複素関数・同演習 宿題 No. 12　(2025 年 1 月 8 日出題, 2025 年 1 月 14 日 13:30 までに提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 12　(授業の進行具合によっては一部削除するかもしれない。授業中の指示に従うこと。)

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z}$ の $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ における冪級数展開の収束半径を求めよ。実際に冪級数展開せずに答えること。場合わけをして、min を使わずに表すこと。

(2) 次の関数の零点とその位数を求めよ (値を答えるだけでなく根拠も示す)。

(a) $f(z) = \sin(z^3)$　(b) $g(z) = (\sin z)^3$　(c) $h(z) = \cos(z^2) - 1$

(ヒント: c が f の k 位の零点ならば、c は f^ℓ の $k\ell$ 位の零点 — なぜでしょう？)

問 12 解説

(1) f は $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ で定義されていて、$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 1} f(z)=\infty$ である (1/14 に説明した言葉を使えば、0, 1 は f の極である)。

$$r=\min\{|c|,|c-1|\}=\begin{cases}|c| & (\operatorname{Re} c<1/2)\\ |c-1| & (\operatorname{Re} c\geq 1/2)\end{cases}$$

とおくと、f は $D(c;r)$ で正則であるから、f の c における冪級数展開は $D(c;r)$ で収束し (ここまでで、収束半径 $\geq r$ と分かる)、

- $\operatorname{Re} c<1/2$ $(r=|c|)$ のとき $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in D(c;r)}} f(z)=\infty$
- $\operatorname{Re} c\geq 1/2$ $(r=|c-1|)$ のとき $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in D(c;r)}} f(z)=\infty$

(これで収束半径が r を超えないことが分かるので) ゆえに f の c における冪級数展開の収束半径は r である。

(2) 以下 $\sin\zeta=0\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\ \zeta=n\pi$, $\cos\zeta=1\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\ \zeta=2n\pi$ を認めた上で解答する。

(a) $f(c)=0\Leftrightarrow\sin(c^3)=0\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\ c^3=n\pi\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})(\exists k\in\{0,1,2\})\ c=\sqrt[3]{n\pi}\omega^k$. ただし $\omega:=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. ゆえに f の零点は $c:=\sqrt[3]{n\pi}\omega^k$ $(n\in\mathbb{Z};\ k=0,1,2)$.

$$f'(z)=3z^2\cos\left(z^3\right).$$

$n\neq 0$ のとき $c=\sqrt[3]{n\pi}\omega^k\neq 0$, $c^3=n\pi$, $\cos(c^3)=(-1)^n\neq 0$ であるから、$f'(c)\neq 0$. ゆえに $c=\sqrt[3]{n\pi}\omega^k$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ k=0,1,2)$ の位数は 1.

$$f''(z)=6z\cos\left(z^3\right)-9z^4\sin\left(z^3\right),\quad f''(0)=0.$$

$$f'''(z)=-54z^3\sin\left(z^3\right)+6\cos\left(z^3\right)-27z^6\cos\left(z^3\right),\quad f'''(0)=6\neq 0$$

ゆえに $c=0$ の位数は 3.

(b) まず $g(z)=0\Leftrightarrow\sin z=0\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})z=n\pi$ であるから、g の零点は $n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.
$n\in\mathbb{Z}$ とするとき

$$\begin{aligned}
&g(z)=(\sin z)^3,\quad g(n\pi)=0,\\
&g'(x)=3\sin^2 z\cos z,\quad f'(n\pi)=0,\\
&g''(z)=3\left(2\sin z\cos z\cdot\cos z+\sin^2 z(-\sin z)\right)=6\cos^2(z)\sin z-3\sin^3 z,\quad g''(n\pi)=0,\\
&g'''(z)=6\cos^3 z-12\cos z\sin^2 z,\quad g'''(n\pi)=6(-1)^{3n}\neq 0.
\end{aligned}$$

ゆえに $n\pi$ は g の 3 位の零点である。

(別解) 後半について: $F(z):=\sin z$ とおくと、任意の整数 n に対して、$F(n\pi)=0$, $F'(n\pi)=\cos n\pi=(-1)^n\neq 0$ であるから、$n\pi$ は F の 1 位の零点である。ゆえに $n\pi$ の近傍で正則な関数 G が存在して、$F(z)=(z-n\pi)G(z)$, $G(n\pi)\neq 0$. ゆえに $H(z):=G(z)^3$ とおくと、H は $n\pi$ の近傍で正則で、$f(z)=(z-n\pi)^3H(z)$, $H(n\pi)=G(n\pi)^3\neq 0$. ゆえに $n\pi$ は f の 3 位の零点である。

(c) $h(z)=\cos\left(z^2\right)-1$.
$h(c)=0\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\ c^2=2n\pi\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{Z})\ c=\pm\sqrt{2n\pi}$ $\quad$ ($n<0$ のとき $\sqrt{2n\pi}=i\sqrt{2|n|\pi}$ として)

c がこれら零点のとき $\cos(c^2) = \cos(2n\pi) = 1$, $\sin(c^2) = \sin(2n\pi) = 0$ であることに注意する。

$$\begin{aligned}
&h'(z) = -2z\sin\left(z^2\right), \quad h'(c) = 0 \\
&h''(z) = -4z^2\cos\left(z^2\right) - 2\sin\left(z^2\right), \quad h''(c) = -4c^2 \\
&h'''(z) = -12z\cos\left(z^2\right) + 8z^3\sin\left(z^2\right), \quad h'''(c) = -12c, \\
&h^{(4)}(z) = -12\cos\left(z^2\right) + 16z^4\cos\left(z^2\right) + 48z^2\sin\left(z^2\right), \quad h^{(4)}(c) = -12 + 16c^4
\end{aligned}$$

c が 0 以外の零点であるとき、$h(c) = h'(c) = 0$, $h''(c) \neq 0$ であるから、位数は 2.
$c = 0$ のとき、$h(0) = h'(0) = h''(0) = h'''(0) = 0$, $h^{(4)}(0) = -12 \neq 0$ であるから、位数は 4. ■