複素関数

桂田 祐史

2014 年 9 月 20 日, 2024 年 9 月 30 日

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/

2023 年度は、火曜 3 限 (402 号室), 水曜 2 限 (310 教室) に講義を行なう。

序にかえて

この文書は、「複素関数・同演習」という講義科目のためのノートです (授業の進行に従い、昨年度の講義ノートを書き換えて行きます)。

この科目は、明治大学総合数理学部現象数理学科の 2 年生以上を対象にしていて、内容はいわゆる関数論入門です。

変数と関数の値が複素数である (複素変数・複素数値の) 関数のことを複素関数、特に 1 回微分可能な複素関数を正則関数と呼び、その基本的な性質を調べるのが入門段階の関数論の内容であると言ってよいでしょう。

関数論は 19 世紀に生まれ、その世紀中、それ自身が大発展するとともに、数学の発展を牽引しました。

日本の理工系の学科における関数論入門で取り上げる項目は、伝統的にほぼ固まっています。関数論で何をどこまで学ぶかについては、検討の余地があり、私は折に触れて考えていますが、この科目では、今のところ、定番の項目を講義することで、時間をほぼ使い切ってしまっているのが現状です。具体的な内容については、0 節を見て下さい。

(結果として、取り上げる題材に特色はほとんどありません。やや脱線になりますが、計算問題が取りあえず解けるようになるためには (≒単位を取得するには)、市販の参考書が役立つ場合が多いと思います[1]。)

関数論には、実関数の微積分と比べると、次のような特徴があります (私の個人的な見解)。

- 「なぜそうなるか」理解することにやりがいが感じられる。
  定理などに不思議な感じがするものが多いです。証明が理解できても、その感じが消えないものもあります。「美しい」という人が非常に多いです[2]。
- 公式 (定理) の適用も、“反射的に” 出来るものは少ない。
  少なくとも最初のうちは、定理の仮定の条件が満たされることを一つ一つ確かめることに時間がかかります。慣れるとそういうことが瞬時に出来るようになるけれど、省略出来るわけではありません (「確かめ」を書くことは面倒になって省略されがちですが)。

[1] 私は、授業の説明は十分詳しく、大きな穴はないはずと考えていますが、どういう説明が分かりやすいかは人それぞれですし、複数の説明を読んで初めて分かるようになった、より深く分かるようになった、ということはごく普通に起こるので、ぜひ色々な本を読んで欲しいと思っています。

[2]「美しい」というのは、数学的事実ではなくて「個人の感想」に過ぎないかもしれませんが、「関数論の美しさ」について語る人が多いのは経験的事実である、とは言えるでしょう。

- 話の筋が長い。
  微積分では、各週の授業ごとに、考える問題を述べて、それについての解決策と根拠 (定理の証明など) が示される場合が少なくありません。しかし、関数論の場合は準備が長く続くことが多いです。

このような特徴があるため、単に定理・公式を紹介して、適用の練習をすることに止(とど)めず、なぜそうなるか、十分に理解してもらうことを目標にしています。原則として、すべての定理の証明を与えます。そのため、半期週 2 コマの時間をあてています (工学系の学科では、半期週 1 コマ程度の時間しかあてていないことが多いので、ざっと 2 倍の時間をかけています)。

講義内容を理解するために必要となる予備知識は、主に、実関数の微積分と 2 年前期の「数学解析」の内容です。

この講義ノートは、それなりに時間をかけて整備してあるので、大きな間違いはほとんど残っていないと信じていますが、細かい[3]ミスはまだたくさん残っていると思われます[4]。もし、書かれている内容がおかしい、納得がいかない、という場合は、面倒がらずに、指摘していただけると助かります。

受講している人に、ミスを指摘してもらえることは稀で、なぜか、受講していない人から教えてもらえることが多いです。
2018 年 12 月、石谷常彦氏から、非常に多くのご指摘をいただきました。おかげさまで、50 近いミスを直すことが出来ました。今後学ぶ多くの学生のためになると思います。心から感謝いたします。

このノート中にも問題を載せてありますが、別に練習問題のプリント PDF も用意してあります (授業 WWW サイト https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/ においてあります)。

[3]誤植のようなミスも、初めて学ぶ人にとっては、大混乱の原因になりうるので、それを「細かい」と言うのは、書く人 (今の場合は筆者) の自己中心的な考えなのかもしれません。数学者は、論理的なミスを重大なものと考えるのが普通ですが、計算ミス、書き間違い・書き落としのようなものは、論文を書くときでもないと、かなりルーズに考えがちです。この辺は工学系の先生とは大きな差があるようです。…こういうのも図々しい言い訳ということになるのかな。

[4]何度も読み返すけれど、ほぼ毎回直すべきところが見つかるので…

目 次

以下、お仕事 (TODO) リスト (ずいぶん長いこと関数論の授業を担当しているけれど、なかなか完了しない…)。
付録の「絶対収束に関する命題」も完成させて、公開したい。
問 63 の解答を書くこと。
線積分のところをもっと図を描こう。
10 節と 11 節のマージをする (一度プリント・アウトして、赤ペンを入れる)。

記号・取り決め

- 自然数全体の集合 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$
(0 を自然数に含めるという流儀もあるけれど、オーソドックスな流儀を採用する。)

- 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$

- $(\forall x)\ P(x) \Rightarrow Q(X)$ を $(\forall x\colon P(x))\ Q(x)$ 等で表す。
例えば $(\forall x)\ x>0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$ を $(\forall x\colon x>0)\ x+\frac{1}{x}\geq 2$ や、$(\forall x>0)\ x+\frac{1}{x}\geq 2$ と表す。

- $(\exists x)\ P(x) \wedge Q(X)$ を $(\exists x\colon P(x))\ Q(x)$ 等で表す。
例えば $(\exists n)\ n\in\mathbb{N}\wedge na>b$ を $(\exists n\colon n\in\mathbb{N})\ na>b$ や $(\exists n\in\mathbb{N})\ na>b$ と表す。

- 複素数 c, 正の数 r に対して、$D(c;r):=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<r\}$ とおき、c を中心とする半径 r の円盤とよぶ。冪級数の収束円を考えるときは、$r=0$ や $r=+\infty$ の場合もこの記号を用いる ($r=0$ のとき $D(c;r)=\emptyset$, $r=+\infty$ のとき $D(c;r)=\mathbb{C}$.)。

- 複素平面内の 2 点 a,b に対して、$[a,b]:=\{(1-t)a+tb\mid t\in[0,1]\}$ とおく。これは、図形としては a,b を端点とする線分であるが、曲線と考えるときは、$\varphi(t)=(1-t)a+tb$ ($t\in[0,1]$) をパラメーター付けとする。

- $\Omega\subset\mathbb{C}$ に対して
$$\overline{\Omega}:=\{z\in\mathbb{C}\mid (\forall\varepsilon>0)D(z;\varepsilon)\cap\Omega\neq\emptyset\}$$
とおき、Ω の閉包 (closure) と呼ぶ。

- 領域とは弧連結な開集合のことをいう。
(領域とは連結な開集合のこと、とする方が普通であるが、$\mathbb{C}$ の開集合の場合は、連結も弧連結も違いはないし、こちらの方が初学者には分かりやすいと考えている。)

- 複素数の世界の ∞ は、実数の世界の ∞ とは別物である。違うものに同じ記号を使うのは良くないと考え、実数の世界の ∞ を $+\infty$ と書いたところが多い。(もっとも不徹底なところがあり、数列の極限を扱うときの $n\to\infty$ は $n\to+\infty$ とせずに $n\to\infty$ のままにしてある。数列の議論をしている場合は、$n\in\mathbb{N}$ であるから、誤解は生じないだろう、と考えている。)

- $\Omega\subset\mathbb{C}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c\in\overline{\Omega}$, $A\in\mathbb{C}$ とするとき
$$\lim_{z\to c}f(z)=A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall z\in\Omega) \quad (|z-c|<\delta\Rightarrow|f(z)-A|<\varepsilon).$$
(多くの本で $0<|z-c|<\delta\Rightarrow|f(z)-A|<\varepsilon$ としてあるが、$0<$ を課さない。)

- c が f の孤立特異点であるとは
$$(\heartsuit)\qquad (\exists\varepsilon>0)\quad f \text{ は } 0<|z-c|<\varepsilon \text{ で正則であるが、} D(c;\varepsilon) \text{ では正則でない}$$
を満たすことと定義する。

(教科書に採用している神保 [1] では、「$(\exists\varepsilon>0)$ f は $0<|z-c|<\varepsilon$ で正則」であることを孤立特異点の条件にしている。どちらの流儀にするか、迷ったが (年度によって変更したりした)、今後は $(\heartsuit)$ で定義する。)

0 なるべく短いイントロ

ついつい長いイントロをしたくなるのだが (特にこの関数論は、あれも言いたい、これも言いたい、が山のようにある)、最初に長いイントロを聞いても良く分からないだろうから、講義ではなるべく短く済ませたい。

複素変数の複素数値の関数を**複素関数**、微分可能な複素関数を**正則**(せいそく)**関数**と呼ぶ[5]。正則関数の理論 (複素関数の微積分の理論) である複素関数論がこの講義のテーマである。

0.1 参考書の探し方

(繰り返しになるが、この講義は神保 [1] を教科書に指定してある。)

講義の名前は「複素関数」だが、参考となる書籍のタイトルには、「関数論 (函数論)」、「複素解析」のどちらかがつくものが多い。杉浦「解析入門 II」や高木「解析概論」のように、解析学の入門書に含まれていることもある。
単に「関 (函) 数論」と言うと、複素関数の理論を指すことに注意しよう。

具体的な本の紹介は、付録 H (p. 302) を見よ。

0.2 パラシュート降下 … この科目の目的は何か？

Cauchy の積分公式と呼ばれる、正則関数についての公式 (定理)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad \text{(適当な図を添える)}$$

とその系、例えば c の近傍で正則な関数 f が

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

と Taylor 展開出来る (よって無限回微分可能である) ことや、**留数定理**などを理解して使えるようになることが、この講義科目の最終目標である。

留数定理の応用

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1};i\right)=2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1}=2\pi i\left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i}=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi.$$

($\tan^{-1}$ を使っても計算できるけれど… $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ なども同様に計算可能で、そうなると原始関数を求めること自体が難しい。Mathematica を使うにしても、やり方を間違えると、はまったりする。)

Cauchy の積分公式から、理論上も重要で、応用上も有用な定理・公式がこんこんと湧き出て来る。留数定理はその代表例である。解析概論で有名な高木貞治は、このあたりのことを、「帝王道路のドライヴ」と評した[6]。
到達目標は、教科書 (神保 [1]) の 1〜4 章＋αである。これは理工系の多くの学科の「関数論」の相場である。

[5]正確には、$\mathbb{C}$ の開集合を定義域とする微分可能な関数を正則関数という。$\mathbb{C}$ の開集合としておかないと、実関数を排除できない。
[6]アレクサンドリアのプトレマイオス 1 世がエウクレイデス (ユークリッド) に「幾何学を学ぶのに『原論』よ

0.3 複素数・複素関数論の歴史

0.3.1 Cardano

虚数 (実数でない複素数) が歴史上初めて登場したのは…2 次方程式でなく、3 次方程式に関係してだった。Cardano (ジェロラモ・カルダーノ, Gerolamo Cardano, 1501 年ミラノに生まれ、1576 年ローマで没する) は、著書 Ars magna de Rebus Algebraicis (1545)[7] (このタイトルは「偉大なる書」のように訳されることがある) の中で、3 次方程式、4 次方程式の解法 (解の公式) を示した。

3 次方程式 $x^3+px+q=0$ に対して[8]、

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{1}$$

が解となる[9]。

実は、3 次方程式にも判別式と呼ばれるものがある。今の場合は

$$\Delta:=-\left(27q^2+4p^3\right)=-108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]\quad(108=2^2\cdot 3^3).$$

これを用いると、(1) は次のように書き換えられる:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

Δ は、判別式の名にふさわしく、次のことを満たす。

- $\Delta>0\Leftrightarrow$ 相異なる 3 実根を持つ。
- $\Delta=0\Leftrightarrow$ 重根を持ち、かつすべての根は実数である。
- $\Delta<0\Leftrightarrow$ 1 つの実根と、2 つの虚根 (互いに複素共役) を持つ。

(この事実自体は、微積分を用いて容易に証明することが出来る。問 3 を見よ。)

$\Delta\le 0$ のときは、$\sqrt{-\frac{\Delta}{108}}$ は非負の実数である。ゆえに、(1) の x は 2 つの実数の 3 乗根の和であるから、実数である。ゆえに、(1) は実根を与える。特に $\Delta<0$ のときは、これが唯一の実根である。

問題は、$\Delta>0$ ($\Leftrightarrow q^2/4+p^3/27<0$) の場合である。実係数 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ が相異なる 3 実根を持つ場合は、Cardano の公式 (1) に虚数が現れてしまう。この場合を、「不還元の場合」(Casus irreducibilis) と呼ぶ。

Cardano の Ars Magna には、$\Delta>0$ となる 3 次方程式に公式を適用する例は載っていないが、そういう問題があることは Cardano は当然知っていたと思われる。Cardano は、有名な「足して 10, かけて 40 になる二つの数は？」という問を出し、$5\pm\sqrt{-15}$ と答を提示しているのは (上の PDF ファイルの 67 ページ目)、そのことを暗示していると思われる。

り近道はないかと尋ねたところ、エウクレイデスは「幾何学に王道なし」と答えた、という伝説がある。学問を学ぶためには、王様のような偉い人でも、特別に楽な方法はなくて、一歩一歩地道に歩みを進める必要がある、ことのたとえに使われる (使われた？)。それを踏まえた上で、複素関数論の理論は Cauchy の積分公式までたどり着けば後は快調に進む、まるで王様のために作られた道を車で疾走するようだ、ということを言っているわけである。

[7] `http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf`

[8] $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\ne 0)$ が与えられたとき、簡単な式変形で $y^3+py+q=0$ の形の方程式に帰着できる。問 2 を見よ。

[9] 3 次方程式は (重複度を込めて数えると)3 つの解 (根) を持つ。1 つ求まれば、後は 2 つは、2 次方程式を解けば求まる。実際、それらを式で表すのは簡単である。問 6 を見よ。

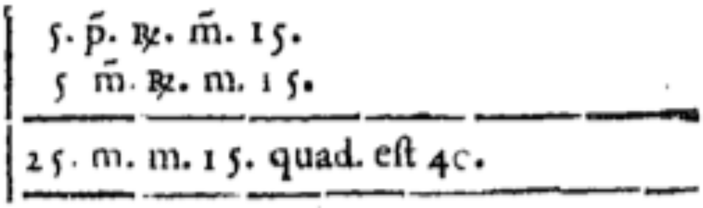


図 1: 足して 10, かけて 40 となる 2 数は $5 \pm \sqrt{-15}$ (Ars Magna から)

3 次方程式の解法の発見者が一体誰であるかという議論があるけれど、それはおいておく (ゴシップは数学とほとんど関係ない)。3 次方程式と虚数に関する説明を最初に公表 (出版) したのが Cardano であることは確かである。

高校で「(実係数の)2 次方程式で、判別式が負の場合は、実数の範囲では解は存在しないが、虚数を導入すると、虚数の範囲では解が存在する」と説明される。それ自体はまったく正しいが、それだけではわざわざ虚数というものを考える理由が分かりにくい (虚数解なんて役に立たないのではないか？というのは当然の疑問であろう。それに答える必要がある。)。実係数 3 次方程式の実数解を得たいとき、解の公式の一部分に虚数が現れる (それを避けることは出来ない) という事実の紹介は省略すべきではない、と考える。

問 1. 足して 10, かけて 40 となる 2 数を求めよ (Cardano の例題)。

以下の 5 つの問題[10]は、3 次方程式に関するもので、複素関数の今後の学習についての必要性はあまり高くない (興味がなければ解く必要はない)。

(まず 2 次の係数を 0 にするのは簡単であることを確認する。)

問 2.

(1) $f(x)$ は 3 次多項式, α は定数とする。次式を満たす定数 A, B, C, D を f と α で表わせ。

$$f(x) = A(x-\alpha)^3 + B(x-\alpha)^2 + C(x-\alpha) + D.$$

(2) 与えられた 3 次多項式 $x^3 + ax^2 + bx + c$ に対して、$y = x - \alpha$ という変数変換で

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + py + q \quad \text{(2 次の項がない)}$$

という形に変形するには、α をどう選べばよいか (**Cardano 変換**)。

(解答は p. 219)

($(p/3)^3 + (q/2)^2$ の符号で解の判別が出来ることを確認する[11]。微分法のほどほどの難易度の練習問題である。)

問 3. p, q を実数とするとき、以下のことを示せ。

(1) 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が相異なる 3 実根を持つためには、$\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 < 0$ が必要十分である。

(2) 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が 3 実根を持つためには、$\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 \le 0$ が必要十分である。

[10] 問 6 (2) 以外は高校数学で解ける。

[11] $\Delta := -3^3 \cdot 2^2 \left[(p/3)^3 + (q/2)^2\right]$ は、$x^3 + px + q$ の判別式である。

(3) 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ がただ一つの実根を持つ (他の 2 根は虚数である) ためには、 $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$ が必要十分である。

問 4. $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-YZ-ZX-XY)=(X+Y+Z)(X+\omega Y+\omega^2 Z)(X+\omega^2 Y+\omega Z)$ が恒等式であることを示せ。ただし $\omega:=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。

問 5. p, q が実数で $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$ を満たすとき、$x^3+px+q=0$ の実根を求めよ。

(答: $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ — これがほぼ Cardano の到達点であると言えると思う。)

ヒント 3 実数 x,α,β が $x=\alpha+\beta$ を満たすとき

$$\alpha^3+\beta^3=-q \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta=-\frac{p}{3} \quad \Rightarrow \quad x^3+px+q=0 \quad (\text{すなわち } x \text{ は解})$$

が成り立つ。$\alpha^3+\beta^3=-q$, $\alpha^3\beta^3=-\left(\frac{p}{3}\right)^3$ を満たす α, β を探す。

問 6. (1) 問 5 で実根以外の 2 つの虚根を求めよ。
(2) p と q が一般の複素数の場合に、$z^3+pz+q=0$ のすべての根を求めよ。

0.3.2 Bombelli

Bombelli (ラファエル・ボンベリ, Rafael Bombelli, 1526 年イタリアの Bologna にて生まれ、1572 年イタリアの Rome にて没する) は著書 Algebra (1572 年) の中で 3 次方程式の不還元の場合を説明した。

$$x^3=15x+4$$

という方程式 (これは高校生ならば、因数定理を用いて $x=4,-2\pm\sqrt{3}$ と解ける) に Cardano の公式を適用すると、

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

が得られるが、虚数に関する計算法則を導入した上で、これが 4 に等しい、と説明した[12]。

この後、多くの人が虚数を用いずに不還元の 3 次方程式を解こうと努力したが、誰も成功せず、ある意味で不可能であることまで証明された。

(2016/9/21 記: 昨日授業で話してみて、Bombelli については舌足らずであると感じた。彼が何をしたか、もう少し調べる必要がある。Wikipedia によると、Klein [3], Smith [4] がレファレンスにあがっている。Algebra の PDF ファイルへのリンクもある。)

[12] と書いてあるそうだけれど、この講義の立場では、虚数の 3 乗根は値が一意に確定しないので、4 に等しいと断定することは出来ない。Mathematica で `sd=Sqrt[-121]; x=(2+sd)^(1/3)+(2-sd)^(1/3)` とすると (`Sqrt[-121]`$=11i$ であり)、`x` は 4 になる。

0.3.3 de Moivre

de Moivre (アブラーム・ド・モアブル, Abraham de Moivre, 1667 年フランスの Citry-le-François に生まれ、1754 年英国の London にて没する) は、1730 年に

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin^2 x\cos^{n-2}x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 x\cos^{n-4}x - \cdots,$$
$$\sin nx = n\sin x\cos^{n-1}x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3 x\cos^{n-3}x + \cdots$$

という公式を与えた。これはいわゆる**ド・モアブルの公式** (de Moivre の公式)

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{2}$$

を与えたことになる[13]。複素数を用いると見通しが良くなることの代表例である。

0.3.4 Euler

「Euler を読め、Euler を読め、彼こそ我らが師だ[14]」と言われた Euler (レオンハルト・オイラー, Leonhard Euler, 1707 年スイスの Basel に生まれ、1783 年現在ロシアのサンクトペテルブルクにて没する) は、**Euler の公式**と呼ばれる

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

という有名な関係式を発見し、縦横無尽に活用した。

指数関数を**複素関数** (複素変数の関数) に拡張すれば、三角関数と関係があることが分かる。$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ となることはすぐ分かるので

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

複素指数関数について指数法則を証明すると、de Moivre の公式は簡単な系となる。

複素対数関数については論争があったが、Euler は多価関数であることを示した (これについては高瀬 [5] を見よ)。

Euler は楕円関数についても色々重要な発見をしている。

0.3.5 Gauss

Gauss (ガウス, Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 年 4 月 30 日 – 1855 年 2 月 23 日, 現ドイツの Brunswick に生まれ、現ドイツの Göttingen にて没する) はおそらく最も有名な数学者であろう。

Gauss 以前も、**代数学の基本定理**に気がついた人はいたようだが[15]、Gauss はその重要性を認識して、生涯で様々な証明を発表した。最初に証明を発表した当時は、まだ複素数が市民権を得ていなかったため、「次数 1 以上の任意の実係数多項式は、1 次または 2 次の因数に分解される」のような内容だったそうである。(代数学の基本定理は、現代では「次数 1 以上の任意

