{1}{(z+3)^2}.$$

右辺の各部分の -3 における Laurent 展開を求める (最後の 2 項はすでに Laurent 展開の形をしているので、それ以外 — それは正則なので実質的に冪級数展開を求めることになるが、これは既に宿題でやったことがある)。

$$\begin{aligned}
&5+4z=5+4(z+3-3)=-7+4(z+3),\\
&\frac{3}{z+1}=\frac{3}{(z+3-3)+1}=\frac{3}{-2+(z+3)}=\frac{3}{-2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+3}{2}}=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+3}{2}\right)^n\\
&\qquad=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}(z+3)^n\quad(\text{収束}\Leftrightarrow|z+3|<2).
\end{aligned}$$

以上をまとめて

$$f(z)=-\frac{17}{2}+\frac{13}{4}(z+3)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-3}{2^{n+1}}(z+3)^n-\frac{2}{z+3}+\frac{1}{(z+3)^2}\quad(0<|z+3|<2).$$

(Mathematica では、`SeriesCoefficient[f[z],{z,-3,n}]` として検算できる。)

主部は $\dfrac{-2}{z+3}+\dfrac{1}{(z+3)^2}$. 留数 $\mathrm{Res}(f;-3)=-2$.

(b) f の極は -3 と -1. -3 については (a) で答えた。

部分分数分解の結果から -1 における Laurent 展開の主部が $\dfrac{3}{z+1}$ であることが分かる ($\because$ $5+4z-\dfrac{2}{z+3}+\dfrac{1}{(z+3)^2}$ は $D(-1;2)$ で正則なので $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n$ と展開できて、$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n+\dfrac{3}{z+1}$ が Laurent 展開である。a_n を具体的に求めなくても主部は $\dfrac{3}{z+1}$)。ゆえに -1 は 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;-1)=3$.

(2) いずれも分母、分子は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

-1 は分母の 1 位の零点であるので、-1 は f の高々1 位の極であり (実は分子 $\neq 0$ なので 1 位の極)

$$\mathrm{Res}(f;-1)=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}=\left.\frac{z+4}{(z+2)^3}\right|_{z=-1}=\frac{-1+4}{(-1+2)^2}=3.$$

-2 は分母の 3 位の零点であるので、-2 は f の高々3 位の極であり (実は分子 $\neq 0$ なので 3 位の極)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,(f;-2)&=\lim_{z\to-2}\frac{1}{2!}\left((z+2)^3\frac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}\right)''=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{z+4}{z+1}\right)''\right|_{z=-2}\\
&=\frac{1}{2}\left.\left(1+\frac{3}{z+1}\right)''\right|_{z=-2}=\frac{1}{2}\cdot 2\left.\frac{3}{(z+1)^3}\right|_{z=-2}=-3.
\end{aligned}$$

f は -3 の近傍 $D(-3;1)$ で正則なので (-3 は f の正則点なので)

$$\mathrm{Res}\,(f;-3)=0.$$

(Mathematica では `Residue[f[z],{z,-1}]` のようにして検算できる。)■