

複素関数・同演習 宿題 No. 1 (2024年9月25出題, 10月1日13:30 までに Oh-o! Meiji で提出)

__年__組__番 氏名_____ (2 ページ目以降は、裏面・レポート用紙、何でも可。)

問1 (1) $z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = 2 + 4i$ とするとき、 $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $|z_1|$, $\operatorname{Re} z_1$, $\operatorname{Im} z_1$, $\overline{z_1}$ を求めよ (結果が実数でない限り、 $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の形に表せ)。

(2) $z^2 = 3 + 2i$ を満たす複素数 z を求めよ ($z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおいて、 x, y に関する連立方程式を導いて、それを解け)。

問1 解説

(1) $z_1 = 3 - 3i, z_2 = 2 + 4i$ のとき

$$z_1 + z_2 = 5 + i, \quad z_1 - z_2 = 1 - 7i, \quad z_1 z_2 = 18 + 6i, \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{10} - \frac{9}{10}i,$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \quad \operatorname{Re} z_1 = 3, \quad \operatorname{Im} z_1 = -3, \quad \bar{z}_1 = 3 + 3i.$$

(2)

$$z^2 = 3 + 2i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = 3 + 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3 \wedge 2xy = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3 \wedge y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 3 \wedge y = -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 1 = 0 \wedge y = -\frac{1}{x}.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ に注意すると

$$x^4 - 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = \frac{2\sqrt{13} + 6}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{13} + 6}}{2}.$$

このとき y は ($2\sqrt{13} > 6$ に注意して、分母分子に $\sqrt{2\sqrt{13} - 6}$ をかけて)

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{13} + 6}} = \pm \frac{2\sqrt{2\sqrt{13} - 6}}{\sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 6^2}} = \pm \frac{2\sqrt{2\sqrt{13} - 6}}{4} = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{13} - 6}}{2} \quad (\text{複号同順}).$$

(「複合」とか「復号」とか間違えないように。漢字のまちがいで減点する気はないですが…)

ゆえに

$$z = \pm \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{13} + 6}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{13} - 6}}{2}i \right).$$

(二重根号なので他の表し方があるかも…) ■