[13] 何となくスッキリしない書き方、と感じられたかもしれません。実は有名な (2) そのものは、de Moivre の書いたものには載っていない、とのことです。

[14] Liesez Euler, Liesez Euler, c'est notre maître à tous. Laplace が学生に言ったとされる有名な言葉。英訳すると、"Read Euler, read Euler, he is the master of us all" となるとか。

[15] 例えば、フランス人は代数学の基本定理のことを d'Alembert の定理と言うそうである。また Gauss の証明は現代の基準では証明とは認められないとか、Gauss 以外の誰それが証明していたとか、その手の話も色々あるみたい。

の複素係数多項式は、少なくとも一つの複素数の根を持つ (結局、重複度を込めて、ちょうど n 個の複素数の根を持つ、となる)」と書かれるが、複素数を認めないと、そこまで分解できない。)。

この講義では、代数学の基本定理の、複素関数論を用いた証明を紹介する (関数論の定番メニューである)。

Gauss は、著作として発表しなかったが、複素線積分の定義や、Cauchy の積分定理、正則関数の冪級数展開可能性などを良く認識していて (高木 [6] の「函数論縁起」(授業の WWW サイトに掲載) を見よ)、それらをフルに活用して色々な研究 (楕円関数, 超幾何級数, 確定特異点型微分方程式など) を行なった。

(Gauss の楕円関数論については、河田 [7] が詳しい。)

複素平面は、**Gauss 平面**とも呼ばれる。Gauss 自身の発表 (1811 年頃) よりも先に Wessel (ヴェッセル, Caspar Wessel, 1797 年), Argand (アルガン, Jean-Robert Argand, 1806 年) が発表していたというのも良く知られている。(英語の世界では、the Argand plane, an Argand diagram というのはポピュラーである。)

Gauss は数論においても、Gauss の整数 ($a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) の形の数のこと) を導入した。

0.3.6 Cauchy

Cauchy (コーシー, Augustin Louis Cauchy, 1789 年 8 月 21 日 – 1857 年 5 月 23 日, フランスの Paris に生まれ、Sceaux にて没する) は、**複素線積分**の定義、**Cauchy の積分定理**、**Cauchy の積分公式**、**Cauchy-Riemann の関係式** など、この講義で学ぶ重要なことの多くを発表した。

Cauchy は定積分の統一的な計算法を探求する過程で、これらの結果に到達したということらしい。Cauchy が実際にどういう論文を書いたかについては、岡本・長岡 [8] が参考になる。

0.3.7 Abel, Jacobi

Abel (アーベル, Niels Henrik Abel, 1802 年 8 月 5 日 – 1829 年 4 月 6 日, ノルウェーの Frindöe に生まれ、ノルウェーの Froland にて没する) は冪級数の研究でも有名であるが (この講義でもそれらを学ぶ)、**楕円関数論**を Jacobi (ヤコビ, Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 年 12 月 10 日 – 1851 年 2 月 18 日, 現ドイツの Potsdam に生まれ、ドイツの Berlin にて没する) と競争するように研究した。楕円関数は複素関数として考察することで二重周期性という本質が明らかになる。楕円関数論とそれに続く**代数関数論**は、19 世紀数学の華とも言われている。

0.3.8 Weierstrass, Riemann

Weierstrass (ワイエルシュトラス, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897, 現ドイツの Ostenfelde に生まれ、Berlin にて没する) は楕円関数論、冪級数による解析接続、代数関数の理論などで豊富な業績がある。

Riemann (リーマン, Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 年 9 月 17 日 – 1866 年 7 月 20 日, 現ドイツの Breselenz に生まれ、イタリアの Selasca にて没する) は、後世に多大な影響を与えた大数学者であり、関数論の分野では、Cauchy-Riemann の関係式を元にした関数論の幾何学的理論, Riemann 面の概念の提出などの業績がある (高瀬 [5] が参考になる)。それ以外にも、Riemann 幾何学が重要な業績である。

楕円関数論, 代数関数論の発達については、古典と言える高木「近世数学史談」([6]) が有名であるが (読むととてもワクワクするが)、率直に言ってそれを読んだだけでは分かりにくい

と思われる。色々な原典の翻訳や解説をしている高瀬正仁氏の著作 (例えば [9]) と併読することを勧める。

0.3.9 量子力学

私自身は関数論を学んで複素数が身近でリアルな存在になった。多くの数学者が同じ思いを持っていると想像するのだが、ある有名な物理学者は、次のように言っていた。

(a) それだけで複素数を受け入れることは出来ない (複素数は便利ではあるが、なくても済むので、複素数を用いる必然性がない)。

(b) 量子力学にはどうしても複素数が必要で、物理学者としては複素数を受け入れざるを得ない。

正直に白状すると、私は (物理学に詳しくないので) この意見を今ひとつ実感・納得出来ないが、参考のために書いておく次第である[16]。

1 複素数の定義とその性質

複素数の定義、四則、複素平面、平方根、極形式、n 乗根、というスタンダードな話をする。(高等学校の数学 III に入ったし) 参考書をあげる必要はないと思われるが、色々な小話が載っている一松 [10] は興味深く読めるかもしれない。

1.1 高校で習ったことを振り返る

(一度高等学校の新課程の教科書を傍らにおいて、ここの記述を見直そう。)

複素数は高校数学で教わったはず (？) なのだけど、高校数学の教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

$i^2=-1$ となる数 (**虚数単位**, the imaginary unit) i を導入し、$a+bi$ (a と b は実数) と書ける数を**複素数** (a complex number) という。

$a+0i$ は単に a, $0+bi$ は単に bi, $a+1i$ は単に $a+i$ と書くことにする。$0+0i$ は 0, $0+1i$ は i, $1+0i$ は 1 と書くことになる。

そして

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

で和と積を定める。

以上は複雑なようだが、i を変数とする多項式として計算し、途中で i^2 が現れたら -1 で置き換える、というルールで計算すると良い (同じ結果が得られる)。

$a+i0$ を a と書くと、実数と見分けがつかない。「同一視」していることになる。二つの実数を実数として足したりかけたりするのと、複素数として足したりかけたりするのと、結果は同じになるので、矛盾は生じない。

そうすると $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ とみなせる。数の範囲を実数から拡張したことになる。

[16] この辺りの文章を書いた後で、一松 [10] を読んだら、量子力学のことが書いてあった。一松先生も量子力学で複素数が使われることは重要だと考えているようだ。

以上が高校数学での複素数であるが、かなりいい加減で、定義とは言いにくい (書いていても気持ちが悪い)。

きちんとした定義は、次項で与えることにする。

余談 1.1 (虚数単位を表す記号) 虚数単位は純粋数学の文献では i と書かれるが、電流を i と書きたい分野では j と書かれたりする。JIS (日本工業規格) では、字体を立体にして i あるいは j と書くことになっている (そうである)。

余談の余談であるが、プログラミング言語の Mathematica では、虚数単位を `I` で表す。また MATLAB では `i`, `j` のどちらも虚数単位を表し、`i` や `j` を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も `1i` や `1j` は虚数単位を表す。 ■

複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く。$\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

実数でない複素数のことを**虚数** (an imaginary number) と呼ぶ。つまり虚数とは、$a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0)$ と書ける数のことをいう。

$a=0$ のとき、**純虚数** (a purely imaginary number) と呼ぶことがある[17]。この講義では純虚数という言葉は使わないことにする。

複素数の変数は z, w, ζ などの文字で表されることが多い (ζ はゼータ、またはツェータと読む)。

$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ に対して、x, y をそれぞれ z の**実部** (the real part)、**虚部** (the imaginary part) と呼び、$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ で表す:

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

(昔はドイツ文字を用いて、$\Re z$, $\Im z$ と書いたが、最近はあまり使われなくなってきている[18]。)

余談 1.2 (実部・虚部を表す文字の習慣) z の実部・虚部は、それぞれ x, y で表す習慣であるが、w の実部・虚部は、それぞれ u, v で表し、ζ の実部・虚部は、それぞれ ξ, η で表す:

$$z=x+iy,\quad w=u+iv,\quad \zeta=\xi+i\eta.■$$

例 1.3 $z=1-2i$ のとき、$\operatorname{Re} z=1$, $\operatorname{Im} z=-2$. 次のようにも書ける。

$$\operatorname{Re}(1-2i)=1,\quad \operatorname{Im}(1-2i)=-2.■$$

加法の単位元は $0=0+0i$, 乗法の単位元は $1=1+0i$ である。

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。$z=x+iy\neq 0$ $(x,y\in\mathbb{R})$ に対して、(乗法に関する) 逆元を求めよう。w が z の逆元とは

$$zw=1$$

を満たすことをいう。$w=u+iv$ $(u,v\in\mathbb{R})$ とおくと、$(x+iy)(u+iv)=1$ は

$$\begin{cases} xu-yv=1 \\ xv+yu=0 \end{cases}$$

[17] すると、$0=0+0i$ は純虚数であり、かつ虚数ではない、ということになる (個人的には気持ちが悪く感じる)。$a=0$ かつ $b\neq 0$ の場合に純虚数と呼ぶ、とする流儀もあるが (最近の高校の数学 III の教科書ではそのように説明されているようだ)、実際には (役に立たないので？) 使われていないようだ。純虚数という言葉が使われる場合は、$b=0$ の場合も込めて (つまり $a=0$ が満たされるだけで) 純虚数と呼んでいるようである。例えば「実交代行列の固有値はすべて純虚数である。」という定理では、0 が純虚数であることを仮定している。

[18] 実は私 (桂田) は、そういうドイツ文字の読み書きが出来ません。私の少し上の学年から大学で教えなくなったようです。(脱線) そういうこともあって、最近の学生が英語の筆記体の読み書きで苦労していることについては、同情します。

という連立 1 次方程式と同値である。この方程式の解は

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

である。ゆえに z の逆元 w は一意的に存在して

$$w=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

である。

問 7. このことを確かめよ。

1 行でまとめておく。

$$x+iy\neq 0\quad (x,y\in\mathbb{R})\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

結局 $\mathbb{C}$ は可換体になる。$\mathbb{C}$ のことを**複素数体**と呼ぶ。

複素数 z, 整数 n に対して、z^n は実数と同じように[19] 定義する。

問 8. i^n $(n\in\mathbb{Z})$ を求めよ。

問 9. $(1+i)^{20}$ を求めよ。

1.2 $\mathbb{C}$ のちゃんとした定義

$\mathbb{C}$ を定義する方法には何通りかあるが、私のお勧めは **Hamilton の方法**である (体のいろは以外の予備知識が必要無く、明解である)。

Hamilton による $\mathbb{C}$ の定義 $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ については、数ベクトルの集合として既に加法を定義してあるが (それ以外にも、スカラー倍、内積、ノルムなどを定義してあるが)、そこに新たに次のように乗法を定義する。

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc). \tag{3}$$

命題 1.4 $\mathbb{R}^2$ は、加法

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

と、(3) で定まる乗法によって、可換体となる。加法の単位元は $(0,0)$, 乗法の単位元は $(1,0)$ で、$(x,y)\neq(0,0)$ の乗法に関する逆元 $(x,y)^{-1}$ は

$$(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

証明 可換体の公理が成り立つことを確認するだけ。■

---

[19] n が自然数ならば z^n は n 個の z の積。$z^0=1$ (0^0 を定義しないこともあるが、冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ など、z^0 を変数 z の関数と考えるときは、$z=0$ まで込めて $z^0=1$ とするのが普通), n が負の整数の場合は、$z\neq 0$ に対して $z^n=\dfrac{1}{z^{-n}}$.

問 10. このことを示せ。

注意 1.5 (体の公理, 順序体の公理) 加法と乗法が定義された集合 K が、**体** (**可換体**, field) をなすとは、以下の (1)〜(9) が成り立つことをいう (加法について可換群であり、零元を除いて乗法について可換群であり、分配法則を満たす)。

(1) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)+c = a+(b+c)$

(2) $(\exists 0_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$

(3) $(\forall a \in K)\ (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$

(4) $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$

(5) $(\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$

(6) $(\exists 1_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a 1_K = 1_K a = a$

(7) $(\forall a \in K \setminus \{0_K\})\ (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$

(8) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)c = ac + bc,\ a(b+c) = ab + ac$

(9) $(\forall a, b \in K) \quad ab = ba$

((2) が成り立つとき、0_K は一意的に定まることがすぐに分かる。(3) の 0_K はその 0_K のことを指す。これは 1_K についても同様である。$\mathbb{C}$ では加法の単位元 0_K は通常の 0 であり、乗法の単位元 1_K は通常の 1 である。)

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ も可換体である。$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ は可換体であるだけでなく、**順序体**の性質 (体であり、全順序集合であり、順序関係が体の加法・乗法と両立する) を持つ。すなわち

(1) $(\forall a, b \in K) \quad (a \le b \lor b \le a)$ (任意の 2 元は比較可能)

(2) $(\forall a, b \in K) \quad (a \le b \land b \le a \Rightarrow a = b)$

(3) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a \le b \land b \le c \Rightarrow a \le c)$

(4) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a \le b \Rightarrow a + c \le b + c)$

(5) $(\forall a, b \in K) \quad (0 \le a \land 0 \le b \Rightarrow 0 \le ab)$

が成り立つ。一方、$\mathbb{C}$ は順序体ではない。■

ふと手元にあった古い数学通信[20] をめくっていたら、飯高 [11] が目に入った。複素数の基礎的なことをしっかり学生に学んでもらおうという趣旨で、Hamilton による定義が紹介されていた。一読することをお勧めします (ネットでアクセス可能)。同じ意見の人を見つけると心強い (こちらは気が弱いので…)。

複素数を定義するための、それ以外のやり方についても簡単に紹介しておく。

[20] 日本数学会が会員に配っている季刊誌である。http://mathsoc.jp/publication/tushin/backnumber.html

行列を用いて定義　行列を知っていれば

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

の全体として $\mathbb{C}$ を定義することも出来る。1 と i に対応するのは、それぞれ

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、確かに $J^2 = -I$ が成り立つ。また $e^{i\theta}$ に対応するのは、回転を表す行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である。

多項式環の剰余環として定義　代数学を学んで、環とイデアルを知っていれば、次のように定義することも出来る。実係数多項式の全体のなす可換環 $\mathbb{R}[x]$ を、その極大イデアルである (x^2+1) で割って作った剰余環 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ として $\mathbb{C}$ を定義する。極大イデアルによる剰余環は可換体である、という基本的な定理があるので、$\mathbb{C}$ は可換体であることが分かる。このやり方は高等学校流の複素数の定義の厳密化と言えなくもないが、この項で紹介した 3 つのやり方のうち、一番準備が多く必要 (そのため難しめ) というのは皮肉である。しかし、環やイデアルについて学ぶ機会があれば、ぜひ思い出してみて欲しい。

余談 1.6 Hamilton (William Rowan Hamilton, 1805 年アイルランドの Dublin に生まれ、1865 年 Dublin にて没する) は、ハミルトンの**四元数体**(しげんすうたい) (the skew field of Hamilton quaternions) と呼ばれる非可換体

$$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

を発見した (1843 年)。ここで i, j, k は

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

を満たす数である (これから $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ が導かれる)。$\mathbb{H}$ の元を**四元数** (a quaternion(クォータニオン)) と呼ぶ。

$\mathbb{H}$ は、可換体の性質のうち (1)–(8) は満たすが、(9) は満たさないため、可換体ではなく、非可換体と呼ばれる。

$\mathbb{H}$ 係数の多項式については、これまでのような割り算が出来ず、因数定理は成り立たない。実際、$z^2 = -1$ の解が $\pm i$ 以外にも存在する ($z = \pm j, \pm k$))。

Gibbs や Heaviside によるベクトル解析に取って代わられるまで、四元数体は 3 次元力学にも良く利用されていた。今でも 3 次元空間の回転を表したりするために使われる。

四元数については、堀 [12], 今野 [13] が詳しい。

(すこし前にセガ「基礎線形代数講座」[14] というのも話題になったっけ。ゲームに使われるって Hamilton 先生どう感じるかな。)■

1.3 その他: 順序と距離

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は、体であるだけでなく、順序構造を持ってる。次の性質が基本的である。

(i) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a > b \Rightarrow a + c > b + c$

(ii) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a > b$ かつ $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

複素数に対しては、このような性質を持つ順序は定義できないことが知られている。

一方で、2数 z, w の距離 $d(z,w)$ を $d(z,w) = |z-w|$ と定義出来る。

四則	順序	距離
○ (可換体になる)	× (順序体にならない)	○ ($d(z,w) = \|z-w\|$)

表 1: 複素数体 $\mathbb{C}$ の成績表 (?)

このように距離を定めるとき、$\mathbb{C}$ は完備であることを後で証明する (これは要するに $\mathbb{R}^2$ の完備性と同じである)。2年春学期の科目「数学解析」で、$\mathbb{R}$ は可換体かつ順序体で、連続の公理を満たす、と説明したが、(完備性≒連続性であるから) $\mathbb{C}$ は順序体というところだけ満たさない、と覚えておくと良い。

1.4 複素平面

(これは授業では、$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ を書いて、平面の図を描いて、ぺらぺら、くらいか。あまり重々しく話さない方が良い。)

$\mathbb{R}$ を直線とみなせる (「数直線」) ように、$\mathbb{R}^2$ を平面とみなせる (「座標平面」) ことは中学校以来よく知っているはずである。

念のため復習: 平面上に、原点と呼ぶことにする一つの定点 O と、O を通り互いに直交する2つの座標軸 x 軸、y 軸を取り、単位の長さを決めると、$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ の各要素 (a,b) に対して、x 座標が a, y 座標が b である点を対応させることで、平面上の点と $\mathbb{R}^2$ の要素の一対一対応が得られる。このとき $\mathbb{R}^2$ を**座標平面**と呼ぶのであった。
(最初の「平面」の数学的定義は何か？と考えてみると、この議論自体が数学とは言えないことが分かる。数学的には、$\mathbb{R}^2$ そのものを平面と定義することになるだろう。)

$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ と $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ の間には、自然な全単射 $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x+yi) = (x,y)$ が存在するので、$\mathbb{C}$ も平面とみなすことが出来る。
このとき $\mathbb{C}$ を**複素平面** (複素数平面, the complex plane) あるいは**ガウス平面** (the Gauss plane), **アルガン平面** (the Argand plane, 特に特定の複素数を図示したものは an Argand diagram) と呼ぶ。
$\mathbb{R}^2$ の場合に x 軸, y 軸と呼んだ軸を、**実軸** (the real axis), **虚軸** (the imaginary axis) と呼ぶ。

余談 1.7 (複素平面 vs. 複素数平面) 平成になって、日本の高校の数学の教科書では、「複素平面」でなく「複素数平面」という語を使うことになっている。
一松 [15] は、「複素数平面という」とした上で

> 普通「複素平面」というが、この語は、2つの複素数 ξ, η の対で表現される (実4次元の) 空間の意味にも使われる．この立場でいえば、複素数平面は1次元の「複素直線」である．区別するためにこの本では「複素数平面」ということにする．

と脚注をつけている。
ドイツ語では “Komplexe Ebene”, “Komplexe Zahlenebene”, “Gaußsche Ebene”, “Gaußsche Zahlenebene” など色々使うそうであるが (Zahl は「数」を表すドイツ語です)、英語では “complex

plane” と “complex number plane” の出現率は、圧倒的に前者が高い (試しに Google で調べたら 100 対 1 くらいだった)。そのせいか日本の大学の数学のテキストでは「複素平面」を使うものが多い。時間が経つと変わっていくのだろうか。
(2024/9 追記) 金子 [16] の p. 3 の脚注に、学習指導要領の改訂にまつわる噂話が載っている。物好きな人は読んでみましょう。■

1.5 平方根

$c \in \mathbb{C}$ に対して、$z^2 = c$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ を c の**平方根** (a square root of c) と呼ぶ。

次の定理に示すように、任意の複素数 c に対して、c の平方根が存在し、(中学校で習った) 非負実数の $\sqrt{}$ を用いて表すことが出来る。

命題 1.8 (複素数の平方根) 任意の複素数は平方根を持つ。すなわち任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して、$z^2 = c$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ が存在する。$c = 0$ の場合はただ一つ $z = 0$ のみ、$c \neq 0$ の場合はちょうど二つあり、それらは互いに他の -1 倍である。実際 $c = \alpha + \beta i$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$z = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} + \frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\, i\right) & (\beta \neq 0) \\ \pm\sqrt{\alpha} & (\beta = 0 \text{ かつ } \alpha \geq 0) \\ \pm\sqrt{-\alpha}\, i & (\beta = 0 \text{ かつ } \alpha < 0). \end{cases} \tag{4}$$

(4) の右辺に現れる $\sqrt{}$ の中身 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \pm \alpha$ は非負実数であることを注意しておこう。
証明 (大まかな方針のみ) $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = c$ は $(x + yi)^2 = \alpha + \beta i$. この両辺の実部虚部を比較して連立方程式

$$x^2 - y^2 = \alpha, \quad 2xy = \beta \tag{5}$$

を導き、それを解けば良い。■
「実際」以降の式 (4) を覚える必要は無い。平方根を計算する必要が生じたら、その都度 $(x + yi)^2 = \alpha + \beta i$ を解くことを勧める。

例 1.9 $z^2 = 1 + i$ を満たす複素数 z を求めよ。
(解) $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 + i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = 1.$$

$2xy = 1$ より、$y = \dfrac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

ゆえに

$$x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

これから

$$y=\frac{1}{2x}=\pm\frac{2}{2\sqrt{2\sqrt{2}+2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}=\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}.$$

