複素関数・同演習 宿題 No. 10 (2024 年 12 月 11 日出題, 12 月 17 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 10 以下の線積分の値を求めよ。(1) については曲線 C の像 C^* の図を描け。

(1) $C\colon z = t + it^3$ $(t \in [0,1])$ とするとき $I_1 = \displaystyle\int_C \operatorname{Im} z\, dz$

(2) $r > 0, c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ のとき、次の線積分の値を求めよ。(a) $\displaystyle\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-c}$ (b) $\displaystyle\int_{|z-c|=r} (z-c)^n\, dz$

(講義中に注意したように、$|z-c| = r$ は $z = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とみなすこと。)

(3) 次の各曲線 γ に対して、$\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz$ の値を求めよ。 (i) 0 から 1, そして 1 から $1+i$ に至る折れ線 (ii) 0 から i, そして i から $1+i$ に至る折れ線 (iii) 0 から $1+i$ に至る線分

(4) 4 点 0, 1, $1+i$, i を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する曲線を $\varGamma$ とするとき、$\displaystyle\int_\varGamma \operatorname{Re} z\, dz$, $\displaystyle\int_\varGamma (z^2 - 2iz + 3) dz$ の値を求めよ。

問 10 解説　今回、目にとまった (例年と違うぞ) のは

- (再履修なのかな) Cauchy の積分定理とか留数定理とか持ち出した人 (主に 3,4 年生) が少数いました。テストならば「(指定されていない限り) 何を使っても良い」ですが、宿題なので出来れば意図をくみとってもらいたかった (宿題の出題意図はその週に学んだことの使用の練習です)。

- $\displaystyle\int_a^b \operatorname{Im} z\, dz$ と書いた人がかなりいました。複素関数の積分を $\displaystyle\int_a^b f(z)\, dz$ と書くことはありますが、a を始点、b を終点とする曲線 C の選び方によらず $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$ が同じ値を持つ場合が普通です。今の場合、$\operatorname{Im} z$ は正則でないのでそれには当てはまりません (積分路を変えると値がすぐ変わってしまう)。問題に出て来た曲線 γ のうちの、a と b の間の部分という意味で使っているわけですが、気になりました。「曲線 γ の、a から b までの部分を C とする。」と定義して $\displaystyle\int_C \operatorname{Im} z\, dz$ と書くことを勧めます。言葉でやるのが面倒ならば、式でやっても良いし、図を書いても良いです。自分で記号を定義するのは滅多にやらないので、苦手かもしれませんが、ぜひ慣れて欲しいところです。

(1) 原始関数が見つからないので、定義に基づき計算してみる (実は正則関数でない関数は原始関数を持たない、という定理が成り立つので、原始関数が存在しないことが分かる)。

$z = t + it^3$ $(t \in [0, 1])$ とするとき、$\operatorname{Im} z = t^3$, $dz = (1 + 3it^2)dt$ であるから

$$I_1 = \int_C \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^1 t^3 \cdot (1 + 3it^2)dt = \int_0^1 t^3\, dt + 3i \int_0^1 t^5\, dt = \frac{1}{4} + 2i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{i}{2}.$$

(2)　$|z - c| = r$ は $z = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ であり (これは記号についての約束である)、$dz = ire^{i\theta}d\theta$ である。

(a)

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z - c} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(c + re^{i\theta} - c)} \cdot ire^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

(b) $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ であるから (次の式の分母 $n + 1$ が 0 にならないので)

$$\left(\frac{(z - c)^{n+1}}{n + 1}\right)' = \frac{(n + 1)(z - c)^n}{n + 1} = (z - c)^n.$$

ゆえに $(z - c)^n$ の原始関数が存在する。$|z - c| = r$ は閉曲線であるから

$$\int_{|z-c|=r} (z - c)^n dz = 0.$$

(注: もちろん線積分の定義に基づいて計算しても構いませんが[1]、いつも、原始関数が存在するかどうか、存在するならばそれを利用して計算しよう (もちろんその方が簡単だから)、と考えて欲しいです。)

(3)　(i) C_1: $z = t$ $(t \in [0, 1])$, C_2: $z = 1 + it$ $(t \in [0, 1])$ とすると、$\gamma = C_1 + C_2$ とみなせる。

$$\begin{aligned}\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz &= \int_{C_1} \operatorname{Im} z\, dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^1 \operatorname{Im}(t) \cdot dt + \int_0^1 \operatorname{Im}(1 + it) \cdot i\, dt \\ &= \int_0^1 0\, dt + i\int_0^1 t\, dt = \frac{i}{2}.\end{aligned}$$

