複素関数・同演習 宿題 No. 11 (2024 年 12 月 18 日出題, 1 月 8 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名____________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 11

(1) 以下の (a), (b) に答えよ。領域はなるべく具体的な式で表すこと (それが出来ない場合は図で示すのも認める)。「◯◯であること」、「□□でないこと」の簡単な根拠を書くこと。

(a) 凸である領域 ($\subset \mathbb{C}$) の例 (ただし $\mathbb{C}$, $D(c;r)$ 以外のもの) をあげよ。

(b) 凸でないが星型である領域 ($\subset \mathbb{C}$) の例 (ただし、$\mathbb{C} \setminus$ 半直線, 星の形 ☆ 以外のもの) をあげよ。

(2) 円盤における Cauchy の積分公式 $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-c|=r} \dfrac{f(z)}{z-a}\,dz$ (仮定をここに書くのは省略) に当てはめることによって、以下の線積分の値を求めよ (部分分数分解はしないでやること)。

(1) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z-2)(z+2)}$ (2) $\displaystyle\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{z(z-2)}$ (3) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z(z-3)^2}$ $\left(\begin{array}{l} D \text{ は } 1-i,\ 1+i,\ -1+i, \\ -1-i \text{ を頂点とする正方形} \end{array}\right)$

ヒント: 図を描いて、曲線と被積分関数の特異点の位置関係を把握すること。(3) は積分路を変形する。

問 12 解説

(1)

(2) まず定理を復習する。

円盤における Cauchy の積分公式

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$c \in \Omega$, $r > 0$, $D := D(c; r)$, Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、任意の $a \in D$ に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

これとパターン・マッチさせるとき、c と r は簡単で、被積分関数が $\dfrac{f(z)}{z-a}$ であることも分かるが、何が $f(z)$ で、何が a か、少し考える必要がある。f は $|z-c| = r$ の内部と周上で正則、a は $|z-c| = r$ の中、ということから決定する。要するに

a は閉曲線の中 (にある被積分関数の特異点)！

(1) $c = 1$, $r = 2$, $a = 2$, $f(z) = \dfrac{1}{z+2}$ とすると、円盤領域における Cauchy の積分公式の条件 ($a \in D(c; r)$, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ とすると $\overline{D}(c; r) \subset \Omega$, f は Ω で正則) が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z-2)(z+2)} = \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) = 2\pi i f(2) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{\pi i}{2}.$$

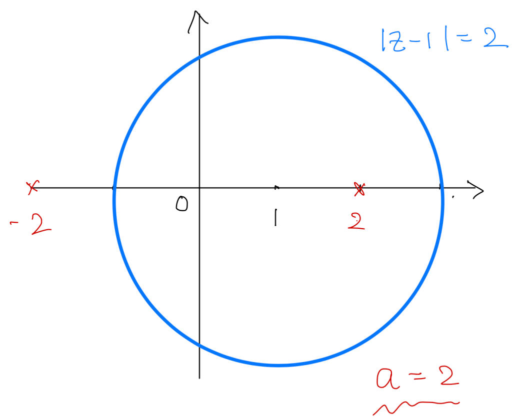


図 1: 円 $|z-1| = 2$ の中に 2 があり、-2 は円の外 $\to a = 2$

(2) $c = i$, $r = 2$, $a = 0$, $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ とすると、円盤領域における Cauchy の積分公式の条件 ($a \in D(c; r)$, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とすると $\overline{D}(c; r) \subset \Omega$, f は Ω で正則) が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{z(z-2)} = \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot f(a) = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{0-2} = -\pi i.$$

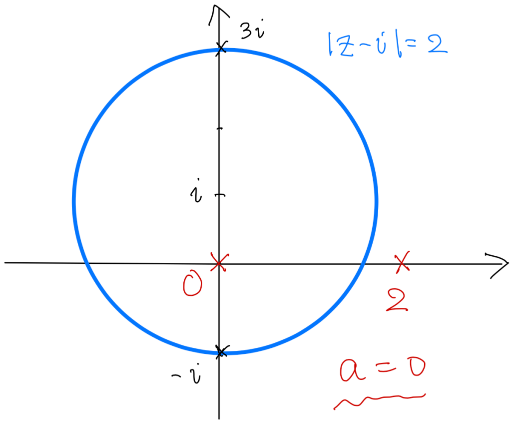


図 2: 円 $|z-i|=2$ の中に 0 があり、2 は外 $\to a=0$

(3) 被積分関数 $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$ は、領域 $\mathbb{C}\setminus\{0,3\}$ で正則である。その範囲で積分路 ∂D (正方形) は円周 $|z|=1$ に変形できる。

$$\int_{\partial D}\frac{dz}{z(z-3)^2}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z-3)^2}.$$

$c=0,\ r=1,\ a=0,\ f(z)=\dfrac{1}{(z-3)^2}$ である。

$$\int_{\partial D}\frac{dz}{z(z-3)^2}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z-3)^2}.=\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i\cdot f(a)=2\pi i f(0)=2\pi i\frac{1}{(0-3)^2}=\frac{2}{9}\pi i.$$