ただし x, y を表す式の複号はすべて同順である。ゆえに

$$z=x+yi=\pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2}+\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i\right).\blacksquare$$

余談 1.10 (複号同順・複号任意) 「複号同順」，「複号任意」という言葉がある。

$$(a\pm b)(c\pm d)\quad(\text{複号任意})$$

は

$$(a+b)(c+d),(a-b)(c+d),(a+c)(c-d),(a-b)(c-d)$$

の 4 つを意味していて、

$$(a\pm b)(c\mp d)\quad(\text{複号同順})$$

は

$$(a+b)(c-d),(a-b)(c+d)$$

の 2 つを意味するとか、そういうやつである。この言葉は、高校で数学を勉強しているときに覚えた。けれど、教科書に載っていたかどうか。こういうのって英語でもあるのか？というのが気になってネットで検索すると、複号同順は、double sign in same order とか double sign correspond という、という説明が出て来たりするけれど、実例が 400 件を切っているし、使っている人に日本人が多い。うーん、ちょっと怪しい。

数学の英語表現については、学生時代から

> 小松 勇作 編集, 東京理科大学数学教育研究所 増補版編集, 数学英和・和英辞典, 共立出版 (1979/7/16, 増補版 2016/2/25) [17], https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/Viewer/Id/3000033529

のお世話になっているけれど、それには「複号同順」は載っていない。

(ネットでは、double sign correspond は複号任意だとか言う人までいたりして、「えーっっ(なんでそうなるんだろう？？？)」となったり。それと宿題とかテストで、「複合」とか「復号」と書く人も多い。複数の符号だから、「複号」だろう。) ■

問 11. (5) を解け。($\sqrt{\beta^2}=|\beta|$ であることに注意しよう。)

問 12. -1 の平方根を求めよ。

問 13. i の平方根を求めよ。

中学校数学の復習 (重要) 実数の平方根については、中学校で次のことを学んだ[21]。$c\in\mathbb{R}$ に対して $x^2=c$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ が存在するためには、$c\geq 0$ であることが必要十分であり、そのとき $x\geq 0$ を満たす x (非負の平方根) はただ 1 つで、それを $\sqrt{c}$ と表すと約束する。$c=0$ であれば、c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c}=0$. $c>0$ であれば、$\sqrt{c}>0$ であり、c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ の 2 つ. 任意の $c_1,c_2\geq 0$ に対して

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}=\sqrt{c_1c_2}$$

が成り立つ。

問 14. $c_1,c_2\geq 0$ とするとき、$\sqrt{c_1c_2}=\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}$ が成り立つことを示せ。

[21] こんなに数学的な書き方はしないですけどね (笑)。

高校数学の復習　高校で、負の実数 c に対して、$\sqrt{c} := \sqrt{-c}\,i$ と定義したが (例えば $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$)、この講義では、この定義は採用しないことにする[22]。

中学校で学んだ $\sqrt{\text{非負実数}}$ という記号は使い続けるが、
高校で学んだ $\sqrt{\text{負数}}$ という記号は断りなしに使わない。

問 15. 負の実数 c に対して、$\sqrt{c}$ を $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ で定義した場合、$\sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{c_1}\sqrt{c_2}$ が成り立たない場合があることを示せ。

複素関数論では…　$c \geq 0$ の場合は、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ という記号は、これまで通り (中学校数学以来の) c の非負の平方根を表すのが普通である[23]。

c が一般の複素数 (0 以上の実数でない複素数) の場合には、$\sqrt{c}$ の定義は、そのときに扱っている問題に応じて決めるのが普通である。言い換えると、一般的な定義はしない[24]。その理由としては、例えば次のことがあげられる。c の 2 つある平方根のうち、一方をうまいルールで選んで、それを $\sqrt{c}$ と表すことにして、

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$$

がつねに成立するようには出来ない (残念ながら)。

$c \geq 0$ でない場合に $\sqrt{c}$ という記号が出て来たら、どういう意味か、注意しなくてはならない。色々な場合がある。

(a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の一つを (何かのルールをそのとき決めて) 表す

(b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない)

(c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す

例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}i$ かもしれないし、$-\sqrt{3}i$ かもしれないし、$\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。注意が必要である。

系 1.11 (平方根の 1 つが分かれば、平方根全部が分かる。) 複素数 c, ζ に対して、ζ が c の複素数ならば、c の平方根は $\pm\zeta$ である。

$$\zeta^2 = c \Rightarrow \left[(\forall z \in \mathbb{C})(z^2 = c \Leftrightarrow z = \pm\zeta)\right].$$

証明　$c = 0$ ならば、c の平方根は 0 だけなので、$\zeta = 0$ であり、$\pm\zeta = 0$ は確かに c の平方根のすべてである。

$c \neq 0$ ならば、c の平方根は 2 つある。そして、そのうちの 1 つが ζ であり、もう 1 つの平方根は $-\zeta$ である。ゆえに $\pm\zeta$ は c の平方根のすべてである。■

c の平方根が $\pm\zeta$ であるとは、集合の記号を使えば

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = c\right\} = \{\zeta, -\zeta\}$$

のように書ける。

余談になるが、方程式の解という言葉は、きちんと説明するのが意外と難しい。数理リテラシーの講義ノートを紹介しておく。

---

[22] この辺は、趣味の問題とも言えて、「$\sqrt{-1}$ を i と表す」のようなことを気軽に書く先生もいる。

[23] 「普通」というのは、つねにそうだとは限らないが、大抵の場合 (特に断りのない場合はほとんど) はそうだ、という意味である。

[24] プログラミング言語の場合は、そうも言っていられないので、$\sqrt{z} := \sqrt{|z|}e^{i\,\mathrm{Arg}\,z/2}$ と定めることが多いようであるが、それは数学書とは別の話である。

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/set.pdf#page=8
例 3.16

2 次方程式の根の公式では、$\sqrt{\ }$ は、$\pm$ を伴って $\pm\sqrt{\ }$ という形で現れるので、どの定義を採用しても同じ内容を表す、と言って構わないであろう。

系 1.12 (複素係数の 2 次方程式の根) 複素係数の 2 次方程式 $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0)$ は、複素数の範囲で 2 つの根を持つ。それらは

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2-4ac}$ は b^2-4ac の平方根の任意の 1 つを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表すことになる)。
$D:=b^2-4ac$ とするとき、$D\neq 0$ なら 2 つ, $D=0$ ならば 1 つ (重根)。

証明 実係数の 2 次方程式と同様に

$$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

$\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ であるから、$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ は $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ の平方根である。系 1.11 から

$$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Leftrightarrow z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\blacksquare$$

上の証明は簡単であるが、自分で系 1.12 を証明してみなさい、というと

$$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

とした後、最後の数が $=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となると書いたとき、「なぜですか？」というツッコミにフリーズする人が多い。確かに

$$\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{と}\quad\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

のどちらかであるが、a, b, c が実数と限らない場合に、どちらであるかを言うのは意外と面倒である。

別証明 $\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ に注意する。平方完成を行うと

$$\begin{aligned}az^2+bz+c&=a\left[\left(x+\frac{2b}{a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\&=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]\\&=a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).\end{aligned}$$

ゆえに $az^2+bz+c=0\Leftrightarrow z=\dfrac{-2b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ■

注意　この証明は高校生のときに (実係数の場合に) 教わったものだが、複素数の場合にそのまま通用する。「$az^2 + bz + cz = 0$ の解が α, β ならば、$az^2 + bx + c = a(z - \alpha)(z - \beta)$.」の証明にもなっている。

1.6　共役複素数

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、$x - yi$ を z の**共役(きょうやく)複素数** (the complex conjugate of z) と呼び、$\overline{z}$ で表す。

余談 1.13 (「役」は実は当て字)　「共役」は元々は「共軛」と書いた。「軛 (くびき) を共にする」という意味であるとか (「くびきとは、牛、馬などの大型家畜を犂や馬車、牛車、かじ棒に繋ぐ際に用いる木製の棒状器具である — ウィキペディア)。「軛」が当用漢字に入らなかったため、「共軛」を「共役」で代用することになったそうである。■

任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、以下が成立する。
共役複素数の共役複素数は元の複素数である。

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

2 つの複素数の和、差、積、商の共役複素数は、それぞれ共役複素数の和、差、積、商である。

$$\begin{aligned}
\overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w}, \\
\overline{z - w} &= \overline{z} - \overline{w}, \\
\overline{zw} &= \overline{z}\,\overline{w}, \\
\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \overline{z/w} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.
\end{aligned}$$

問 16. これらを確かめよ。

$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とするとき、$\overline{z} = x - iy$ であるから

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}. \tag{6}$$

言い換えると

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}. \tag{7}$$

これから例えば

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad (\overline{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}).$$

(6) より、x と y を使って表せるものは、z と $\overline{z}$ を使えば表せることが分かる。

問 17. 複素平面内の任意の直線は、ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \gamma \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a\overline{z} + \overline{a}z + \gamma = 0$$

と表せることを示せ。(後の問 19 も見てみること。)

余談 1.14 1つの複素数の変数 z についての方程式は、有限集合や空集合になることが多い (1次方程式 $az+b=0$, 2次方程式 $az^2+bz+c=0$ を思い出してみよう)。z の実部・虚部 x, y で書き換えて考えても、(実部と虚部で) 2つの方程式 (連立方程式) になるから、2曲線の共有点を求める問題になって、という解釈ができる。複素数についての方程式が直線 (無限集合) を表すのはなぜだろう？

問 17 の方程式は

$$\mathrm{Re}(2\overline{a}z+\gamma)=0$$

と書ける。一見して複素数についての方程式であるが、実質的に実数 x, y についての1つの方程式である、と言えるだろう。 ■

1.6.1 実係数多項式の根

次の命題は $n=2$ の場合は、実係数2次方程式の根の公式から明らかであるが、$n=3$ のときは高校数学で時々出題される問題である[25]。「$ax^3+bx^2+cx+d=0$ (a,b,c,d は実数) が $x=\alpha+i\beta$ (α,β は実数) を解に持てば、$x=\alpha-i\beta$ も解であることを示せ。」とか。

命題 1.15 $n\in\mathbb{N}$, $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\in\mathbb{R}[z]$, $c\in\mathbb{C}$, $f(c)=0$ とするとき、$f(\overline{c})=0$. すなわち「実係数多項式がある複素数を根とするとき、その共役複素数も根である」。

証明 a_j が実数であるから、$\overline{a_j}=a_j$ であることに注意する。任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
\overline{f(z)}&=\overline{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\\
&=\overline{a_0z^n}+\overline{a_1z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}z}+\overline{a_n}\\
&=\overline{a_0}\ \overline{z}^n+\overline{a_1}\ \overline{z}^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\ \overline{z}+\overline{a_n}\\
&=a_0\overline{z}^n+a_1\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n\\
&=f\left(\overline{z}\right)
\end{aligned}$$

であるから、$\overline{f(c)}=f(\overline{c})$. ゆえに $f(c)=0$ ならば $f\left(\overline{c}\right)=\overline{f(c)}=\overline{0}=0$ である。 ■

実係数多項式の代わりに実係数有理式 $f(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z),Q(z)\in\mathbb{R}[z]$) でも、$\overline{f(z)}=f\left(\overline{z}\right)$ が成り立つ。

問 18. 上の命題は重複度まで考慮して成り立つ。つまり、c が $f(z)$ の m 重根ならば、$\overline{c}$ も $f(z)$ の m 重根である。このことを証明せよ。(c が $f(z)$ の m 重根であるということをどうやって式で表すか、という問題である。高校生のときに見たことはあるはずで、それを思い出せれば解決するはず。)

1.7 絶対値

複素数の絶対値を導入しよう。

$z=x+iy$ ($x,y\in\mathbb{R}$) に対して、z の**絶対値** (the absolute value of z, the modulus of z, the magnitute of z) $|z|$ を

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$$

で定める。これは $\mathbb{R}^2$ の要素 (x,y) の長さ (ノルム) である。

[25] まったくの余談になるけれど、教育実習生になったとき、1年生相手に2次方程式でその話をしようとして、資料を作ってから、「なんだ、解の公式から明らかじゃないか」と気づいて、没にしたことがある。

次はすぐ分かる (複素平面上の図も描いてみると良い)。

$$|-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z|.$$

なお

$$z\overline{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際 $z\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

余談 1.16 英語の文章を自分で書くときに、「絶対値」が必要になったら、“absolute value” を使うのが良い。後で出て来る “the maximum modulus principle” のように、modulus を用いた用語があるので、modulus が絶対値を表すことも覚えておくのが良い。

magnitude という言葉は地震で有名だが、「大きさ」とでも訳すべき単語である。数についてこの言葉が使われる場合は、絶対値を意味する。関数論のテキストでは稀 (というか、実は見たことがない) であるが…余談の余談になるが、シミュレーション・ソフトの MATLAB の日本語マニュアルでは、複素数について (絶対値を意味する) magnitude を無視するというトンデモ訳 (結果として意味の分からない説明になってしまっている) が複数箇所あった。■

余談 1.17 $z\overline{z} = |z|^2$ から、$z \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. 既に直接計算で導いてあることだが、「逆数 $\dfrac{1}{z}$ を求めるには、分母分子に $\overline{z}$ をかけるのか、なるほど」と納得出来るところがある。■

問 19. 複素平面内の任意の円は、ある $c \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta < |c|^2$ を用いて

$$z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + \beta = 0$$

と表せることを示せ。

命題 1.18 複素数の絶対値に対して次が成り立つ。

(i) $|z| \geq 0$. 等号 $\Leftrightarrow z = 0$.

(ii) $|z+w| \leq |z| + |w|$. (**三角不等式**, **凸不等式**などと呼ばれる。)

(iii) $|zw| = |z|\ |w|$. (系として $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.)

証明 $a + bi \in \mathbb{C}$ の絶対値は、$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ の長さ (ノルム) であることから、(i) と (ii) は改めて証明する必要がない。

(iii) を示す。$z = a + ib$, $w = c + id$ とするとき、$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ であるから

$$\begin{aligned}
|zw| &= |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
&= |z|\,|w|.
\end{aligned}$$

(別証明) 共役複素数の性質 $z\overline{z} = |z|^2$ を示しておいたので

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2 |w|^2 = (|z|\,|w|)^2.$$

この両辺の $\sqrt{}$ を取って $|zw| = |z|\,|w|$. ■

1.8 複素指数関数の (前倒し) 導入

$z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ に対して

$$e^z=\exp z:=e^x\left(\cos y+i\sin y\right) \tag{8}$$

とおいて複素指数関数 $\exp\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を定義する。(後で冪級数を用いて定義し直すが、その場合に定理として得られる式 (8) を、ここでは定義とみなして議論する。)

(8) の右辺の e^x は、実関数としての指数関数である。

z が実数の場合、すなわち $y=0$ $(z=x)$ の場合は、$\cos y+i\sin y=1$ であるから、$e^z=e^x$. つまり複素指数関数は実指数関数の拡張になっている。

指数法則

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2} \tag{9}$$

が成立する。実際、$z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ と置くと

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2}&=e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\right)\\
&=e^{x_1}e^{x_2}\left[\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+i\left(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2\right)\right]\\
&=e^{x_1}e^{x_2}\left(\cos y_1+i\sin y_1\right)\left(\cos y_2+i\sin y_2\right)\\
&=e^{z_1}e^{z_2}.
\end{aligned}$$

$e^{-z}e^z=e^{-z+z}=e^0=1$ であるから

$$e^z\neq 0,\quad e^{-z}=\frac{1}{e^z}. \tag{10}$$

z が純虚数の場合を考えよう。$z=i\theta$ $(\theta\in\mathbb{R})$ のとき

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \tag{11}$$

これは有名な **Euler の公式**である。特に

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i,\quad e^{2\pi i}=1\quad (\text{図を描こう}). \tag{12}$$

また

$$\cos\theta=\operatorname{Re}e^{i\theta},\quad \sin\theta=\operatorname{Im}e^{i\theta}. \tag{13}$$

さらに

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

であるから

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \tag{14}$$

次の条件は図を描いて、その図と一緒に覚えておくと良い。

$$\left|e^{i\theta}\right|=1,\quad \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}. \tag{15}$$

複素指数関数の絶対値については、$|e^z|=|e^x|\cdot|\cos y+i\sin y|=e^x\sqrt{\cos^2 y+\sin^2 y}=e^x$ であるから

$$|e^z|=e^{\operatorname{Re}z}. \tag{16}$$

実関数の場合の指数法則 $a^{xy}=(a^x)^y$ の複素指数関数への拡張については後述するが、特別な場合として

$$e^{nz}=(e^z)^n \quad (n\in\mathbb{Z},\ z\in\mathbb{C})$$

が成り立つ。$n\in\mathbb{N}$ の場合は

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n}=e^{z_1}e^{z_2}\cdots e^{z_n}$$

から証明できるが、(10) を用いると、$n\in\mathbb{Z}$ の場合も成り立つことが分かる。

注意 1.19 ($(e^z)^n$ の n を整数に限る理由) 実関数のときは、$(e^x)^y=e^{xy}$ (あるいはもっと一般に a を正の数として $(a^x)^y=a^{xy}$) という指数法則も使ったが、複素関数に対しては、複素数の冪乗をまだ定義していないこともあって (それは §§4.2 で定義する)、そういう公式を考えることが出来ない。後で分かるように、複素数の冪乗は複数の値を持つ (多価という) 場合があり、気軽に安心して使えるのは整数乗の場合だけである。その場合の公式を証明することは現時点でも可能なのでやってみた、ということである。) ■

余談 1.20 (e^z は e の z 乗ではない？) 高校では、$a>0$, $x\in\mathbb{R}$ に対して、“a の x 乗” a^x が定義され、その特別な場合として、e^x が扱われた。ここでは、一般の a に対して a^z を定義するのではなく、e^z を定義した。式の形から、「e の z 乗」と読みたくなり、実際にそう読む人も多いが、一般に「○の□乗」が定義されたわけではないので、そう読むのは適切ではない、という意見がある。

§§4.2 で、0 でない複素数 a、複素数 b に対して、a^b を定義するが、それは普通は多価であり、$a=e$, $b=z$ の場合に、a^b はここの e^z (これはつねに一価) と同じものではない。 ■

問 20. (確認用の軽い問題) $e^{nz}=(e^n)^z$ $(n\in\mathbb{Z},\ z\in\mathbb{C})$ は成り立つか？

$\theta\in\mathbb{R}$ のとき、$z=i\theta$ として次式が得られる。

$$e^{in\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^n.$$

言い換えると

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n. \tag{17}$$

これは有名な **de Moivre の公式**である。

問 21. 任意の複素数 z に対して、以下の (1)〜(4) が成り立つことを示せ。

(1) $e^z\neq 0$, $\dfrac{1}{e^z}=e^{-z}$ (2) 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して、$(e^z)^n=e^{nz}$ (3) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$ (4) $|e^z|=e^{\mathrm{Re}\,z}$

問 22. 次のことを示せ。

(1) 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して、$e^z=1 \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})\ z=2k\pi i$.

(2) 任意の $z,w\in\mathbb{C}$ に対して、$e^z=e^w \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})\ w=z+2k\pi i$.

