2025/1/15(水曜)2限の講義のメモ

桂田 祐史

2025年1月16日, 2025年1月17日

1. 有理関数の Laurent 展開の話は前回もやったのだけれど、宿題を解くためにはもう少し説明すべきだな、と。講義ノートの p. 168, 例 10.7 — 少し加筆しました。

   0 を中心とする円環領域 $A(0;0,1)$, $A(0;1,2)$, $A(0;2,3)$ のそれぞれで Laurent 展開できるが、$A(0;1,2)$ と $A(0;2,3)$ については無視して良い (重要なのは 0 における Laurent 展開、つまり $A(0;0,1)$ での Laurent 展開で、それ以外は今年度の期末試験には出題しない)。

2. 有理関数の Laurent 展開について

   (1) $f(z)=\frac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z)$, $q(z)$ は z の多項式で互いに素) とするとき、分母 $p(z)$ の零点が f の極で、それを除いたところで f は正則。

   (2) もちろん Laurent 展開してしまえば色々なことが分かるが (でもちょっと面倒だよね)、極とその位数, 主部, 留数は部分分数分解した段階でわかってしまう。例えば例 10.7 で、0 の周りの Laurent 展開を考えるとき、$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}$ 以外の $-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}$ は 0 の近傍で正則なので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ の形に変形できる。これは 0 での主部以外の部分である。

   (3) 実は、極の位数と極における留数は、部分分数分解もしないで求められる。それをこの後に説明する。留数さえ分かれば良い、という応用が多いので、これは重要である。

3. 極の位数の判定には、p. 180 の命題 10.26 と p. 181 の系 10.29

4. 「正則点」,「高々 k 位の極」の定義　(p. 172, 定義 10.9, 10.10)

5. 極の場合の位数の求め方　命題 11.15 (p. 197) とその特別な場合に相当する命題 11.10 (p. 196), 分母が 1 位の零点である場合 (意外と便利な) 命題 11.12 (p. 197)

6. 有理関数の場合の留数計算の例　例 11.16 (p. 198), 例 11.13, 11.14 (p. 197)
   (有理関数以外の留数計算例もあるのだけれど、次回以降 (多分補講) に見せます。)

参考文献