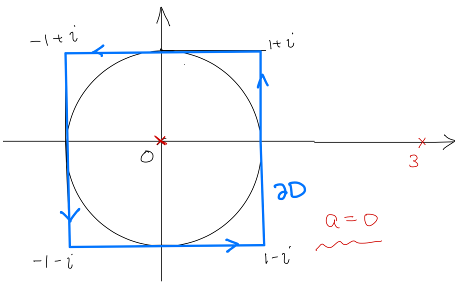


図 3: 円 $|z-i|=2$ の中に 0 があり、2 は外 $\to a=0$

積分路 ∂D が $|z|=1$ に変形できることの証明どのようにやるか、実は色々なやり方があります。代表的なものを 3 つ示します。

i. 授業で「星型領域内では、始点と終点が変わらないならば曲線を置き替えても積分の値は変わらない」という定理を証明してあります。これを使って、正方形の周を円周に替えるためには、次の 4 つの段階を踏めば良いです。
例えば第 1 象限の部分は、$1+i$ を中心として、半径が 1.1 (1 より大きく、$1+i$ と 0 との距離 $\sqrt{2}$ よりは小さい) の円盤領域 (これは星型) Ω_1 を考えます。Ω_1 で被積分関数は正則です (0, 3 は含まないから)。そして、正方形の周 Γ の右上部分 Γ_1 と、円周 C の右上部分 C_1 が Ω_1 に含まれます。ですから、Γ_1 を C_1 に置き換えられます。
第 2 象限でも同様に $-1+i$ 中心の円を考えます。$-1+i$ と 0, -2 との距離は $\sqrt{2}$ なので、第 1 象限のときと同じ半径 1.1 で大丈夫。正方形の周 Γ の左上部分 Γ_2 は、円周 C の左上部分 C_2 に置き換えられます。
第 3 象限 (Γ_3 を C_3), 第 4 象限 (Γ_4 を C_4) でも同様です。

ii. 各 j に対して、Γ_j と C_j は縦線領域 (D_j とする) を囲むので、縦線領域版の Green の定理を用いて、

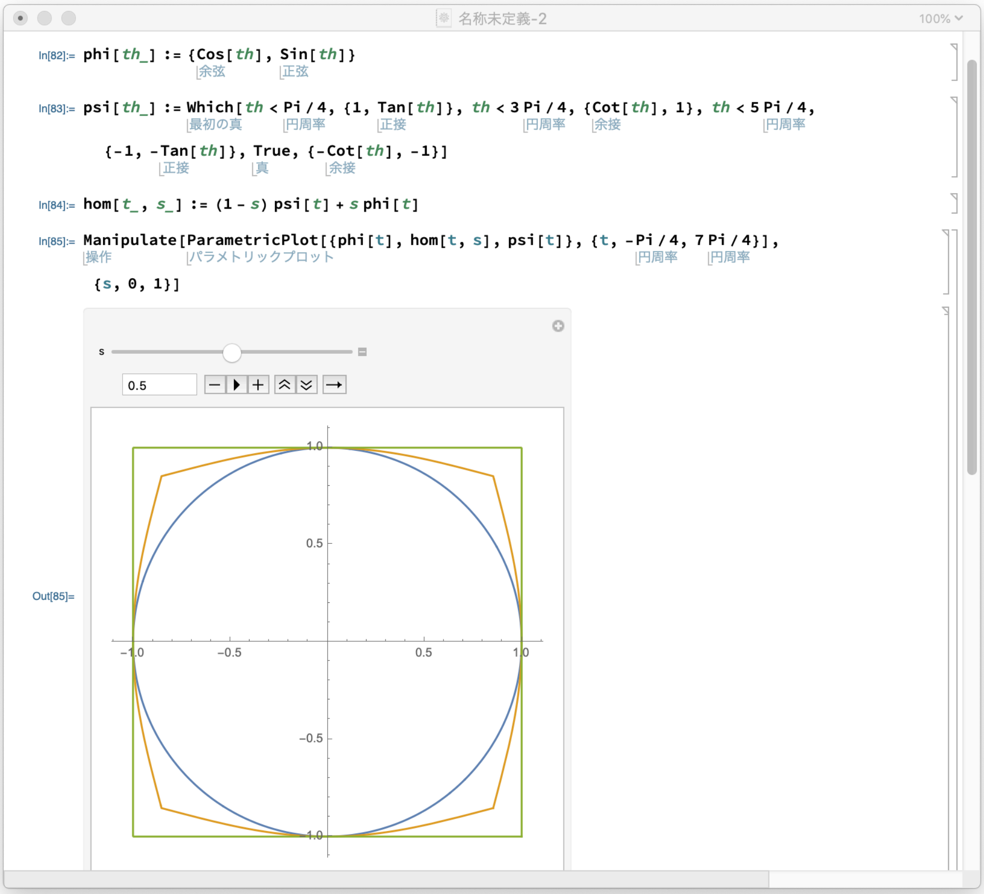
$$\int_{\Gamma_j} f(z)dz - \int_{C_j} f(z)dz = \int_{\partial D_j} f(z)dz = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\Gamma_j} f(z)dz = \int_{C_j} f(z)dz$$

とする手があります。Green の定理ちゃんと分かっているという人には、これが簡単かもしれません。

iii. 普通の数学の本では「連続的変形」というのをすることが多いかもしれません。$\mathbb{C}\setminus\{0,3\}$ の中で、正方形を連続的に円周に変形する写像 (ホモトピー写像と呼ぶ) を作ります。その写像は割と簡単に作れます (原点に向かって縮める感じ…$\varphi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) が正方形の周を正の向きに一周する曲線であれば、$\psi(t) := \dfrac{1}{|\varphi(t)|}\varphi(t)$ ($(t,s)\in[\alpha,\beta]\times[0,1]$) は $|z|=1$ を正の向きに一周する曲線である。$F(t,s)=(1-s)\varphi(t)+s\psi(t)$ がホモトピー写像になる。)。ホモトピー写像があれば、積分路を置き換えられる、という講義で軽くお話に出しただけで、証明はしていません。講義ノートの付録には書いてあります (今だと p. 291, 定理 E.4

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/complex2024.pdf#page=291`

にあります)。これはちょっと背伸びが必要かもしれません。



正方形の周を円周に連続的に変形する

(この Mathematica プログラムは説明とイマイチ対応していないので、修正しようと考えています。フィードバックを優先するので、それが終わってからになります。)