問 23. $\theta=0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$ のときに $e^{i\theta}$ の値を求めよ。

問 24. 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

が成り立つことを確認せよ。

例 1.21 $\cos 5\theta, \sin 5\theta$ を、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の多項式として表せ (表し方は一通りでないが、どれか 1 つ見つければ良い)。
(解答)

$$\begin{aligned}
&\cos 5\theta + i\sin 5\theta = e^{i5\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\
&\quad = \cos^5\theta + 5\cos^4\theta\cdot i\sin\theta + 10\cos^3\theta\cdot i^2\sin^2\theta + 10\cos^2\theta\cdot i^3\sin^3\theta + 5\cos\theta\cdot i^4\sin^4\theta + i^5\sin^5\theta \\
&\quad = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\left(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta, \\
\sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta. \blacksquare
\end{aligned}$$

問 25. $\cos 3\theta, \sin 3\theta$ を $\cos\theta, \sin\theta$ の多項式の形に表せ。

例 1.22 $\cos^5\theta$ を $\cos k\theta, \sin k\theta$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ だけを使って表せ (上の例の逆のようなことをしてみよう)。
(解答)

$$\begin{aligned}
\cos^5\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{5i\theta} + 5e^{4i\theta}e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta}e^{-2i\theta} + 10e^{2i\theta}e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta}e^{-4i\theta} + e^{-5i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(2\cos 5\theta + 2\cdot 5\cos 3\theta + 2\cdot 10\cos\theta\right) = \frac{1}{16}\left(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

($\cos^5\theta$ の Fourier 級数展開を求めたことになっている。) $\blacksquare$

実はより一般に、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ (後述する)。

1.9 極形式

複素数の極形式について説明しよう。(一言で説明すると) 複素数を (複素平面での) 極座標を用いて表示した式である。

まず 2 次元極座標について復習しよう。任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta), \quad r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R} \tag{18}$$

を満たす r, θ が存在する。

r は (x,y) と原点との距離 $\sqrt{x^2+y^2}$ であり、θ は x 軸の正の部分から反時計回りに測った角度である。θ は 1 つには定まらないが、$(x,y)\neq(0,0)$ の場合は、2π の整数倍の差を除いて定まる。すなわち

$$(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)=(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2) \quad\Leftrightarrow\quad (r_1=r_2\wedge(\exists k\in\mathbb{Z})\ \theta_1-\theta_2=2k\pi).$$

以上を複素数について言い換えると、次のようになる。任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して

(19) $$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right),\quad r\geq 0,\quad \theta\in\mathbb{R}$$

を満たす r, θ が存在する。複素指数関数を用いると

(20) $$z=re^{i\theta},\quad r\geq 0,\quad \theta\in\mathbb{R}$$

とも書ける。

r は z と原点との距離 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ であり、θ は実軸の正の部分から測った角度である。θ は1つに定まらないが、$z\neq 0$ の場合は、2π の整数倍の差を除いて定まる。

θ のことを z の**偏角** (an argument of z) と呼び、$\arg z$ と表す。

(「偏角の定義は？」と訊かれたら、「θ が z の偏角であるとは、$z=re^{i\theta}$, $r=|z|$, $\theta\in\mathbb{R}$ を満たすことである」。)

(19) や (20) のように、z をその絶対値 r と偏角 θ を用いて表した式を、z の**極形式** (the polar form of z) と呼ぶ。

(要するに z の極形式とは、z を極座標で表した式のことであり、「極形式を求めなさい」という問題は、実質的には極座標を求めなさい、ということである。)

θ の含まれる範囲を、$0\leq\theta<2\pi$ や $-\pi<\theta\leq\pi$ のように、幅が 2π の半開区間に限れば、θ は一意的に決定される。特に $-\pi<\theta\leq\pi$ の範囲で選んだ θ を、z の**偏角の主値**と呼び、$\operatorname{Arg} z$ で表す。

余談: Mathematica の `Arg[z]` で計算できるのは、主値 $\operatorname{Arg} z$ である。

例 1.23 $\operatorname{Arg}(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg}(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg}(-1+i)=\dfrac{3\pi}{4}$, $\operatorname{Arg}(-1-i)=-\dfrac{3\pi}{4}$. ■

例 1.24 $z=-1-i$ の極形式、$\operatorname{Arg} z$ を求めよ。

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

偏角 θ は

$$e^{i\theta}=\frac{z}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

を満たす数である。$[0,2\pi)$ で選ぶなら $\theta=\dfrac{5}{4}\pi$, $(-\pi,\pi]$ で選ぶなら $\theta=-\dfrac{3}{4}\pi$. (すべて必要ならば、$\dfrac{5\pi}{4}+2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ と書けるが、極形式は普通は1つあれば用が足せるので、すべて書く必要はない。)

これから極形式として

$$z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}},$$
$$z=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

が得られる (どちらも極形式であり、どちらを答えても正解である)。偏角の主値は $-\pi<\theta\leq\pi$ を満たす θ のことであるから

$$\operatorname{Arg} z=-\frac{3\pi}{4}.■$$

余談 1.25 (テストの採点をしてみると) (19) と (20) のどちらも極形式として認めるべきと思うけれど、教育的配慮からは (19) に限った方が良いかもしれない (その方が親切である)、という気がしている。次に紹介するような間違いが起こらない、と考えるから。

「$-1+\sqrt{3}i$ の極形式を求めよ」という問題に対して

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{角度が } \cos, \sin \text{ で違う！極形式ではない！})$$

とか、「$z = re^{i\theta}$ とするとき $\overline{z}$ の極形式を求めよ」に対して

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) \quad (\text{やはり正しい等式だが、極形式ではない！})$$

とか答える人が結構いて、「困ったなあ」と思うセンセイでした。■

問 26. $1+\sqrt{3}i$, i, -1 の極形式を求めよ。

問 27. $z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ と $\dfrac{1}{z}$ (ただし $z \neq 0$ とする) の極形式を求め、図示せよ。

1.10 複素数の演算の図示

和については、ベクトルの和と同様の "平行四辺形" ルールが成り立つ。すなわち 0, z_1, z_1+z_2, z_2 は複素平面上で平行四辺形をなす (図を準備すること)。

2 つの極形式の積は、簡単に極形式の形にまとめられる:

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

($r_1, r_2 \geq 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、$r_1 r_2 \geq 0$, $\theta_1+\theta_2 \in \mathbb{R}$ であることに注意。)

これから 2 つの複素数 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ の積について、次が成り立つことが分かる。

(a) z_1, z_2 の絶対値の積は $z_1 z_2$ の絶対値 ($|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$)

(b) z_1, z_2 の偏角の和は $z_1 z_2$ の偏角

1 つ細かい注意をしておく。(b) の事実を

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

と書きたくなるが (実際にそのように書いてあるテキストもあるが)、偏角 arg は 1 つの数として定まるわけではないので、正しいとは言えない。正当化するには、例えば 2π の整数倍だけ異なるものを同一視するという約束をする必要がある。合同式を知っていれば

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

と表現することが出来る。

問 28. 主値 Arg ならば、ただ 1 つの数として定まる。そこで

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

とするとハッキリ間違いである。そのことを確かめよ。

特に複素平面上の点 z を原点のまわりに θ 回転するには、z に $e^{i\theta}$ をかければよい。$z = x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると

$$ze^{i\theta} = (x+yi)(\cos\theta + i\sin\theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

である。行列を使った回転を知っている人は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

と見比べると良い。

90° $(=\frac{\pi}{2})$ 回転するには、$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ をかければ良いことが分かる。

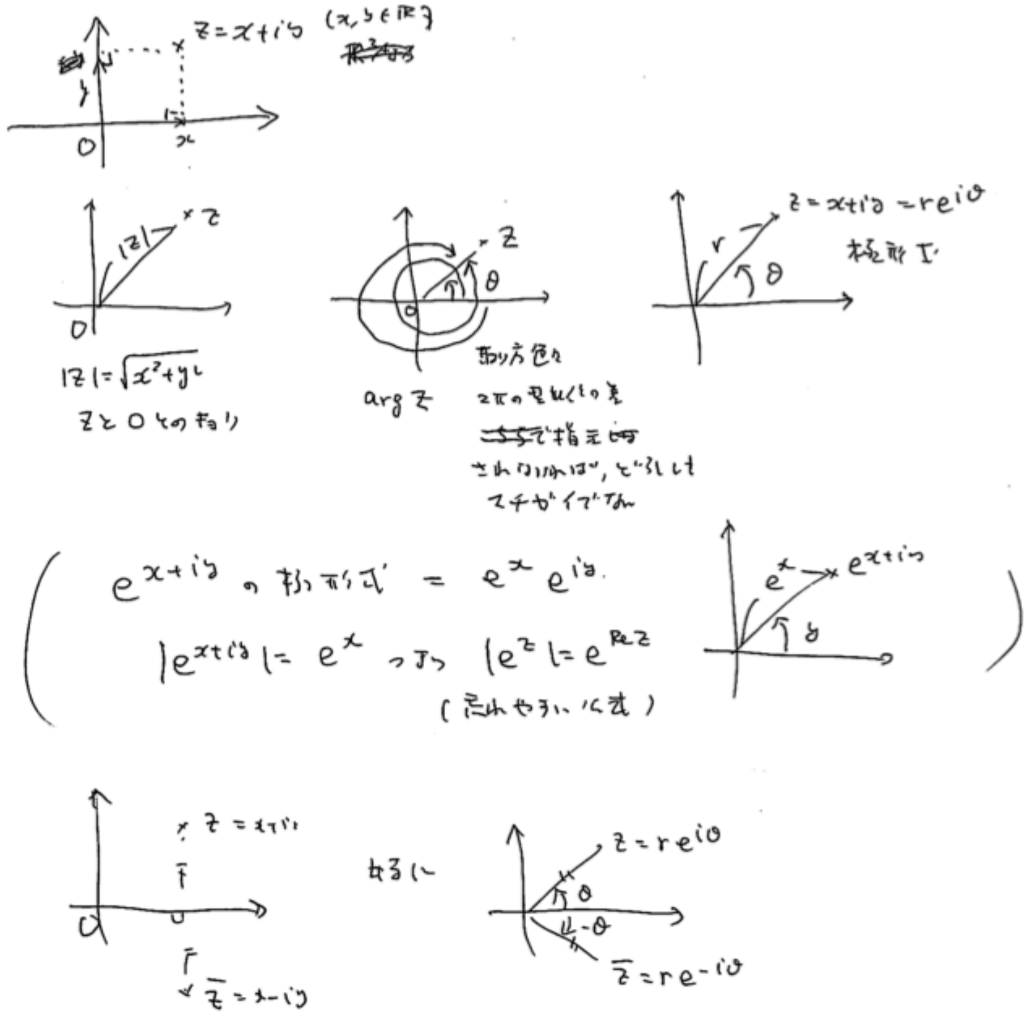


図 2: そのうち TikZ で描き直し

1.11 n 乗根

重要である。色々なところで顔を出す。きちんとマスターすべきで、計算間違いしてはいけない。

2 以上の自然数 n と、複素数 c に対して、$z^n = c$ を満たす複素数 z のことを c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$z^n = c$ という形の方程式を **2 項方程式** (binomial equation) という (名前を覚える必要はない)。

c の 2 乗根とは、c の平方根のことである。c の 3 乗根のことを c の**立方根**（りっぽうこん） (a cube root of c) とも呼ぶ。

複素数の n 乗根のうち、$n=2$ のとき (平方根) は、中学校で学んだ $\sqrt{}$ ($\sqrt{}$ の中身は非負実数) を用いて表すことが出来たが (命題 1.8)、$n \geq 3$ のときは、n が 2 の冪の場合 ($n=2^m$) を除いて、そのようなこと (実数の範囲の $\sqrt[n]{}$ を用いて表すこと) は出来ない (問 29, 30 を見よ)。

問 29. $c \in \mathbb{C}$ の 3 乗根を、$c=a+bi$, $z=x+yi$ $(a,b,x,y \in \mathbb{R})$ とおいて、連立方程式

$$(x+yi)^3 = a+bi$$

を解いて求めることが考えられる (平方根の求め方の真似である)。どうなるか考察せよ。

問 30. 一般に c の 4 乗根は c の平方根の平方根として求められる (なぜか？) ことを用いて、-1, i の 4 乗根をすべて求めよ。

しかし極形式を用いれば、任意の n に対して、n 乗根は次のように簡単に求められる。

命題 1.26 (0 でない複素数の n 乗根) n を 2 以上の自然数とする。$c=\rho e^{i\varphi}$ $(\rho>0, \theta \in \mathbb{R})$ の相異なる n 乗根は

$$\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)} \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

である (ちょうど n 個存在する)。それらは複素平面で原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である ($n \geq 3$ の場合、順に線分で結ぶと正 n 角形が描ける)。

($\sqrt[n]{\rho}$ は $r^n=\rho$, $r \geq 0$ を満たす数 r (一意的に存在する) を表す。)

証明 $z=re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^n=c$ は次と同値である。

$$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}.$$

両辺の絶対値を考えると $r^n=\rho$. ゆえに $r=\sqrt[n]{\rho}$. これを上の方程式に代入すると

$$e^{in\theta} = e^{i\varphi}.$$

これは次と同値である[26]。

$$n\theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}.$$

すなわち

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad n\theta - \varphi = k \cdot 2\pi.$$

ゆえに

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

ゆえに c の n 乗乗根は

$$\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

一見して無限個あるようだが、k が 1 増えるごとに偏角が $2\pi/n$ ずつ増加して、k が n 増えると元に戻るので、k に関して周期 n であることが分かる。ゆえに $k=0,1,\ldots,n-1$ だけ取ればすべてを尽くし、また重複もない。すなわち $z^n=c$ の解は

$$z = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad (k=0,1,\ldots,n-1). \blacksquare \tag{21}$$

$e^{i\frac{2\pi}{n}}$ は 1 の n 乗根であるが、これを ω で表す習慣がある。高校数学で、3 次方程式 $z^3=1$ の根 $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を ω と書くのも、その習慣に従ったものである。

[26] まだ極形式に慣れていないと、分かりにくいだろうか。そのときは、次のように考えてみよう。$\cos n\theta + i\sin n\theta = \cos\varphi + i\sin\varphi$ から、$\cos n\theta = \cos\varphi$ かつ $\sin n\theta = \sin\varphi$.

系 1.27 (1 の n 乗根) n を 2 以上の自然数とする。1 の相異なる n 乗根は

$$e^{i\frac{2\pi}{n}k} \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

である (ちょうど n 個存在する)。$\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと、ω^k $(k=0,1,\ldots,n-1)$ と表すことが出来る。

命題 1.26 の $c=\rho e^{i\varphi}$ の n 乗根は、$\sqrt[n]{\rho}e^{i\varphi/n}\omega^k$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ と書くことが出来る。

証明 命題 1.26 で、$\rho=1$, $\varphi=0$ とするだけである。■

例 1.28 2 以上の自然数 n に対して、$\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくとき

$$z^n-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$$

が成り立つ。■

例 1.29 (1, -1 の n 乗根) n が小さい場合に 1 の n 乗根、-1 の n 乗根を求めてみよう。

- $n=2$ のとき。$z^2=1$ の解は $e^{i\cdot k\frac{2\pi}{2}}=e^{ik\pi}$ $(k=0,1)$ であるから $e^0=1$, $e^{i\pi}=-1$. 実際

$$z^2-1=(z+1)(z-1).$$

  $z^2=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}$ $(k=0,1)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$. 実際

$$z^2+1=(z+i)(z-i).$$

- $n=3$ のとき。$z^3=1$ の解は $e^{i\cdot k\frac{2\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. 実際

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=(z-1)\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

  $z^3=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}}=-1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. 実際

$$z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$$

  で右辺の第 2 因数の根は $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

- $n=4$ のとき。$z^4=1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{4}}=e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k=0,1,2,3)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}=-i$. 実際

$$z^4-1=(z^2+1)(z^2-1)=(z+i)(z-i)(z+1)(z-1).$$

  $z^4=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

$$z^4+1=(z^2+i)(z^2-i).$$

  $z^2=-i$, $z^2=i$ を解けなくもないが

$$z^4+1=z^4+2z^2+1-2z^2=\left(z^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}z\right)^2=\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)$$

  とすれば、2 つの 2 次方程式の根として

$$\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}.$$

- $n=5$ のとき。$z^5=1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{}$ を使って表現可能である。

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

であるが

$$\begin{aligned} z^4+z^3+z^2+z+1=0 &\Leftrightarrow z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=0. \end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2+X-1=0$ で、これは

$$X=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

と解ける。

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

から

$$2z^2+(1-\sqrt{5})z+2=0 \quad \vee \quad 2z^2+(1+\sqrt{5})z+2=0.$$

これは次と同値である。

$$z=\frac{-(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

一方、$z^5=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{5}}$, $e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $e^{i\frac{5\pi}{5}}=-1$, $e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $e^{i\frac{9\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{}$ を使って表現可能である。

$$z^5+1=(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4-z^3+z^2-z+1=0 &\Leftrightarrow z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0. \end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2-X-1=0$ で、これは

$$X=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

と解ける。

$$z+\frac{1}{z}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z+\frac{1}{z}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

から

$$2z^2-(1+\sqrt{5})z+2=0 \quad \vee \quad 2z^2-(1-\sqrt{5})z+2=0.$$

これは次と同値である。

$$z=\frac{(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

- $n=6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。

- $n=7$ のとき。$z^7=1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ $(k=0,1,\cdots,6)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$, $e^{i\frac{6\pi}{7}}$, $e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $e^{i\frac{12\pi}{7}}$. $z^7=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{7}+k\frac{2\pi}{7}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ $(k=0,1,\cdots,6)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{7}}$, $e^{i\frac{3\pi}{7}}$, $e^{i\frac{5\pi}{7}}$, $e^{i\frac{7\pi}{7}}=-1$, $e^{i\frac{9\pi}{7}}$, $e^{i\frac{11\pi}{7}}$, $e^{i\frac{13\pi}{7}}$. これらは (1, -1 を除いて)、$\sqrt{}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。

- $n=8$ のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。■

問 31. 1, -1 の 6 乗根を求めよ。

問 32. 1, -1 の 8 乗根を求めよ。

注意 1.30 (一般の複素数の n 乗根と 1 の n 乗根) この項 (§1.11) の最初で、n が 2 の冪である場合を除いて、一般の複素数 c の n 乗根は実数の範囲の $\sqrt[n]{}$ を用いて表すことは出来ないと述べた。

しかし $c=1$ の場合はこのことは当てはまらず、実数の範囲の $\sqrt{}$ (つまり $\sqrt{\text{非負実数}}$) を用いて表すことが出来たりするわけである (詳しくは次の余談を見よ)。その辺を混同しないようにして欲しい。■

余談 1.31 (正 n 角形の定木とコンパスによる作図) 以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。Gauss は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、n が

$$n=2^k\times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (高木 [6], 栗原 [18])、$n=17=F_2$ のときに作図法を示した (つまり、正 17 角形は定木とコンパスで作図可能である[27]。作図可能な n を小さい方から示すと $n=3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20,\cdots$.

フェルマー素数とは、素数であるようなフェルマー数 $F_m=2^{2^m}+1$ のことである。$F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$ はいずれもフェルマー素数であるが、F_5 は素数でない ($F_5=4294967297=641\times 6700417$ と素因数分解出来る (従って素数ではない) ことを Euler が発見した)。■

余談 1.32 ($\sin 1°$, $\cos 1°$ を求めて) 高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos も求めたことがあるかもしれない。これらは $\sqrt{}$ を使って表現出来ている。半角の公式を使うと、18°, 15° の sin, cos を $\sqrt{}$ で表現できる。加法定理を使うと、$18°-15°=3°$ の sin, cos も求められる。

それでは 1° の sin, cos はどうだろう？もしこれが $\sqrt{}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して $n°$ の sin, cos も $\sqrt{}$ で表される。

この問題は、「角の三等分」と関係があり、結論を天下りに述べると、1° の sin, cos を $\sqrt{}$ で表すことは出来ない。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380–1429, ペルシャの数学者・天文学者) は、3 次方程式 $\sin 3°=3x-4x^3$ を数値的に解くことによって、$\sin 1°$ を求めた (カッツ [19])。■

[27] $\cos\dfrac{2\pi}{17}=\dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$ であるとか (小数で表すと、$0.93247222940435580457\cdots$)。

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

授業では、ここは簡単に済ませた方が良いであろう。$\mathbb{R}^2$ と同じである、とだけ言う。「数学解析」で学んだことは使うが、定義定理の意味が分かる程度の用語の復習はすると宣言する。

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$, $\boldsymbol{z} := (x, y)$ とおくと、$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$. 逆に $\boldsymbol{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、$z := x + iy$ とおくと、$z \in \mathbb{C}$ (つまり逆変換である). このとき

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\boldsymbol{z}|$$

である。これから、2 点間の距離についても対応していることが分かる。実際

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}),$$

$$\boldsymbol{z}_1 := (x_1, y_1), \quad \boldsymbol{z}_2 := (x_2, y_2)$$

とするとき

$$|z_1 - z_2| = |\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2|.$$

$\mathbb{C}$ 内の数列の極限や、$\mathbb{C}$ の部分集合を定義域とする関数の極限・連続性は、$\mathbb{C}$ における距離を基礎に定義されるので、$\mathbb{R}^2$ における定理の対応物が得られることになる。例えば Bolzano-Weierstrass の定理、Weierstrass の最大値定理などが $\mathbb{C}$ でも成り立つ。

$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**複素数列**であるとは、各自然数 n に対して、複素数 z_n が定まっていること、言い換えると $\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n \in \mathbb{C}$ が写像であることをいう。

複素数列 $\{z_n\}$ が複素数 c に収束するとは、

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - c| = 0$$

が成り立つことをいう。これは ε-N 論法で書けば、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |z_n - c| < \varepsilon$$

が成り立つことを意味する。

$\boldsymbol{z}_n$, $\boldsymbol{c}$ を

$$x_n := \operatorname{Re} z_n, \quad y_n := \operatorname{Im} z_n, \quad \boldsymbol{z}_n := (x_n, y_n), \quad a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \boldsymbol{c} := (a, b)$$

で定めるとき

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{c}| = 0$$

が成り立つことと同値であり

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

が成り立つこととも同値である。

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{c} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = b\right).$$

1.13 確認用の問題

問 33. $z = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ に対して、(1) $\dfrac{1}{z}$, (2) z の極形式, (3) z^6, (4) z の平方根, (5) $\operatorname{Log} z$ を求めよ。

(2) 以外は $a + bi$ あるいは a あるいは bi $(a, b \in \mathbb{R})$ いずれかの形に表せ。(p. 224)

2　複素関数とその極限、正則性

(図を描くべきところがいくつかある。)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を定義域とする、複素数値の関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ のことを**複素関数**と呼ぶ。

2.1　複素関数の実部・虚部

複素関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ (Ω は $\mathbb{C}$ の部分集合) が与えられたとき、しばしば

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$$

で定まる実関数 u, v を考えることがある。以下では簡単のため、u と v をそれぞれ f の実部、虚部と呼ぶことにする。

u, v の定義域は

$$\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+iy \in \Omega\right\}$$

である。すなわち $u, v\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ である。(Ω と $\widetilde{\Omega}$ は、平面図形としては "同じ" ものであると考えて良いだろう。あるいは $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を同一視したとき、$\Omega = \widetilde{\Omega}$.)