(ii) C_1: $z = it$ $(t \in [0, 1])$, C_2: $z = i + t$ $(t \in [0, 1])$ とすると、$\gamma = C_1 + C_2$ とみなせる。

$$\begin{aligned}\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz &= \int_{C_1} \operatorname{Im} z\, dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^1 \operatorname{Im}(it) \cdot i\, dt + \int_0^1 \operatorname{Im}(i + t) \cdot dt \\ &= i\int_0^1 t\, dt + \int_0^1 1\, dt = \frac{i}{2} + 1.\end{aligned}$$

---

[1] 一応書いておくと、

$$\int_{|z-c|=r} (z - c)^n\, dz = \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^n \cdot ire^{i\theta}\, d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\, d\theta = ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n + 1)}\right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n + 1}\left(e^{2\pi i(n+1)} - 1\right) = 0.$$

最後の $= 0$ が分からなかった人が結構いましたが、$e^{2\pi i} = 1$ なので、任意の整数 k に対して $e^{2\pi ik} = 1$ です。

(iii) $z=(1+i)t$ $(t\in[0,1])$ を γ とみなせるので

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z\,dz=\int_0^1 \operatorname{Im}((1+i)t)\cdot(1+i)dt=(1+i)\int_0^1 t\,dt=\frac{1+i}{2}.$$

(この (3) の出題意図は、図形的な指示から、自分で曲線のパラメーター表現の式を作って、それを用いて線積分を計算する、というものです。その意味ではパラメーター表現の式をぜひ書いて欲しいところですが、見せてくれない人がかなりいました。後の計算から何を使ったか推測できましたが⋯)

(4) C_1: $z=t$ $(t\in[0,1])$, C_2: $z=1+it$ $(t\in[0,1])$, C_3: $z=1+i-t$ $(t\in[0,1])$, C_4: $z=i-it$ $(t\in[0,1])$ とおくと、$\Gamma=C_1+C_2+C_3+C_4$.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \operatorname{Re} z\,dz&=\int_{C_1}\operatorname{Re} z\,dz+\int_{C_2}\operatorname{Re} z\,dz+\int_{C_3}\operatorname{Re} z\,dz+\int_{C_4}\operatorname{Re} z\,dz\\&=\int_0^1 \operatorname{Re}(t)\cdot dt+\int_0^1 \operatorname{Re}(1+it)\cdot i\,dt+\int_0^1 \operatorname{Re}(1+i-t)\cdot(-1)dt+\int_0^1 \operatorname{Re}(i-it)\cdot(-i)dt\\&=\int_0^1 t\,dt+i\int_0^1 1\,dt-\int_0^1(1-t)dt-i\int_0^1 0\,dt\\&=\frac{1}{2}+i\cdot 1-\frac{1}{2}=i.\end{aligned}$$

一方、$z^2-2iz+3$ は多項式関数であるから原始関数を持ち (例えば $\frac{z^3}{3}-iz^2+3z$ は原始関数である)、Γ は閉曲線であるから、$\displaystyle\int_\Gamma(z^2-2iz+3)dz=0$. ■

Γ を一つの写像として表すことは出来ますが (授業で書いて見せたことがある)、この解答例のように C_j の和として表す方が、各 C_j の式が簡単になるので、計算が楽で間違えにくくなります (細かいことだけど、役に立つ工夫)。

宿題を出した授業の解説で、「原始関数が存在するか調べて、見つかったらそれを使って計算して下さい」と言ったのですが、$\displaystyle\int_\Gamma(z^2-2iz+3)dz$ を定義通りに計算した人も多かったです。正しく計算できた人もいるし、間違えた人もいるけれど、途中で「こんな面倒な計算をしないといけないのか」と考えて、原始関数に意識が行って欲しいです。

(注: Cauchy の積分定理によって $\displaystyle\int_\Gamma(z^2-2iz+3)dz=0$ と書いた人がいました。なるほど (授業ではまだ説明していないけれど、使っていいならばそういう線の解答もありですね)。その場合は、関数がどこで正則か書くべきです。Γ の囲む範囲と、Γ 上で関数が正則であることを確かめてから、Cauchy の積分定理を適用する。この問題の場合、「(被積分関数は) 全平面 $\mathbb{C}$ で正則である」と言うだけで十分ですが、それをした人は少数派でした (2 人だけだったかな)。原始関数を使う議論は、(Cauchy の積分定理を使うよりも) 広い場合に適用できるので、それはそれでできるようになって欲しいです。)

```
(* 線積分の計算を助ける関数 *)
li[fz_, phit_, a_, b_] :=
 Integrate[(fz /. z -> phit) D[phit, t], {t, a, b}]

li[Im[z], t + I t^3, 0, 1]

li[Im[z], t, 0, 1] + li[Im[z], 1 + I t, 0, 1]

li[Im[z], I t, 0, 1] + li[Im[z], I + t, 0, 1]

li[Im[z], (1 + I) t, 0, 1]

li[Re[z], t, 0, 1] + li[Re[z], 1 + I t, 0, 1] +
 li[Re[z], 1 + I - t, 0, 1] + li[Re[z], I - I t, 0, 1]
```