例 2.1 (1) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ の場合、$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ より $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

(2) $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ の場合、$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ より $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

(3) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. ($e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$) の場合、$f(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ より $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$. ■

問 34. 以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求めよ。

(1) $f(z) = z^3$ ($z \in \mathbb{C}$)　(2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$)　(3) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ ($z \in \mathbb{C}$)

(ヒントにならないが、(3) で実は $f(z) = \cos z$ であることが後で分かり、結果も重要である。)

2.2　よく使う記号・言葉

$c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して、c を中心とする半径 r の**開円盤** $D(c;r)$ を次式で定める:

$$D(c;r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して、Ω の**閉包** (the closure of Ω) $\overline{\Omega}$ を次式で定める:

$$\overline{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0)\ D(z;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{C}$ とするとき、Ω が $\mathbb{C}$ の**開集合** (an open subset of $\mathbb{C}$) であるとは

$$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0)\ D(z;\varepsilon) \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

$\mathbb{R}^n$ の場合に同じようなものがあった…

$a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ に対して、中心 a, 半径 r の開球は次式で定義された:

$$B(a;r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して、Ω の閉包は次式で定義された:

$$\overline{\Omega} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、次の条件が成り立つことをいう:

$$(\forall x \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset \Omega.$$

2.3 極限と連続性

(ここは簡単に流したい。スライド上映で済ませたいくらい。)

複素関数の収束 (極限)、連続性は実関数と同じように定義され、実は実部と虚部の収束、連続性と同値である。

定義 2.2 (複素関数の極限と連続性) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

(1) $c \in \overline{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。$z \to c$ のとき $f(z)$ が γ に収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z-c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $\displaystyle\lim_{z \to c} f(z) = \gamma$ と表す。

(2) $c \in \Omega$ とする。f が c で連続であるとは

$$\lim_{z \to c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。

(3) f が Ω で連続であるとは、Ω の任意の点 z で f が連続であることをいう。

u と v を組にしてベクトル値関数として考えると良い場合がある。以下しばらくそれを $\boldsymbol{f}$ と書く。$\boldsymbol{f} \colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ である。

$c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $\gamma = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とするとき

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u(\boldsymbol{z}) \\ v(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

であり

$$|z - c| = |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{c}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$
$$|f(z) - \gamma| = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{\gamma}| = \sqrt{\left(u(x,y) - \alpha\right)^2 + \left(v(x,y) - \beta\right)^2}$$

である。ゆえに

$$\lim_{z\to c} f(z)=\gamma \iff \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{\gamma} \iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y)=\alpha \quad \text{かつ} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y)=\beta.$$

これから

$$f \text{ が } c \text{ で連続} \quad\iff\quad \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で連続} \quad\iff\quad u \text{ と } v \text{ が } \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} \text{ で連続}.$$

さらに

$$f \text{ が } \Omega \text{ で連続} \quad\iff\quad \boldsymbol{f} \text{ が } \widetilde{\Omega} \text{ で連続} \quad\iff\quad u \text{ と } v \text{ が } \widetilde{\Omega} \text{ で連続}.$$

連続性だけだと、わざわざ複素関数を持ち出す理由がほとんどない、とも言える。

次の命題は、実関数のときと同様に証明することも出来るし、多変数ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ について成り立つ (「数学解析」で証明済み) ことからもすぐ得られる。

命題 2.3 (複素関数の和・差・積・商の極限) $\Omega\subset\mathbb{C}$, $c\in\overline{\Omega}$. $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $g\colon\Omega\to\mathbb{C}$ が $z\to c$ のとき極限を持つとき

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to c}\left(f(z)+g(z)\right)=\lim_{z\to c} f(z)+\lim_{z\to c} g(z),\\
&\lim_{z\to c}\left(f(z)-g(z)\right)=\lim_{z\to c} f(z)-\lim_{z\to c} g(z),\\
&\lim_{z\to c}\left(f(z)g(z)\right)=\lim_{z\to c} f(z)\cdot\lim_{z\to c} g(z),\\
&\lim_{z\to c}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim_{z\to c} f(z)}{\lim_{z\to c} g(z)} \quad \left(\text{ただし } \lim_{z\to c} g(z)\neq 0 \text{ とする}\right).
\end{aligned}$$

証明 (方針のみ) 数学解析の講義ノート (桂田 [20]) には、実関数の場合の命題 (命題 3.7) を書いてある。その ε-δ 論法を用いた証明と同様にして証明することも出来る。

一方、対応する実 2 変数関数を考え、多変数関数の極限に関する命題に帰着することも出来る。後者を積の場合に少し説明しておく。$f=u_1+iv_1$, $g=u_2+iv_2$, $fg=u_3+iv_3$ とするとき、$u_3=u_1u_2-v_1v_2$, $v_3=u_1v_2+v_1u_2$ であり、u_3, v_3 は u_1, u_2, v_1, v_2 から和・差・積を取って組み立てられていることに注意すれば良い。 ■

系 2.4 (複素連続関数の和・差・積・商の連続性) 連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし分母は 0 にならない点に限定して考える) は連続である。

多項式関数、有理関数の連続性についても実関数の場合と同様である。

任意の複素係数多項式 $p(z)$ に対して、$p(z)$ で定められる関数 $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=p(z)$ $(z\in\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 全体で連続である。実際、定数関数 $f_c(z)=c$, 恒等写像 $f_{\mathrm{id}}(z)=z$ が連続であることはすぐ分かるので、系 2.4 から、f の連続性は直ちに得られる。通常は f のことを単に p と書くことが多い。

問 35. f_c, f_{id} の連続性を ε-δ 論法により証明せよ。

$r(z)$ が複素係数有理式であるとき、つまり $r(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ となる $p(z),q(z)\in\mathbb{C}[z]$ が存在するとき

$$\Omega:=\{z\in\mathbb{C}\mid p(z)\neq 0\}$$

とおき、$f(z)=r(z)$ $(z\in\Omega)$ で定めた $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ を、$r(z)$ で定められる有理関数と呼ぶ。これは定義域 Ω 全体で連続である。実際、$p(z)$, $q(z)$ から定められる多項式関数 p, q は Ω で連続であり、$p(z)\neq 0$ $(z\in\Omega)$ であることから、$f=\dfrac{q}{p}$ が連続であることが分かる。

例 2.5 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は $\{z\in\mathbb{C}\mid z\neq 0\}$ で連続である。■

例 2.6 (指数関数 e^z の連続性) (少しギクシャクしている証明) 一般に「$\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続ならば、$\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto\varphi(x)\in\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto\varphi(y)\in\mathbb{R}$ も連続である。」が成り立つので、$f_1(x,y)=e^x$, $f_2(x,y)=\cos y$, $f_3(x,y)=\sin y$ とすると、f_1, f_2, $f_3\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は連続である。$f(z)=e^z$ の実部、虚部はそれぞれ f_1f_2, f_1f_3 であるから、f は $\mathbb{C}$ で連続である。

後で「収束冪級数は収束円の内部で微分可能」という定理を紹介する。それと

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad(z\in\mathbb{C})$$

を認めれば e^z が連続関数であることはすっきりと分かる。■

2.4 微分

定義 2.7 (微分可能, 正則) 簡単のため、Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c\in\Omega$ とする。f が c で**微分可能**であるとは、極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このときこの極限を $f'(c)$ と表し、f の c における**微分係数**と呼ぶこと、その他**導関数**などの言葉の使い方は実関数のときと同様に定義する。
Ω の任意の点 z に対して、f が z で微分可能であるとき、f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

余談 2.8 (「正則」という言葉)

- f が 1 点 c で正則という言い方をすることがある。これは、c を含むある開集合 U $(\subset\Omega)$ が存在して、$f|_U\colon U\to\mathbb{C}$ が正則である、と定義される。この講義ではこの言い方は使わない。

- 「正則」という語とほぼ同じ意味を持つ語として**解析的** (analytic) というのがある (これは元々は各点の近傍で収束する冪級数に展開できる、という意味であり、正則性と解析性が同値であることは、もっと後になってから証明できることである)。

- 元々は regular の訳語が正則、holomorphic の訳語が整型である (らしい)。正則と整型を比べると、正則を使うのが日本語のテキストとしては普通であるが (多分、先生方の中にも「整型、なにそれ？」という方がいらっしゃると想像する)、英語では holomorphic を使うのが普通である (regular を使う本は最近はあまり見かけない)。その点は注意を要する。■

例 2.9 $f(z)=\gamma$ (定数関数) とするとき、任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma-\gamma}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}0=0.$$

すなわち $f'(z)=0$. 特に f は $\mathbb{C}$ で正則である。

$f(z)=z$ するとき、任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)-z}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}1=1.$$

すなわち $f'(z)=1$. 特に f は $\mathbb{C}$ で正則である。■

問 36. $f(z)=z^2$ は $\mathbb{C}$ で正則かつ $f'(z)=2z$ であることを示せ。

命題 2.10 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$c\in\Omega$. $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ と $g\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は c で微分可能であるならば、$f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (ただし $g(c)\neq 0$ とする) も c で微分可能であり

$$\begin{aligned}(f+g)'(c)&=f'(c)+g'(c),\\ (f-g)'(c)&=f'(c)-g'(c),\\ (fg)'(c)&=f'(c)g(c)+f(c)g'(c),\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(c)&=\frac{g(c)f'(c)-g'(c)f(c)}{g(c)^2}.\end{aligned}$$

証明 実関数の場合と同様である。■

系 2.11 (1) 任意の自然数 k に対して、$f(z)=z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z)=kz^{k-1}$.

(2) 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right)'=\sum_{k=1}^{n}ka_kz^{k-1}=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)a_{j+1}z^j.$$

(3) 0 でない任意の複素係数有理式 $r(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ $(p(z),q(z)\in\mathbb{C}[z])$ の定める関数 $r\colon\Omega:=\{z\in\mathbb{C}\mid p(z)\neq 0\}\ni z\mapsto r(z)\in\mathbb{C}$ は正則である。

系の中に書いた

$$\sum_{k=1}^{n}ka_kz^{k-1}=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)a_{j+1}z^j$$

という式変形に慣れておくことが必要である。

問 37. 系 2.11 の (1) を証明せよ。

問 38. 合成関数の微分法を証明せよ。

問 39. 逆関数の微分法 (関数 f の逆関数 f^{-1} が存在し、f が c で、f^{-1} が $f(c)$ で微分可能ならば、$\left(f^{-1}\right)'(f(c))=\dfrac{1}{f'(c)}$ が成り立つ) を証明せよ。

2.5　Cauchy-Riemann の方程式

2.5.1　複素関数の微分可能の必要十分条件

定理 2.12 (複素関数が微分可能 ⇔ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式)
Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c = a + bi \in \Omega$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とする。f が c で微分可能であるためには、f の実部 u と虚部 v が (a, b) で微分可能でかつ

$$(☆)\qquad u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b)$$

を満たすことが必要十分である。

(☆) を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

この定理を証明する前に、その必要性の部分「f が正則ならば $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$」だけをすぐに導ける方法を紹介しよう。

f が $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a, b) で偏微分可能であり

$$(\sharp)\qquad f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b) = \frac{1}{i}\left(u_y(a,b) + iv_y(a,b)\right)$$

が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$.

(($\sharp$) を $f' = f_x = \dfrac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用気味であるが[28]、要点を簡潔にとらえているかもしれない。)

証明　f が c で微分可能とは

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することである。$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。

(a) $h = h_x$ $(h_x \in \mathbb{R})$ (実数の値だけを取る、すなわち $h_y = 0$)
$f(c + h_x) = u(a + h_x, b) + iv(a + h_x, b)$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{\substack{h_x \to 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \to 0} \frac{(u(a+h_x,b) + iv(a+h_x,b)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{h_x} \\
&= \lim_{h_x \to 0} \left(\frac{u(a+h_x,b) - u(a,b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x,b) - v(a,b)}{h_x} \right) \\
&= u_x(a,b) + iv_x(a,b).
\end{aligned}$$

(b) $h = ih_y$ $(h_y \in \mathbb{R})$ (純虚数の値だけを取る、すなわち $h_x = 0$)

[28] うるさく言うと、f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、f_x, f_y という書き方は変である。$F(x,y) := f(x+yi)$ とおいて、$f'(x+yi) = F_x(x,y) = \dfrac{1}{i} F_y(x,y)$ と書くべきだろう。

$f(c+ih_y) = u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{\substack{h_y \to 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+ih_y) - f(c)}{ih_y} = \frac{1}{i} \lim_{h_y \to 0} \frac{(u(a,b+h_y) + iv(a,b+h_y)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{h_y} \\
&= \frac{1}{i} \lim_{h_y \to 0} \left(\frac{u(a,b+h_y) - u(a,b)}{h_y} + i \frac{v(a,b+h_y) - v(a,b)}{h_y} \right) \\
&= \frac{1}{i} \left(u_y(a,b) + iv_y(a,b) \right).
\end{aligned}
$$

以上から

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= u_x(a,b) + iv_x(a,b) \\
&= \frac{1}{i} \left[u_y(a,b) + iv_y(a,b) \right] = v_y(a,b) - iu_y(a,b).
\end{aligned}
$$

実部・虚部を比較して

$$
u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad v_x(a,b) = -u_y(a,b). \blacksquare
$$

定理の証明　f が c で微分可能であるとは

$$
(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| = 0
$$

が成り立つことを意味する。

$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(p+iq)h = (p+iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y), \\
&f(c+h) - f(c) = u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) + i\left(v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b)\right)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| \\
&\quad = \frac{|f(c+h) - f(c) - (p+iq)h|}{|h|} \\
&\quad = \left| \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} + i \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right|.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad & \lim_{(h_x, h_y) \to (0,0)} \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0 \\
\text{かつ} \quad & \lim_{(h_x, h_y) \to (0,0)} \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad & u \text{ と } v \text{ は } (a,b) \text{ で微分可能で} \\
& u_x(a,b) = p, \quad u_y(a,b) = -q, \quad v_x(a,b) = q, \quad v_y(a,b) = p \\
\Leftrightarrow \quad & u \text{ と } v \text{ は } (a,b) \text{ で微分可能で} \\
& u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b). \blacksquare
\end{aligned}
$$

例 2.13 $f(z) = z^3$ $(z \in \mathbb{C})$ は多項式関数であるから、$\mathbb{C}$ 全体で正則である。$x, y \in \mathbb{R}$ とするとき

$$f(x+yi) = (x+yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3x \cdot (yi)^2 + (yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

であるから、f の実部 u, 虚部 v は

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

ゆえに

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy, \quad v_x = 6xy, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2.$$

確かに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。■

例 2.14 $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ は有理関数であるから、定義域 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全体で正則である。$x, y \in \mathbb{R}$ とするとき

$$f(x+yi) = \frac{1}{(x+yi)^2} = \frac{1}{x^2 - y^2 + 2xyi} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2+y^2)^2}.$$

ゆえに f の実部・虚部をそれぞれ u, v とするとき

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから

$$u_x = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad u_y = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad v_x = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad v_y = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

確かに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。■

例 2.15 $f(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ $(z \in \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。$x, y \in \mathbb{R}$ とするとき

$$\begin{aligned} f(x+yi) &= \frac{e^{x+yi} + e^{-(x+yi)}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos(-y) + i \sin(-y))\right) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + i \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y. \end{aligned}$$

ゆえに f の実部・虚部をそれぞれ u, v とするとき

$$u(x,y) = \cosh x \cos y, \quad v(x,y) = \sinh x \sin y$$

であるから

$$u_x = \sinh x \cos y, \quad u_y = -\cosh x \sin y, \quad v_x = \cosh x \sin y, \quad v_y = \sinh x \cos y.$$

確かに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。■

与えられた関数が正則でないことを確認するために、Cauchy-Riemann 方程式をチェックすることが有効な場合がある。

例 2.16 $f_1(z)=\operatorname{Re} z$, $f_2(z)=\operatorname{Im} z$, $f_3(z)=\overline{z}$, $f_4(z)=|z|$, $f_5(z)=\operatorname{Arg} z$ は、定義域に属する任意の点で微分可能ではない (特に正則ではない)。

最初の 3 つの関数 f_j ($j=1,2,3$) については、実部・虚部は $\mathbb{R}^2$ 全体で C^∞ 級なので微分可能であるが、$\mathbb{R}^2$ の任意の点で Cauchy-Riemann 方程式が成り立たないことが分かる。ゆえに任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して、f_j は z で微分可能ではない。

f_4 の実部・虚部を u, v とするとき、$u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y)=0$ である。u は $(0,0)$ では微分可能でないから、f_4 も 0 では微分可能でない。一方、$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で u, v は微分可能であり

$$u_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad u_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad v_x=v_y=0.$$

$(x,y)\neq(0,0)$ に注意すると、Cauchy-Riemann 方程式が満たされないことが分かる。ゆえに $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の任意の点 z に対して、f_4 は z で微分可能でない。結局、f は $\mathbb{C}$ の任意の点で微分不可能である。

同様にして、$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の任意の点で f_5 が微分可能でないことが分かる。■

正則ではないが、微分できる例外点が存在する、というケースもある。

例 2.17 $f(z)=(\overline{z})^2$ ($z\in\mathbb{C}$) の微分可能性について調べよう。$x,y\in\mathbb{R}$ とするとき

$$f(x+yi)=\left(\overline{x+iy}\right)^2=(x-yi)^2=x^2-2xyi+(yi)^2=x^2-y^2-2xy.$$

ゆえに f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y)=x^2-y^2,\quad v(x,y)=-2xy.$$

これらは多項式関数であるから C^∞ 級である。そして

$$u_x=2x,\quad u_y=-2y,\quad v_x=-2y,\quad v_y=-2x.$$

f が微分可能であるためには、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ を満たすことが必要十分である。これは

$$2x=-2x,\quad -2y=2y$$

であり、解は $x=y=0$. ゆえに f は 0 で微分可能であるが、それ以外の点では微分可能ではない。

細かい注意になるけれど: 「正則」という言葉は、開集合 (多くの場合定義域) 上の任意の点で微分可能である場合に、その開集合で正則である、というように使う言葉であるので、この f は正則ではない。■

問 40.

(1) $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=|z|^2$ で定めるとき、f の微分可能性を調べよ。

(2) $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=e^z$ で定める。f は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z)=e^z$ であることを示せ。

2.5.2 正則関数が定数関数となる場合

(大抵の関数論のテキストに載っている命題 2.23 を紹介するのが目的であるが、命題 2.20 を「数学解析」では証明できていないので、時間に余裕があれば少し詳しめに説明するかもしれない。「弧連結」,「領域」はこの後も良く出て来るので、無駄にはならないであろう。)

最初に問: $f' = 0$ ならば、f は定数関数だろうか？

まずは 1 変数の実関数から考えよう。

「$I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ が $f' = 0$ を満たすならば、f は定数関数と言えるか？」という問の答は No である。$I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ならば、$f(x) = 1$ $(x > 0)$, $f(x) = 0$ $(x < 0)$ で定まる f は定数関数でないが、$f' = 0$ を満たす。

I が区間であれば、$f' = 0$ から f が定数関数であることを導ける (証明は例えば平均値の定理を用いる)。

多変数の場合にも同じようなことをしたければ、連結性の概念が必要になる。

定義 2.18 (弧連結, 領域) $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。
(すなわち、Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、Ω は弧連結であるという。)
(図を用意すること。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。

直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、Ω が 1 つの島からなる国であることである。

$\mathbb{R}$ の部分集合 I が弧連結であるためには、I が区間であることが必要十分である。

余談 2.19 (領域の定義について 2 つの細かい注意) (1) 普通は、連結な開集合のことを領域と呼ぶ[29]。しかし

- 初学者にとって、連結性は弧連結性よりもやや扱いにくい。
- $\mathbb{R}^\ell$ や $\mathbb{C}$ の開集合の場合は、連結であることと弧連結であることは同値であるので、領域を弧連結な開集合と定義しても実質的な差はない。

という理由から、この講義では弧連結な開集合であることを領域の定義として採用した。

(2) 微積分や関数論では、(弧) 連結な開集合のことを領域の定義とするが、数学でも分野によっては、(弧) 連結な開集合でないものを領域と呼ぶ場合がある。■

この講義では次の事実を認めることにする。

付録の**命題 B.1**(p. 261)

Ω が $\mathbb{R}^\ell$ あるいは $\mathbb{C}$ の領域であれば、Ω 内の任意の 2 点 a, b は Ω 内の C^1 級の曲線で結べる。

(弧連結の定義の条件では、曲線にはただの連続性しか仮定していないが、C^1 級の曲線に取り直せる、ということである。)

これから次の命題が証明できる。

命題 2.20 Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が微分可能で、$u' = 0$ $(u_{x_j} = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n))$ を満たすならば、u は定数に等しい。

[29] 連結性の定義は、付録 B (p. 261) 節を見よ。

問 41. 次の方針により、命題 2.20 を証明せよ。Ω 内の任意の 2 点 a, b に対して、a を始点、b を終点とする C^1 級の曲線 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ (つまり $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$) を取ったとき、$u(\varphi(t))$ は定数関数であることを示す。(解答は p. 227 にある。)

> **命題 2.21** Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$(\forall z \in \Omega)$ $f'(z) = 0$ が成り立つならば、f は定数関数である。

証明 f の実部・虚部を u, v とするとき、$f' = 0$ より $u' = 0$, $v' = 0$ が成り立つ。実際

$$0 = f'(x+yi) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = \frac{1}{i}\left(u_y(x,y) + iv_y(x,y)\right)$$

であるから $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. 命題 2.20 から、$u$ と v は定数関数であるから、f も定数関数である。 ■

注意 2.22 (細かい話だけど解説) 微分が 0 ならば定数関数という定理は、1 変数の実関数の場合は平均値の定理を用いて証明するが、複素関数の場合は平均値の定理が成り立たないので、同様に証明することは不可能である。多変数の実関数の場合に帰着させた、ということである。■

問 42. (上の注意に書いた「複素関数では平均値の定理が成り立たない」の確認) $f(z) = e^z$, $a = 0$, $b = 2\pi i$ とするとき、$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ を満たす c は存在しないことを確かめよ。

次の命題は、関数論のほとんどのテキストに載っているものである。

> **命題 2.23** Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。
>
> (1) f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
>
> (2) $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

証明 $\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$ とおく。

(1) 実部が定数関数の場合を証明する。f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$. Cauchy-Riemann の方程式 (☆) が成り立つので、$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\widetilde{\Omega}$ であるから、v は定数関数である。ゆえに $f = u + iv = u$ も定数関数である。

(2) $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v の偏導関数を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x,y)\in\widetilde{\Omega}$ において、$u^2+v^2=C^2>0$ であるから、$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて $u=v=0$ が導かれ、矛盾が導かれる)

$$u_x^2+u_y^2=0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

これから $u_x=u_y=0$ (in $\widetilde{\Omega}$). ゆえに u は定数関数である。(1) より f は定数関数である。■

例 2.24 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ が定義域上の任意の点 z に対して、z で微分可能でないことは、例 2.16 で示してあるが、定義域内の任意の開集合で正則でないことは、上の命題 2.23 からすぐに分かる。実際、実数値関数であるから、もしある領域で正則であれば、その領域で定数関数になるはずであるが、そうでないことは容易に分かる。■

2.5.3 正則関数と調和関数

以下に述べることは論理的にはフライングであるが[30]、順番を守ると、後で Cauchy-Riemann 方程式の復習に時間がかかりがちなので、あえてここで説明する。

命題 2.25 (正則関数の実部虚部は調和関数である) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\quad v_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=0\quad \left((x,y)\in\widetilde{\Omega}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+iy\in\Omega\right\}\right)$$

を満たす。

証明 後で f が Ω 内の任意の点の十分小さな近傍で冪級数展開出来ることが証明できる (定理 7.4)。ゆえに u と v は C^∞ 級である。ここでは、そのことを認めて議論する。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ が成り立つので

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0.$$

最後の等号が成り立つのは、v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

$v_{xx}+v_{yy}=0$ についても同様である。■

n 変数関数 $u(x_1,\dots,x_n)$ が

$$(\sharp)\qquad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=0$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また ($\sharp$) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) という。

Laplace 作用素 (Laplace operator, Laplacian)

$$\triangle:=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

[30] 正則関数の実部・虚部 u, v は、必ず C^∞ 級であるが、そのことの証明はずっと後にならないと出来ない。

を導入して、 (♯) を

$$\triangle u = 0$$

と書くことが多い ($\triangle$ の代わりに ∇^2 と書くこともある[31])。

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と述べることが出来る。実は任意の調和関数は、局所的にはある正則関数の実部になっているので、複素関数論は 2 変数の調和関数論であるとも言える。

$\mathbb{R}^2$ の開集合 Ω で定義された調和関数 u に対して、Cauchy-Riemann 方程式 (☆) を満たす調和関数 v のことを、u の**共役調和関数** (a conjugate harmonic function of u) と呼ぶ。正則関数の虚部は実部の共役調和関数であるということになる。

問 43. v が u の共役調和関数であるとき、u は v の共役調和関数であるかどうか答えよ。(答は「共役調和関数とは限らない」。なぜでしょう？)

Ω が領域であれば、調和関数 u を定めたとき、u の共役調和関数は (もし存在するならば) 定数差を除いて一意的に定まる。

問 44. このことを証明せよ。(ベクトル解析を学んだ人には、続けて問う) v を u を用いて表示する式を求めよ。

余談 2.26 (桂田君教員採用試験を受ける) 任意の正則関数の実部虚部が調和関数である、という命題は、私が学生のとき (もう 30 年以上も前のこと)、某県の教員採用試験で解かされた問題で、ちょっと思い出深い。どういう採点基準かは良く判らなかった。Cauchy-Riemann 方程式は既知として使ってよいのか、u, v が C^2 級であることは認めて良いか、とか。Cauchy-Riemann 方程式はその場で導出したが (上に紹介した $f' = f_x = \dfrac{1}{i} f_y$ という議論をした)、u, v が C^2 級であることの証明は書かなかった (そのときの私には書けなかった — ちょっと情けない)。どちらも受験生が証明を書くことは要求していなかったのかもしれない。その辺の判断は、学習指導要領で出題範囲がある程度定まっている大学入試とは違って、難しい。■

Cauchy-Riemann 方程式に関係が深く、応用上も意義のある話題があるけれど (2 次元の渦なし非圧縮流体の速度ポテンシャル・流れ関数とか)、そこまでやると脱線気味なので、ここで切り上げて、先を急ぐことにする (そういうのは「応用複素関数」で説明します)。

2.5.4 逆関数定理

$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c = a + ib \in \Omega$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とするとき、その実部・虚部をそれぞれ u, v とし、$\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ であり、$\boldsymbol{f}' = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ であるから、

$$f \text{ は } c \text{ で微分可能で } f'(c) = p + iq \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ は } (a, b) \text{ で微分可能で } \boldsymbol{f}'(a, b) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

さらに次式が成り立つ。

$$\det \boldsymbol{f}'(a, b) = |f'(c)|^2 . \tag{22}$$

実際

$$\det \boldsymbol{f}'(a, b) = p \cdot p - (-q) \cdot q = p^2 + q^2 = |f'(c)|^2 .$$

[31] $\nabla \cdot (\nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \triangle u$ であるから。

これから特に

$$\det \boldsymbol{f}'(a,b) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) \neq 0.$$

これが分かると、正則関数の逆関数定理は、導関数の連続性を認めればそれほど難しくない。実際、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が正則で、f' は連続とすると、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級である。$f'(c) \neq 0$ とすると、$\det \boldsymbol{f}'(a,b) \neq 0$. 微積分で学ぶ実関数に関する逆関数定理から、$\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{f}(a,b)$ の十分小さな開近傍で C^1 級の局所的な逆写像 $\boldsymbol{f}^{-1}$ を持ち

$$\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right)'(\boldsymbol{f}(x,y)) = (\boldsymbol{f}'(x,y))^{-1} = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}, \quad p := u_x(a,b), \quad q := -u_y(a,b).$$

これから f が $f(c)$ の十分小さな開近傍で局所的な逆関数 f^{-1} を持ち、その f^{-1} は Cauchy-Riemann の関係式を満たすことが分かる[32]。ゆえに f^{-1} は正則である。

従って、正則関数が冪級数展開可能であるという定理 7.4 を証明してしまえば、導関数が連続であることが分かるので、正則関数についての逆関数の定理の証明が完了となる。

2.5.5 等角性

$f'(c) = p + iq \neq 0$ とするとき、$f'(c)$ の偏角を θ とすると

$$f'(c) = p + iq = \sqrt{p^2+q^2}e^{i\theta},$$

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2+q^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$f(c+h) - f(c) \fallingdotseq f'(c)h$$

の右辺も

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) \fallingdotseq \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\boldsymbol{h}$$

の右辺も、それぞれ h と $\boldsymbol{h}$ を

- 長さを $\sqrt{p^2+q^2}$ 倍して
- 角度 θ の回転をした

ものである、と読み取ることが出来る (図を描くこと)。

以上から、正則関数は $f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる 2 曲線の交角を変えないという性質 (**等角性**) を持つことが分かる。

余談 2.27 等角写像については、次の定理が有名である。

[32] Cauchy-Riemann の関係式は、ヤコビ行列の対角成分 ($(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分) が一致し、$(1,2)$ 成分の -1 倍が $(2,1)$ 成分である、という条件である。$\dfrac{1}{p^2+q^q}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$ はその条件を満たしている。

メンションフの定理

D は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon D\to\mathbb{C}$ が連続、f は定数関数でないとするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) f は D で正則である。

(ii) D 内の孤立集合 E が存在して、f は $D\setminus E$ で “等角” である。(ただし、ここで「等角」とは、接線をもつ曲線の f による像は接線を持ち、2 つの交わる曲線が共に接線を持てば、そのなす角は向きを込めて不変である、という意味である。)

証明は例えば.... を見よ。 ■

この文書では、(割と多くの関数論のテキストがそうしているように) いたるところ $f'(z)\neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶことにする。

念のため: 1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、右図のように正方形を正方形にうつす (図を描くこと)。一般に 1 次変換は、任意の正方形を平行四辺形にうつすが、今の場合は正方形にうつす。(作図の要点: xy 平面で $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ を頂点とする正方形、$x'y'$ 平面で $(0,0)$, (p,q), $(p-q,p+q)$, $(-q,p)$ を頂点とする正方形を描く。)

2.5.6 極座標での Cauchy-Riemann 方程式

(これは時間の埋め草)

Cauchy-Riemann 方程式を極座標で表してみよう。

$\mathbb{R}^2$ の開集合 Ω で定義された関数 $u,v\colon\Omega\to\mathbb{R}$ に対して、

$$U(r,\theta) := u(r\cos\theta, r\sin\theta),\quad V(r,\theta) := v(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} U_r &= u_x x_r + u_y y_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \\ U_\theta &= u_x x_\theta + u_y y_\theta = u_x r\cos\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta \end{aligned}$$

である。すなわち

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式は r であるから、$r\neq 0$ ならば逆行列が存在する。そのとき

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix},\quad M := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

同様に

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix}$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow U_r = \frac{1}{r} V_\theta \quad \text{かつ} \quad U_\theta = -r V_r.
\end{aligned}
$$

すなわち Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ は

$$U_r = \frac{1}{r} V_\theta, \quad U_\theta = -r V_r \tag{23}$$

と同値である。

2.6 確認用の問題

とある年度、$\dfrac{1}{z}$ の原始関数が $\log|z|$ とする人がかなりの数出現した。この講義全体を理解していれば[33]そういう誤解は起きないはずであるが (それだけで不可にしたいくらいだ…)、今の段階で間違いであることがきちんと説明できる。次の問題を掲げておく。

問 45. $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = \log|z|$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$ で定める。ただし、$\log\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ は、微積分に現われる実関数である。f はいたるところで微分出来ないことを示せ。

さすがに、微分できない原始関数はおかしい、と一人残らず思ってくれるだろうか？ (苦笑)

[33] 何というか、この講義では、$\dfrac{1}{z}$ の積分がテーマという見方も出来るくらい、出ずっぱりなので、そこにまったく出て来ない $\log|z|$ を持ち出すのはおかしいと思って…

3　冪級数

(現在、Cauchy-Hadamard の定理を証明した上で用いるように書き直すことを検討中。)

c を複素数、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ を複素数列とするとき、関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

を c を中心とする**冪級数** (a power series) と呼ぶ。「冪」は書きにくいので[34]、巾級数、ベキ級数とも書く (板書は「ベキ級数」を使います)。**整級数**と呼ぶこともある。

定義域の各点の近傍で収束する冪級数で表される (冪級数展開出来る) 関数を、**解析的** (analytic) という。

実は「正則=解析的」であることが後で分かる。

現時点で複素関数欠乏症なので (多項式関数、有理関数、指数関数くらいしか複素関数がない)、冪級数を使ってたくさんの関数を導入したい。

3.0　イントロ

冪級数について、少し長めの話をすることになるので、ものものしいが、イントロをつける。

冪級数とは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ (ここで z は変数、c や a_n は与えられた定数) の形をしている級数のことをいう。

3 つの事実を指摘する。

1. (微積分で教わった) e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $(1+x)^\alpha$ などなど、高校生・大学 1 年生の知っているような関数 (「場合分け無しの式で書けるような関数」) は、ほとんどが Taylor 展開できる ($f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$)。つまり収束する冪級数で表せる。— x を複素変数 z に置き換えると、複素関数バージョン (複素関数拡張) の定義が得られる。

2. すべての冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、収束円と呼ばれるものがある。それは c を中心とする円盤 $D(c;\rho)$ で (ただし $0 \leq \rho \leq +\infty$)、その内部であれば、冪級数は何回でも項別微分、項別積分出来る。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-c)^n,$$
$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b.$$

(ここで C は $D(c;\rho)$ 内の任意の区分的に滑らかな曲線であり、a, b はそれぞれ C の始点, 終点である。図が必要。)

$\rho > 0$ であるとき、冪級数は**収束冪級数**であるという。

---

[34] わかんむり (冖) に幕府の幕と書く (幕という方が適切かな？)。「わかんむり」なんて覚えていなかった。

3. (複素関数論の主結果 (我々の目標) の一つ) すべての正則関数は冪級数展開出来る (収束する冪級数で表せる)。逆に収束する冪級数の和は正則であるから

$$\text{正則} = \text{解析的 (各点の近傍で収束冪級数で表せる)}$$

と言える。もう少し詳しく書くと、Ω が $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が正則とするとき、(Ω が開集合なので) 任意の $c \in \Omega$ に対して $D(c;\varepsilon) \subset \Omega$ となる $\varepsilon > 0$ が存在するが、実はある複素数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;\varepsilon))$$

が成り立つ (驚くべき定理)。

冪級数を扱うために、完備性の議論の必要性が高いが、数学解析で完備性の説明をしたので、$\mathbb{C}$ の完備性についての議論は省略する。付録 A.1 を用意したので、復習したい人はそちらを見て下さい。

級数の収束の議論についても、微積分等で部分的に学んでいるはずなので、詳細は省略する。付録 A.2 を用意したので、復習したい人はそちらを見て下さい。

3.1 冪級数の収束円

(次の命題は、授業では $c = 0$ の場合に証明を書くのが良いかもしれない[35]。中心を c とすると、案外式が複雑に見えてしまう。)

補題 3.1 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を複素数列、$c, z_0 \in \mathbb{C}$ とする。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が $z = z_0$ で収束するならば、$|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束する。

証明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n (z_0 - c)^n = 0$ である。(一般に「収束する級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の一般項は 0 に収束する: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.」が成り立つから[36]。)

「収束列は有界である」から

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n (z_0 - c)^n| \leq M.$$

このとき $b_n := M \left|\dfrac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n (z-c)^n| = |a_n (z_0-c)^n| \left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n \leq M \left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n = b_n.$$

[35] $\zeta := z - c$, $\zeta_0 := z_0 - c$ とおくと、「$\displaystyle\sum_n a_n \zeta^n$ が $\zeta = \zeta_0$ で収束するならば、$|\zeta| < |\zeta_0|$ を満たす任意の ζ に対して絶対収束する。」という命題に帰着されるので、$c = 0$ の場合に証明すれば十分である」くらい言っておく。

[36] 実際 $s := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $s_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと、$s_n \to s$ であるが、$s_{n-1} \to s$ も成り立つ。ゆえに $n \to \infty$ のとき $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$.

数列 $\{b_n\}$ は公比 $|(z-c)/(z_0-c)|<1$ の等比級数であるので収束する:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{M}{1-|z-c|/|z_0-c|}.$$

ゆえに**優級数の定理** (定理 A.5, p. 235, よほど忙しくない限り、授業で「優級数の定理」の証明を紹介するつもりである。) から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は絶対収束する。■

系 3.2 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ を複素数列、$c, z_0 \in \mathbb{C}$ とする。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で発散するならば、$|z-c|>|z_0-c|$ を満たす任意の z に対して発散する。

証明 補題から「$|z_1-c|<|z_2-c|$ のとき、z_2 で収束すれば z_1 で収束する」が分かるが、その対偶である。■

定理 3.3 (冪級数の収束円の存在) $\{a_n\}_{n\ge 0}$ を複素数列、$c\in\mathbb{C}$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、次のいずれか一つが成立する。

(i) $z=c$ 以外の任意の z で冪級数は収束しない。

(ii) 任意の複素数 z で冪級数は収束する。

(iii) ある正の数 ρ が存在して、$|z-c|<\rho$ ならば冪級数は収束し、$|z-c|>\rho$ ならば冪級数は発散する。

証明 (授業では、図を描いて流すものかもしれない。「きちんとやるには、区間縮小法に持ち込みますが、それは講義ノートを見て下さい。」と言って簡単に済ませる。)

$$A := \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ は収束する} \right\}$$

とおく。$c\in A$ であることに注意する ($z=c$ を代入すると $n\ge 1$ に対して $a_n(z-c)^n=0$ であるから収束する)。次の 3 つに場合分けできる。

(i) $A=\{c\}$. すなわち、c 以外のすべての複素数で発散する。

(ii) $A=\mathbb{C}$. すなわち、すべての複素数で収束する。

(iii) (i), (ii) のいずれでもない。

(iii) の場合を考える。
(i) でないので、$\exists z_c\in A\setminus\{c\}$. $r_0:=|z_c-c|$ とおくとき、$|z-c|<r_0$ では収束する。
(ii) でないので、$\exists z_d\in\mathbb{C}\setminus A$. $R_0:=|z_d-c|$ とおくとき、$|z-c|>R_0$ では発散する。
$0<r_0<R_0$ である。以下、二分法を行なう。
$\rho_0 := \dfrac{r_0+R_0}{2}$ とおく。

- $c+\rho_0\in A$ であれば $|z-c|<\rho$ で級数は収束する。このとき $r_1:=\rho_0$, $R_1:=R_0$ とおく。
- $c+\rho_0\notin A$ であれば $|z-c|>\rho$ で級数は発散する。このとき $r_1:=r_0$, $R_1:=\rho_0$ とおく。

どちらの場合も、級数は $|z-c|<r_1$ で収束し、$|z-c|>R_1$ で発散する。また

$$r_0 \le r_1 < R_1 \le R_0, \quad R_1 - r_1 = \frac{R_0 - r_0}{2}$$

が成り立つ。
　以下同様にして、数列 $\{r_n\}$, $\{R_n\}$ が作ると、

- $\{r_n\}$ は単調増加数列であり、$\{R_n\}$ は単調減少数列である。
- 任意の n に対して $r_n < R_n$, $R_n - r_n = \dfrac{R_0 - r_0}{2^n}$.
- 任意の n に対して、級数は $|z-c|<r_n$ で収束し、$|z-c|>R_n$ で発散する。

区間縮小法により、$\{r_n\}$ と $\{R_n\}$ は共通の極限 ρ に収束する。
　$\rho \ge r_0 > 0$ であるから $\rho > 0$.
　また級数は $|z-c|<\rho$ で収束し、$|z-c|>\rho$ で発散する。 ■

　(i) の場合に $\rho = 0$, (ii) の場合に $\rho = +\infty$ とすると、形式的に次のように一つにまとめられる。

ある ρ $(0 \le \rho \le +\infty)$ が一意的に存在し、$|z-c|<\rho$ で収束、$|z-c|>\rho$ で発散する。

　通常、円 $D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c|<\rho\}$ の半径 ρ は正の数であるが、$\rho = 0$, $\rho = +\infty$ の場合も用いることにする。

$$D(c;0) = \emptyset, \quad D(c;\infty) = \mathbb{C}$$

と約束する。

定義 3.4 (収束半径, 収束円, 収束冪級数) 上の定理の ρ を冪級数の**収束半径** (the radius of convergence)、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c|<\rho\}$ を冪級数の**収束円** (the circle of convergence) と呼ぶ。
冪級数の収束半径が 0 でない (正の数または ∞) とき、その冪級数は**収束冪級数**であるという。

注意 3.5 (「収束半径の定義を述べよ」と言われたら) 収束半径の定義は何か？と尋ねられて答えられない人が多い。上に書いた定義は「上の定理の」とあるので、そういう問題の答として使いにくいかもしれない。過保護かもしれないが、一つの答を示す。

$0 \le \rho < +\infty$ または $\rho = +\infty$ とする。ρ が冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の収束半径であるとは、

$$|z-c|<\rho \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \text{ は収束し、} |z-c|>\rho \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \text{ は発散する}$$

が成り立つことをいう。

青い字で書いた条件をぜひとも覚えて欲しい。 ■

例 3.6 (もっとも簡単な冪級数、等比級数) ($c=0$, $a_n=1$ とした) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ を考えよう。これは公比 z の等比級数であるから、収束・発散が具体的な計算で判る。結論だけ述べると、$|z|<1$ であれば収束、$|z|\ge 1$ であれば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

(念のため「ゆえに」の説明: $|z|\ge 1$ であれば発散することから、$|z|>1$ であれば発散することが導かれる (当たり前)。ゆえに $c=0$, $\rho=1$ として、「$|z-c|<\rho$ ならば収束し、$|z-c|>\rho$ ならば発散する」という条件が成立する。ゆえに 1 が収束半径である。)

ゆえに収束円は $D(0;1)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$. ■

問 46. 上の例で述べたこと (複素等比級数の収束条件) を確認せよ。

$\{a_n\}$ が分かっているとき、それから ρ を計算する公式を 2 つ紹介する。次の定理は、適用範囲はあまり広くないが (それでも微積の講義で現れる冪級数の多くを処理可能である)、使うのが簡単なので、身につけるべきものである。

命題 3.7 (係数比判定法, ratio test, d'Alembert の判定法) $\{a_n\}_{n\ge 0}$ を複素数列、$c\in\mathbb{C}$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について、ある番号から先のすべての n に対して $a_n\ne 0$ であり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

が確定するならば、それは冪級数の収束半径に等しい。

("d'Alembert" は「ダ・ランベール」と読む[37]。

ここで「確定する」とは、極限が存在する (収束する) か、$\lim=+\infty$ となる、という意味である。

証明のあらすじは、(i)$|z-c|<\rho$ のときは等比級数と比較して、優級数の定理を用いて収束することを示し、(ii) $|z-c|>\rho$ のときは、一般項が 0 には収束しないことを示して、級数は発散する、と議論する。)

証明 $c=0$ の場合に証明すれば良い。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\rho$ とおく。$|z|<\rho$ ならば収束し、$|z|>\rho$ ならば発散することを示す。

$|z|<\rho$ とする。$|z|<R<\rho$ となる R を取る。($\rho<\infty$ ならば $R:=\dfrac{|z|+\rho}{2}$ とおく。$\rho=\infty$ ならば $R:=|z|+1$ とおく。) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\rho$ であるから、$(\exists N\in\mathbb{N})$ $(\forall n\in\mathbb{N}\colon n\ge N)$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|>R \quad \left(\text{これは } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{R} \text{ と書き直せる}\right).$$

この条件を満たす N を 1 つ取る。$m\ge 0$ とすると

$$\left|a_{N+m}z^{N+m}\right|=\left|a_N\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}z^N z^m\right|\le\left|a_N z^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^m.$$

言い換えると $\forall n\ge N$ に対して

$$|a_n z^n|\le\left|a_N z^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

[37] Jean Le Rond d'Alembert (1717 年フランスの Paris に生まれ、1783 年フランスの Paris にて没する。哲学者、物理学者、数学者。)

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \le n \le N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\dfrac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \ge N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n z^n| \le b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{\left|a_N z^N\right|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理により $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R を取る。($\rho = +\infty$ のときは考えなくて良いので、$R := \dfrac{|z| + \rho}{2}$ とおけば良い。) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$ であるから、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R \quad \left(\text{これは} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \frac{1}{R} \text{ と書き直せる}\right).$$

上と同様にして (しかし不等号の向きは逆になって) $\forall n \ge N$ に対して

$$|a_n z^n| \ge \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

ゆえに $a_n z^n$ は 0 に収束しないので、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。■

例 3.8 (ratio test の例) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ の収束半径は 1 である。実際 $a_n = \dfrac{1}{n}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

収束円は $D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

同様に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ の収束半径は 1 であり、収束円は $D(0;1)$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ($\exp z$ の Taylor 展開) の収束半径は $+\infty$ である。実際 $a_n = \dfrac{1}{n!}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに収束円は $\mathbb{C}$.

同様に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ の収束半径は 0 であり、収束円は $\emptyset$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2k)!} z^{2k}$ ($\cos z$ の Taylor 展開) の収束半径は $+\infty$ である。実際 $\zeta = z^2$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \zeta^n.$$

右辺は ζ の冪級数である。まずこの収束半径を調べる。$a_n=\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1))!}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1)=\infty.$$

この (ζ の) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\zeta^n$ の収束半径が $+\infty$ であるから、この冪級数は任意の ζ に対して収束する。するともとの級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2k)!}z^{2k}$ は任意の z に対して収束することが判る。ゆえに収束半径は $+\infty$. 収束円は $\mathbb{C}$. ■

時々 $\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ なのか $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ なのか、混乱しそうになるが、$|a_n|$ の増大が早まるほど、収束半径は小さくなるはず、と考えれば前者が正しいと判るであろう。あるいは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho}\right)^n$ に適用して (これは等比級数であり、収束条件が $|z|<\rho$ であることは明白)、収束半径が ρ という結果が出るかどうか。

与えられた冪級数の係数から収束半径を求める問題には、ある意味で決定版と言える解答がある。それが次の定理である。

命題 3.9 (Cauchy-Hadamard の公式, Cauchy-Hadamard の判定法) $\{a_n\}_{n\ge0}$ を複素数列、$c\in\mathbb{C}$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とする。$\dfrac{1}{+\infty}=0$, $\dfrac{1}{0}=+\infty$ の約束のもとで、次式が成り立つ。

$$\rho=\frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{24}$$

(証明のあらすじは、d'Alembert と同じである。すなわち、$|z-c|<\rho$ のときは等比級数と比較して、優級数の定理を用いて収束を示す。$|z-c|>\rho$ のときは、一般項が 0 には収束しないことを示して、級数は発散する、と議論する。)

任意の複素数列 $\{a_n\}$ に対して、$\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$ は確定するので、(24) は任意の冪級数の収束半径を表す公式になっている (その意味では、究極の公式である)。

これを使いこなすためには、数列の上極限 lim sup (付録 A.3.1(p. 238) 参照) を習得する必要があるが、それにはある程度の時間が必要になるので、講義では説明を省略するかもしれない (年度によって、説明したり、説明しなかったりする)。証明は付録 A.3 で与えておく。

例 3.10 例えば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z^{n^2}=z+z^4+z^9+\cdots$ のような級数は冪級数であり (n が平方数であるときに $a_n=1$, そうでなければ $a_n=0$)、収束半径が 1 であることは少し考えれば分かるが、係数比判定法の適用範囲外である。

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$$

であることはすぐ分かるので[38]、Cauchy-Hadamard の公式を使えば、収束半径は $\dfrac{1}{1}=1$ と得

[38] $\sqrt[n]{|a_n|}$ は 0, または 1 であり、1 となる n (平方数) は無限にたくさん存在するので、$\displaystyle\sup_{k\ge n}\sqrt[k]{|a_k|}=1$. $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n}a_n$ という公式 (流儀によっては定義式である) より、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{n\to\infty}1=1$.

られる。 ■

系 3.11 (簡略版 Cauchy-Hadamard の公式) $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を複素数列、$c \in \mathbb{C}$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とする。

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

が確定するならば、$\dfrac{1}{+\infty}=0,\ \dfrac{1}{0}=+\infty$ の約束のもとで、次式が成り立つ。

$$\rho = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明　一般に、lim が確定するとき、それは lim sup に等しいので、定理からすぐに結論が得られる。 ■

例 3.12 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$ の収束半径はそれぞれ $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$ である。その和として得られる冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n+3^n\right) z^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{3}$ である。実際

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}$$

であることから、d'Alembert の公式により収束半径は $\dfrac{1}{3}$. ■

筆者は、2 つの収束冪級数の和として得られる冪級数の収束半径は、最初の冪級数の収束半径の最小値とある時期勘違いしていたが、それは正しくない。

問 47. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径がそれぞれ R_1, R_2 で、$0 < R_1 < R_2 < \infty$ を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n$ の収束半径は R_1 であることを示せ。

問 48. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径が両方共 R とする。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n$ の収束半径は R 以上であることを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n$ の収束半径が R より大きい例をあげよ。

3.2　関数列の一様収束

3.2.1　定義と例

通常の関数論では、一様収束の定義以上のことは、授業の進行上、後回しにする可能性がある。

この項では、$\mathbb{C}$ の部分集合を定義域とする関数を主な対象とするが、より一般の場合にも成立する議論が多い。要するに**この項の話は関数論以外にも良く出て来る。**

実関数の項別微分、項別積分に関する「常識」については、付録 (§§3.2.2) を用意しておいた。

関数列の収束として、もっとも素朴なものは次の各点収束であろう。

定義 3.13 (関数列の各点収束 (単純収束)) K は空でない集合、$f\colon K \to \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ は K を定義域とする複素数値関数列 (各 n に対して $f_n\colon K \to \mathbb{C}$ ということ) とする。$\{f_n\}$ が f に K で (K の上で, K において, K 上) **各点収束** (converge pointwise) するとは、

$$(\forall x_0 \in K) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

が成り立つことをいう。

この各点収束の概念だけで間に合えば嬉しいが、実はあまり役に立たない (各点収束することから導ける命題があまりない)。そこで一様収束という概念を導入しよう。

(数列の収束には実質的に一種類の収束しかないが、関数列の収束には色々な種類がある。関数論では、一様収束と、それを少し拡張した広義一様収束というものが役に立つ。)

定義 3.14 (一様収束) K を空でない集合、$f\colon K \to \mathbb{C}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K を定義域とする複素数値関数列とする。$\{f_n\}$ が f に K で (K の上で, K において, K 上) **一様収束する**とは

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

が成り立つことをいう。

K を定義域とする関数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ があるとき、関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ が K で (K の上で, K において, K 上) 一様収束するとは、部分和 $s_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)$ $(x \in K)$ の作る関数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が K で一様収束することをいう。

任意の $x_0 \in K$ に対して

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)|$$

であるから、

関数列が一様収束するならば (同じ極限関数に) 各点収束する

が[39]、逆は必ずしも成り立たない (すぐ後に紹介する例が反例となる)。

一様収束は各点収束よりも強い条件である。

各点収束するだけでは、色々困った (?) ことが起こる。

(a) f_n がすべて連続関数であっても、極限 f は連続関数でないことがある。

(b) いわゆる項別積分 (定義はすぐ後で述べる) が成り立たないことがある。

[39]従って、関数列 $\{f_n\}$ に対して、各点収束の意味での極限 f を求めておけば、$\{f_n\}$ が一様収束するかどうかは、$\{f_n\}$ が f に一様収束するかどうか、という問題になる。複数の種類の収束があるけれど、極限関数 f が複数あるわけでない、ということである。もしかすると、これが各点収束について一番大事な定理なのかもしれない。

実は一様収束する場合は、この2つは起こらない。そのことは次項 3.2.2 で示すが、ここではまずは (a), (b) の例を見ることにする。

その前に項別積分の定義を述べておく。一般に

$$\lim_{n\to\infty}\int_K f_n(x)\,dx=\int_K \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

が成り立っているとき ($\lim$ と $\displaystyle\int_K$ の順番が交換できるとき)、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K において**項別積分** (term by term integration) 出来る、項別積分可能である、という。

例 3.15 (各点収束する連続関数列の極限関数は連続でないことがある) $f_n(x)=\tan^{-1}(nx)$ ($x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$) とする。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -\frac{\pi}{2} & (x<0)\end{cases}$$

とおくと、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. ($x=0$ ならば $f_n(x)=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$. $x>0$ ならば、$n\to\infty$ のとき $nx\to\infty$ であるから、$\tan^{-1}(nx)\to\frac{\pi}{2}$. $x<0$ のときも同様。)

ゆえに $\{f_n\}$ は f に $\mathbb{R}$ で各点収束する。

一方、$\{f_n\}$ は f に一様収束はしない。実際

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。

f_n はすべて連続関数であるが、f は不連続関数である[40]。 ■

各点収束するけれど、一様収束せず、項別積分ができない関数列の実例をあげておこう。授業でこのあたりを講義するのは、渋谷で DJ ポリスが奮闘する時期なので[41]、次の例がいいかな。

例 3.16 (魔女の帽子 (witch's hat), 各点収束する関数列は項別積分出来ないことがある) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f_n(x):=\begin{cases}n^2x & (0\le x<\frac{1}{n})\\ -n^2x+2n & (\frac{1}{n}\le x<\frac{2}{n})\\ 0 & (x<0 \text{ または } x\ge\frac{2}{n})\end{cases}$$

で定めるとき (グラフを描こう)、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

すなわち関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、定数関数 $f(x)=0$ に $\mathbb{R}$ で各点収束する。これを確かめるには (収束の定義によると)

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N}\colon n\ge N)\quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

[40]「信号処理とフーリエ変換」で、不連続な関数の Fourier 級数は見ている人が多いはず。そういう人は、連続関数列 (Fourier 級数の部分和は連続) の各点収束極限が不連続になることがあるのは知っている「はず」。

[41] これは「奮闘する時期だった」と過去形になってしまっただろうか。お巡りさんに注意されるくらいで何とかなっていた頃が懐かしい。「ハロウィーンの時期なので」に直すのかな。

を示せばよい。

(a) $x \le 0$ の場合: 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f_n(x) = 0$ であるから、$N = 1$ とすれば良い。

(b) $x > 0$ の場合: $N > \dfrac{2}{x}$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば良い[42]。

一方、

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = n$$

であるので

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \infty.$$

(極限が 0 にならないので) ゆえに $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に一様収束はしない。

グラフを描けばすぐ分かるように、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1 \quad (\text{三角形の面積})$$

であるから

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

すなわち項別積分はできない。■

3.2.2 一様収束のありがたみ

命題 3.17 (連続関数列の一様収束極限は連続) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ は Ω 上の複素数値連続関数列とする。$\{f_n\}$ が Ω 上 f に 一様収束するならば、f は Ω 上連続である。

証明 $x_0 \in \Omega$ とする。任意の正の数 ε に対して、$\{f_n\}$ が Ω 上 f に一様収束することから、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \ge N)$

$$\sup_{y \in \Omega} |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は Ω で連続であるから、$(\exists \delta > 0)$ $(\forall x \in \Omega\colon |x - x_0| < \delta)$ $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

ゆえに、$x \in \Omega$, $|x - x_0| < \delta$ であれば、

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&\le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&\le \sup_{y \in \Omega} |f(y) - f_N(y)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \sup_{y \in \Omega} |f_N(y) - f(y)| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これは f が x_0 で連続なことを示している。■

問 49. 例 3.15 の関数列 $\{f_n\}$ に対しては、各点収束の意味での極限 f は $x_0 = 0$ で連続ではない。命題 3.17 の証明のどこが成り立たないか、考えよ。

[42]「数学解析」を受講した人向け: そういう N が存在することを示すのには、アルキメデスの公理を使うわけです。

実関数の場合の項別微分、項別積分

本当は微積分を学ぶ際にやるべきことだけれど、省略されている可能性が高いので、さらっと紹介する。2 つの定理とその証明を説明するが、私はとても見通しの良い証明であると思っている。複素関数の場合も同様の証明が可能であるが、そのためには複素関数の積分を定義する必要があるので、少し待って下さい。

ここでは簡単のため、Ω が実軸上の有界閉区間 $[a,b]$ の場合に定理を述べて証明するが、もっと一般の場合に成り立つことは分かるであろう。

命題 3.18 (一様収束ならば項別積分可能) $[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の区間、$\{f_n\}$ は $[a,b]$ 上の複素数値連続関数列で、$n\to\infty$ のとき関数 f に $[a,b]$ で一様に収束するならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

証明　f は (連続な関数からなる関数列の一様収束極限であるから) 連続であることを注意しておく。

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx\\ &\le \sup_{y\in[a,b]}|f_n(y)-f(y)|\int_a^b dx\\ &= \sup_{y\in[a,b]}|f_n(y)-f(y)|\,(b-a)\to 0.\blacksquare\end{aligned}$$

もとの関数 f_n の連続性が f の連続性を導くかを問題にしたが (各点収束では不足、一様収束なら OK)、微分可能性はどうなるか。ここでは次の定理を紹介しておく。

命題 3.19 $\mathbb{R}$ の区間 $I=[a,b]$ 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が 2 条件

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $n\to\infty$ のとき、ある関数 f に I で各点収束する。

(2) 導関数列 $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $n\to\infty$ のとき、ある関数 g に I で一様収束する。

を満たすならば、f は I で C^1 級で、$f'=g$ を満たす。

証明　任意の $x\in[a,b]$ に対して

$$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,dt$$

が成り立つ。$n\to\infty$ としたときの極限は

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,dt.$$

g は連続関数列の一様収束極限であるから、連続であることに注意すると、f は微分可能で

$$f'(x)=g(x).$$

g は連続であるから、f は C^1 級である。$\blacksquare$

問 50. 微分の定義に基づき

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt=g(x)$$

を示せ。

3.2.3 Weierstrass の M-test

次に紹介する Weierstrass の M-test は、便利な定理である[43](一様収束を証明する場合の九割以上で使われているのではないかと思われる)。

定理 3.20 (Weierstrass の M-test) Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束するし (だから項別積分出来る)、各点 z で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)$ は絶対収束する (だから和の順序が変えられる)。

証明 (定理そのものが優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップ、みたいなものである。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z):=\sum_{k=1}^{n}a_k(z),\quad S_n(z):=\sum_{k=1}^{n}|a_k(z)|,\quad T_n:=\sum_{k=1}^{n}M_k$$

とおく。任意の $n\in\mathbb{N}$, $z\in\Omega$, $m\in\mathbb{N}$ に対して

$$(*)\qquad |s_n(z)-s_m(z)|\le|S_n(z)-S_m(z)|\le|T_n-T_m|$$

が成り立つ。

実際、$n>m$ のとき

$$|s_n(z)-s_m(z)|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(z)-\sum_{k=1}^{m}a_k(z)\right|=\left|\sum_{k=m+1}^{n}a_k(z)\right|\le\sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z)|.$$

この右辺について

$$\sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z)|=\sum_{k=1}^{n}|a_k(z)|-\sum_{k=1}^{m}|a_k(z)|=S_n(z)-S_m(z)=|S_n(z)-S_m(z)|$$

と

$$\sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z)|\le\sum_{k=m+1}^{n}M_k=\sum_{k=1}^{n}M_k-\sum_{k=1}^{m}M_k=T_n-T_m=|T_n-T_m|$$

[43] 暇話になるけれど、昔小説 (タイトルは忘れた) を読んでいて、主人公 (学生) が一様収束の勉強をしているというくだりがあった。難しいことを真面目に勉強しているということを著者は言いたかったらしい (性格の描写のうちの一つ)。でも一様収束というのはそんなに難しいことではないと思う (時が経って、自分の方がずれてしまったのかなあ?)。関数のグラフを描いてみればイメージは明瞭である (と思うのだけど)。実際に証明が出来るかについては、「級数の一様収束の証明なんて、結局はこれを使うしかないはずだ」くらいに割り切って、一様収束と Weierstrass の M-test をセットで覚えれば良いと思う。

が成り立つので、

$$|s_n(z)-s_m(z)|\le|S_n(z)-S_m(z)|\le|T_n-T_m|.$$

$m>n$ の場合、m と n を入れ替えたものが成り立つが、それも

$$|s_m(z)-s_n(z)|\le|S_n(z)-S_m(z)|\le|T_n-T_m|$$

と書き直せる ($|b_m-b_n|=|-(b_n-b_m)|=|b_n-b_m|$)。(∗) が示せた。

仮定より $\{T_n\}$ は収束列なので、Cauchy 列である。(∗) から、数列 $\{S_n(z)\}$, $\{s_n(z)\}$ も Cauchy 列であることが分かる。$\mathbb{C}$ の完備性によって、それらは収束する。そこで

$$s(z):=\lim_{n\to\infty}s_n(z),\quad S(z):=\lim_{n\to\infty}S_n(z)\quad(z\in\Omega),$$
$$T:=\lim_{n\to\infty}T_n$$

とおく。(∗) で $m\to\infty$ とすると

$$(\forall z\in\Omega)(\forall n\in\mathbb{N})\quad|s_n(z)-s(z)|\le|S_n(z)-S(z)|\le|T_n-T|.$$

(細かいことを言うと $(\forall z\in\Omega)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ の順番を入れ替えて) $z\in\Omega$ について上限を取って

$$\sup_{z\in\Omega}|s_n(z)-s(z)|\le\sup_{z\in\Omega}|S_n(z)-S(z)|\le|T_n-T|.$$

$n\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束するので、$\{S_n\}$ は S に、$\{s_n\}$ は s に、それぞれ Ω で一様収束する。■

次の定理は有名である (定理 3.3 とセットにして覚えるべき)。

定理 3.21 (冪級数は収束円盤内の任意の閉円盤で一様絶対収束する) $\{a_n\}_{n\ge0}$ は複素数列、$c\in\mathbb{C}$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とする。このとき $0<R<\rho$ を満たす任意の R に対して、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ は閉円盤 $K:=\{z\in\mathbb{C}\mid|z-c|\le R\}$ 上一様絶対収束する。

補題 3.1 では、証明に優級数の定理を使ったが、その代わりに Weierstrass の M test を使って改良した、というような結果である。

証明 $\rho=0$ の場合は、$K=\{c\}$ であり、$z=c$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=a_0+0+0+\cdots$ であるから、一様絶対収束することは簡単に分かる。

以下 $\rho>0$ とする。$R<r<\rho$ なる r を取る ($\rho<\infty$ ならば $r=\dfrac{R+\rho}{2}$, $\rho=\infty$ ならば $r=R+1$)。

$z=c+r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty}a_nr^n=\lim_{n\to\infty}a_n(z-c)^n=0.$$

ゆえに $\{a_nr^n\}$ は有界である。すなわち、ある $M\in\mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad|a_nr^n|\le M.$$

$b_n:=M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c|\le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n(z-c)^n|\le|a_n|R^n=|a_nr^n|\left(\frac{R}{r}\right)^n\le M\left(\frac{R}{r}\right)^n=b_n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{M}{1-R/r} \quad (\text{収束}).$$

Weierstrass の M-test によって、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は、$K = \overline{D}(c;R)$ で一様に絶対収束する。■

この定理により、冪級数は収束円の内部で連続であることが分かるが、すぐ後にもっと強く正則 (微分可能) であることを示すので、それはわざわざ命題として書かないことにする。

余談 3.22 (コンパクト集合を知っている人向け — 言葉遣い「広義一様収束」) 上の定理を「冪級数は収束円内で広義一様収束する」と表現するテキストもあるので、少し説明しておく。

$D(c;\rho)$ 内の任意のコンパクト集合 (今の場合は、$D(c;\rho)$ に含まれる有界な閉集合のこと) は、適当な $R<\rho$ に対して、$\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|\le R\}$ に含まれるので、冪級数は $D(c;\rho)$ 内の任意のコンパクト集合上で一様収束することが分かる。そのことを $D(c;\rho)$ で**広義一様収束**するという (英語では、そのものずばりで、“uniformly convergent on every compact set” というのが普通らしい)。■

3.3 冪級数の項別微分

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (Abel)

定理 3.23 (冪級数の項別微分可能性, Abel) $\{a_n\}_{n\ge 0}$ を複素数列、$c\in\mathbb{C}$ とする。冪級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、f は $D(c;\rho)$ で正則で、

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n \quad (z\in D(c;\rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

(冪級数に関して、もう 1 つ Abel による有名な定理がある (定理 3.44)。むしろ Abel の定理と言えばそちらを思い出す人の方が多いかもしれない。)

証明 $c=0$ として証明すれば良い。$g(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

冪級数 $g(z)$ の収束半径は ($\displaystyle\sum_n n a_n z^n$ のそれと同じであるから)、Cauchy-Hadamard の公式により

$$\frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\ \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1\cdot(1/\rho)} = \rho.$$

$0<R<\rho$ を満たす任意の R に対して、f が $D(0;R)$ で正則で $f'(z)=g(z)$ を満たすことを証明しよう。

ε を任意の正の数とする。$g(z)$ は $|z|\le R$ で絶対収束するので[44]、

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k\,|a_k|\,R^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

[44] 一様絶対収束するが、ここの議論では絶対収束することしか使わない。

を満たす $N \in \mathbb{N}$ が取れる。

任意の $z \in D(0;R)$ と、$z+h \in D(0;R)$ を満たす任意の $h \neq 0$ に対して、

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(z+h)^n-a_nz^n}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right| \\ &\le \left|\sum_{k=1}^{N}a_k\left(\frac{(z+h)^k-z^k}{h}-kz^{k-1}\right)\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\frac{(z+h)^k-z^k}{h}\right| \\ &\quad +\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}ka_kz^{k-1}\right|.\end{aligned}$$

右辺第 1 項については、$\left(z^k\right)'=kz^{k-1}$ であるから、$|h|$ が十分小さければ

$$\left|\sum_{k=1}^{N}a_k\left(\frac{(z+h)^k-z^k}{h}-kz^{k-1}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

また ($|z|<R$, $|z+h|<R$ に注意すると)

$$\begin{aligned}\left|(z+h)^k-z^k\right| &= \left|(z+h-z)\left[(z+h)^{k-1}+(z+h)^{k-2}z+\cdots+(z+h)z^{k-2}+z^{k-1}\right]\right| \\ &\le |h|\left(|z+h|^{k-1}+|z+h|^{k-2}|z|+\cdots+|z+h||z|^{k-2}+|z|^{k-1}\right) \\ &\le |h|kR^{k-1}\end{aligned}$$

であるから、右辺第 2 項については

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\frac{(z+h)^k-z^k}{h}\right|\le\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|\,kR^{k-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第 3 項については、

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}ka_kz^{k-1}\right|\le\sum_{k=N+1}^{\infty}k\,|a_k|\,R^{k-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right|<\varepsilon.$$

これは $f'(z)=g(z)$ を示している。■

余談 3.24 (導関数の冪級数の収束半径が元の冪級数のそれと同じことの別証) 上の証明では、Cauchy-Hadamard の公式を用いて、f と g の収束半径が一致することを導いたが、授業では、Cauchy-Hadamard の公式を証明しなかったので (上極限の性質の説明もさぼった)、それを用いずに収束半径の一致を導いてみよう[45]。

[45] この辺はどうすべきか悩むところで、何でも事前に準備をしておくと、すっきり解決するようになるものの、それで早くなった分の時間が準備にかけた時間とつりあうかどうか…ともあれ、証明しないものを使うのは気持ちが悪いので、使わないで証明してみよう、ということである。そうして証明を作ってみた後で、杉浦 [21] を見たら、杉浦先生も同じようなことをしていて (本の中で Cauchy-Hadamard の公式の証明はするのだが、説明の順序の都合で、収束半径の一致は Cauchy-Hadamard の公式を使わずに証明してある)、「またか」と思ったのであった。

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}$ の収束半径をそれぞれ ρ_1, ρ_2 とおくとき、$\rho_1 = \rho_2$ を言えば良い。

$$A = \left\{ r \in \mathbb{R} \;\middle|\; r > 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, r^n < \infty \right\}, \quad B = \left\{ r \in \mathbb{R} \;\middle|\; r > 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} n \, |a_n| \, r^n < \infty \right\}$$

とおく。(状況をあらく説明すると、例えば前者について $\rho_1 = \sup A$ で、$A = (0, \rho_1)$ または $A = (0, \rho_1]$ ということであるが、$A = \emptyset$ という場合もあり (このとき $\sup A = \rho_1$ は成り立たない)、ていねいな議論が必要になる。)

一般に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, r^n \le \sum_{n=1}^{\infty} n \, |a_n| \, r^n$ であるから、$B \subset A$. 収束半径の定義から

$$0 < r < \rho_1 \Rightarrow r \in A, \quad r > \rho_1 \Rightarrow r \notin A$$

が成り立つので、$\rho_1 = \begin{cases} 0 & (A = \emptyset) \\ \sup A & (A \ne \emptyset) \end{cases}$. 同様に $\rho_2 = \begin{cases} 0 & (B = \emptyset) \\ \sup B & (B \ne \emptyset) \end{cases}$.

$\rho_1 = 0$ のときは $A = \emptyset$. $B \subset A$ であるから $B = \emptyset$. ゆえに $\rho_2 = 0$ であるから $\rho_1 = \rho_2$.

以下 $\rho_1 > 0$ とする。$A \ne \emptyset$ である。($A = B$ が成り立つとは限らないが、少し弱くした) 次が成り立つ。

$$(\sharp) \qquad (\forall r \in A)(\forall r' : 0 < r' < r) \quad r' \in B.$$

($\sharp$ の証明) $\dfrac{r}{r'} > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ であるから、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}$: $n \ge N)$ $\sqrt[n]{n} \le \dfrac{r}{r'}$. このとき $n \le (r/r')^n$ であるから、

$$n \, |a_n| \, r'^n \le \left(\frac{r}{r'}\right)^n \cdot |a_n| \, r'^n = |a_n| \, r^n.$$

ゆえに

$$\sum_{n=N}^{\infty} n \, |a_n| \, r'^n \le \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \, r^n < \infty.$$

ゆえに $r' \in B$ (($\sharp$) の証明終).

ゆえに $B \ne \emptyset$. $B \subset A$ であるから、$\rho_2 = \sup B \le \sup A = \rho_1$. もしも $\rho_2 < \rho_1$ が成り立つと仮定すると、$\rho_2 < r' < r < \rho_1$ となる r, r' が取れて、$r < \rho_1$ より $r \in A$. 一方 ($\sharp$) より $r' \in B$. ゆえに $\rho_2 = \sup B \ge r'$. これは $\rho_2 < r'$ に矛盾する。ゆえに $\rho_2 = \rho_1$.■

3.3.2 冪級数展開とは Taylor 展開に他ならない

冪級数は (もちろん) Taylor 展開と関係が深い。まずは冪級数に展開出来るならば、それは Taylor 展開に他ならないということを示す (後で、関数が正則であれば冪級数に展開できるということを示す)。

系 3.25 (冪級数に展開出来るならば、それは Taylor 展開である) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の定義する関数 f は、収束円 $D(c;\rho)$ の内部で無限回微分可能であり、$a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$. ゆえに

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho)).$$

証明　$D(c;R)$ で何回でも微分できて、$k\in\mathbb{N}$ とするとき、

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-c)^{n-k}.$$

ゆえに $f^{(k)}(c)=k!a_k$. ■

問 51. 収束冪級数について "係数比較" が可能なこと、つまり $c\in\mathbb{C}$, $r>0$, 複素数列 $\{a_n\}_{n\ge0}$ と $\{b_n\}_{n\ge0}$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^n \quad (|z-c|<r)$$

が成り立てば、$a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ であることを示せ。

(系 3.25 を使ってもらうことを想定しているが、$z=c$ の代入と、$(z-c)$ での割算を続けるという方法もある。後者の方法を用いる場合、一様収束の議論は不要かどうか、良く点検すること。)

以下、与えられた関数を冪級数で表す。つまり関数の冪級数展開の例をいくつかあげるが、これまでの議論から、次のことが分かることに注意しよう。

- 冪級数展開はただ一通りしかない。
- Taylor 展開は冪級数展開であり、冪級数展開は Taylor 展開である。
- どういうやり方でも、冪級数展開してしまえば、それは Taylor 展開である。

3.3.3　有理関数の冪級数展開

以下、主に有理関数の冪級数展開の例をあげる。基本的なテクニックとして等比級数の和の公式を用いる (そのテクニックに慣れることが後で役に立つことと、何かを求めるための方法が複数あることを体得すること[46]、2 つのねらいがある)。

例 3.26 $\dfrac{1}{1-z}$ は、公比 z の等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ の和の形をしている。この等比級数の収束条件は $|z|<1$ である。ゆえに

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad (|z|<1).$$

この冪級数の収束半径は 1 で、収束円は $D(0;1)$. ■

例 3.27

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{4+z}=\frac{1}{4\left(1+\frac{z}{4}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

収束するためには、$|-z/4|<1$ が必要十分である。すなわち $|z|<4$. ゆえに収束半径は 4, 収束円は $D(0;4)$. ■

[46] これは私の偏見なのかもしれないが、何かを求めるための方法を 1 つしか知らない場合に、「○○とは、この計算をして求まるもの」という理解 (?) をして、概念の定義がちゃんと頭に入っていない人がいるように感じている。

例 3.28 $a \neq 0$ とする。

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a(1-z/a)} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

収束するためには、$|-z/a| < 1$ であることが必要十分。すなわち $|z| < |a|$. ゆえに収束半径は $|a|$, 収束円は $D(0;|a|)$.

項別微分して

$$-\frac{1}{(z-a)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^{n+1}}z^{n-1}. = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{a^{n+2}}z^n.$$

ゆえに

$$\frac{1}{(z-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{a^{n+2}}z^n.$$

収束半径、収束円は微分で変わらないので、それぞれ $|a|$, $D(0;|a|)$. ■

例 3.29

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

収束 $\Leftrightarrow |-z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1, 収束円は $D(0;1)$.
(別解) $1+z^2 = (z-i)(z+i)$ と因数分解できるので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-i(1+iz)}-\frac{1}{i(1-iz)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+iz}+\frac{1}{1-iz}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-iz)^n+(iz)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{2}i^n z^n. ■\end{aligned}$$

有理関数は部分分数分解出来るので、これまで説明した方法で冪級数展開出来る

ことが分かる (原理的には)。有理式の部分分数分解は、高校でも登場し、微積分で有理関数の不定積分が初等関数で表されることの証明にも使われるが、詳しい説明が聴かされていないかもしれない。付録 G (p. 299) を用意したので、適宜参考にしてもらいたい。

例 3.30 $\dfrac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z+6}$ を 0 のまわりで冪級数展開 (Taylor 展開) してみよう。

$f(z) := \dfrac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z+6}$ とおく。$f(z)$ の分子 z^3-3z^2-z+5 を分母 z^2-5z+6 で割ると、商 $z+2$, 余り $3z-7$ であるから、

$$f(z) = \frac{(z+2)(z^2-5z+6)+3z-7}{z^2-5z+6} = z+2+\frac{3z-7}{z^2-5z+6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2-5z+6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できるので、

$$\frac{3z-7}{z^2-5z+6} = \frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3}$$

を満たす定数 A, B が存在する。これから $A=1$, $B=2$. ゆえに

$$f(z) = z+2+\frac{1}{z-2}+\frac{2}{z-3}.$$

$z+2$ の Taylor 展開はそれ自身である。

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad(\text{収束}\Leftrightarrow\left|\text{公比}\right|<1\Leftrightarrow|z/2|<1\Leftrightarrow|z|<2).$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\quad(\text{収束}\Leftrightarrow\left|\text{公比}\right|<1\Leftrightarrow|z/3|<1\Leftrightarrow|z|<3).$$

ゆえに

$$f(z)=z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

同類項をまとめておく[47]。

$$\begin{aligned}
f(z)&=z+2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\\
&=z+2-\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)-2\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{9}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)\\
&=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+z-\frac{z}{4}-\frac{2}{9}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n\\
&=\frac{12-3-4}{6}+\frac{36-9-8}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n\\
&=\frac{5}{6}+\frac{19}{36}z-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n.
\end{aligned}$$

この冪級数は $|z|<2$ ならば収束し、そうでないならば発散する。ゆえに収束半径は 2, 収束円は $D(0;2)$ である。■

もう一つ、部分分数分解をする例をあげておく。

例 3.31 $r(z)=\dfrac{6z^4-5z^3-51z^2-60z-35}{z^3-2z^2-7z-4}$ を 0 のまわりで冪級数展開せよ。

まず部分分数分解を行う。$r(z)$ の分子 $n(z):=5z^4-29z^3+39z^2+18z-25$ を分母 $d(z):=z^3-7z^2+15z-9$ で割ると、商が $5z+6$, 余りが $6z^2-27z+29$. つまり

$$n(z)=d(z)(5z+6)+6z^2-27z+29.$$

ゆえに

$$r(z)=\frac{n(z)}{d(z)}=\frac{(5z+6)d(z)+6z^2-27z+29}{d(z)}=5z+6+\frac{6z^2-27z+29}{d(z)}.$$

$d(z)=(z-1)(z-3)^2$ であるから

$$\frac{6z^2-27z+29}{d(z)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3}+\frac{C}{(z-3)^2}$$

---

[47] c のまわりで冪級数展開するとは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の形にする、ということである。a_n がすぐに分かるようになっているべきである。$a_0=\dfrac{5}{6}$, $a_1=\dfrac{19}{36}$ は計算しておくのが望ましい。

を満たす定数 A, B, C が存在する。分母を払った

$$6z^2 - 27z + 29 = A(z-3)^2 + B(z-1)(z-3) + C(z-1)$$

は恒等式である。

　$z=1$ を代入して $8 = 4A$ より $A = 2$.

　$z=3$ を代入して $2 = 2C$ より $C = 1$.

　最高次の係数を比較して $6 = A + B$ より $B = 4$.

　ゆえに

$$r(z) = 5z + 6 + \frac{2}{z-1} + \frac{4}{z-3} + \frac{1}{(z-3)^2}.$$

　$a \neq 0$ に対して、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - z/a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} z^n.$$

この級数が収束する $\Leftrightarrow$ $\left|\text{公比}\right| < 1 \Leftrightarrow |z/a| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$. ゆえに収束半径は $|a|$. ゆえに

$$\frac{1}{z-4} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 4).$$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 1).$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)^2} &= -\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n z^n \quad (\text{収束半径} = 1).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} r(z) &= 7 + 6z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{4^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1)(-1)^n z^n \\ &= 7 + 6z - \frac{5}{4} - \frac{5}{16} z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{4^{n+1}} z^n + 3 - 6z + \sum_{n=2}^{\infty} 3(n+1)(-1)^n z^n \\ &= \frac{35}{4} - \frac{5}{16} z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-5}{4^{n+1}} + 3(-1)^n (n+1)\right) z^n. \end{aligned}$$

収束半径が 1, 4 の冪級数の和なので、$\rho = 1$. ■

例 3.32 (原点でない点のまわりの冪級数展開) $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 の周りで冪級数展開してみよう。

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + (z-1)/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\dfrac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} (z-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-1)^n.$$

この冪級数が収束 $\Leftrightarrow$ $\left|\text{公比}\right| < 1 \Leftrightarrow |-(z-1)/4| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 4$ であるから、収束半径は 4 で、収束円は $D(1;4)$. ■

収束半径の計算がやや面倒になる例をあげておく。

例 3.33 (収束半径が等しい冪級数を加える場合は少し手間がかかる) $f(z) = \dfrac{-z^3+3z^2+8z+14}{z^2-2z-8}$ を 1 のまわりで冪級数展開しよう。まず $f(z)$ の部分分数分解は

$$f(z) = 1 - z + \frac{-3}{z+2} + \frac{5}{z-4}.$$

各項を冪級数展開すると

- $1 - z = -(z-1)$. この収束半径は $+\infty$.
- $\dfrac{-3}{z+2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}(z-1)^n$. この収束半径は 3.
- $\dfrac{5}{z-4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-5}{3^{n+1}}(z-1)^n$. この収束半径も 3.

以上を合わせて

$$f(z) = -\frac{8}{3} - \frac{11}{9}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - \frac{5}{3}}{3^n}(z-1)^n$$

という冪級数展開が得られるが、収束半径が等しい (共に 3) 2 つの冪級数を加えたため、収束半径がすぐには分からない。

$$a_n := \frac{(-1)^{n-1} - \frac{5}{3}}{3^n} \quad (n \geq 2)$$

とおくとき、

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3} \times \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/n} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \left(\frac{8}{3}\right)^{1/n} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \to \frac{1}{3} \quad (n \to \infty).$$

ゆえに Cauchy-Hadamard の定理から[48]

$$\rho = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 3. \blacksquare$$

後で、原始関数の存在が問題になることがあるので、一つ注意をしておく (冪級数に関しては簡単に「いつでも存在する」ことが言える)。

系 3.34 (収束冪級数の表す関数は原始関数を持つ) $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を複素数列、$c \in \mathbb{C}$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ が $\rho > 0$ を満たすとき、冪級数の和 $f(z)$ は収束円 $D(c;\rho)$ で原始関数 $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1}$ を持つ。

証明　$F(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ とおくと、収束半径は ρ と等しく、$F'(z) = f(z)$ を満たす。 $\blacksquare$

[48] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ は存在しないので、d'Alembert の定理を使って収束半径を求めることは出来ない。

例 3.35 (冪級数の原始関数) $f'(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, $f(0)=0$ を満たす関数 f の冪級数展開を求めよ。

$$f'(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}\quad (z\in D(0;1))$$

であるから

$$f(z)=定数+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1}\quad (z\in D(0;1)).$$

$f(0)=0$ から定数は 0 である。ゆえに

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1}\quad (z\in D(0;1)).$$

(後で、この f がいわゆる arctan であることが分かる。) ■

収束冪級数の表す関数はほとんど制限なく色々な計算が出来る。

例 3.36 (a_n が n の多項式のときの $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ の和) まず $\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n$ の和を求めてみよう。

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=-(z-1)^{-1}$$

を微分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=(z-1)^{-2}.$$

z をかけて

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\frac{z}{(z-1)^2}.$$

つまり微分して、z をかけることで、一般項に n をかけることが出来る。ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n=z\cdot\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)'=-\frac{z^2+z}{(z-1)^3}.$$

これから任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^kz^n$ の和が求まることが分かる。 ■

3.3.4 微分方程式の冪級数解法

例 3.37 (微分方程式の冪級数解) 原点中心の収束冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ で、$f''(z)=-f(z)$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$ を満たすものを求めよ。
(解答)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1},$$
$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nz^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n.$$

これが $-f(z)$ に等しいことから、係数を比較して

$$(\forall n \in \mathbb{Z} : n \geq 0) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n.$$

ゆえに $a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$. 一方 $f(0) = 1$ より $a_0 = 1$, $f'(0) = 0$ より $a_1 = 0$ が得られるので、

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}), \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

この収束半径は $+\infty$ である (省略 — 実は既にやったことがあるはず)。もう気づいていると思うが $f(z) = \cos z$. ■

この例の微分方程式は、定数係数線形微分方程式なので (というか単振動の方程式なので常識と言っても良い)、冪級数を使わないでも簡単に解くことが出来るが、この方法は変数係数の微分方程式の場合にも使うことが出来る。実際、数多くの微分方程式がその方法で解かれ、その解として新しい関数 (**特殊関数**) が豊富に導入された。例えば Gauss は超幾何微分方程式

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x)\,y' - \alpha\beta y = 0$$

の解として**超幾何関数** ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ を導入し、Bessel は Bessel の微分方程式

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \alpha^2\right) y = 0$$

の解として **Bessel 関数** $J_\alpha(x)$ を導入した。

3.4 冪級数による初等関数の定義: e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$

さて、冪級数を用いて関数を定義することで、一気に使える関数が増える。ここでは初等関数を複素関数として定義しよう。

(25) $$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

(26) $$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1},$$

(27) $$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1}.$$

これら冪級数の収束半径は $+\infty$ であり、和は $\mathbb{C}$ で正則な関数である。$z \in \mathbb{R}$ に対しては、高校数学や、大学 1 年時に微積分で学んだ関数に一致する。

実は $z \in \mathbb{R}$ で一致する正則関数は、$\mathbb{C}$ 全体で一致することが分かるので (後述の定理 9.5 —「一致の定理」— による)、複素関数論の立場からは、これらは唯一の拡張と考えて良い。

$e^z = \exp z$ については (以前 $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ と定義したので) 再定義となるが、以前と一致することが分かる。

冪級数による定義のみを用いて、「よく知っている」性質 (指数法則、加法定理、π との色々な関係など— π 自体も $\cos x$ の正の最小の零点の $1/2$ として (図形的議論を用いず) 定義できる (例えば高橋 [22] の第 1 章 §6 補題 4)。) を導くことも出来る。面白く (講義する立場でも楽しい)、有意義なことである (色々なことの復習が出来て、テクニックの勉強になる) と思われるが、それほど時間に余裕はないので、この講義では省略し、重要なところ、面白そうなところを演習問題で取り上げるにとどめる。

問 52. $z\in\mathbb{C}$ に対して $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ であることを示せ。
(右辺の式を冪級数で表してみれば良い。)

問 53. $(e^z)'=e^z$, $(\cos z)'=-\sin z$, $(\sin z)'=\cos z$ であることを確かめよ。
(項別微分すれば良い。)

例 3.38 指数法則 $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ を示せ。

(解答) 一般に「$\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty b_n$ がともに収束し、少なくとも一方が絶対収束するならば

$$\left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right)\left(\sum_{n=0}^\infty b_n\right)=\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{k+\ell=n}a_kb_\ell\right)=\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}\right)$$

が成り立つ。」という展開に関する定理が成り立つので (命題 A.25, p. 247)、

$$\begin{aligned}e^{z_1}e^{z_2}&=\sum_{n=0}^\infty\frac{z_1^n}{n!}\sum_{n=0}^\infty\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{k+\ell=n}\frac{z_1^kz_2^\ell}{k!\ell!}\right)=\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{k=0}^n\frac{z_1^kz_2^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^kz_2^{n-k}=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n\\&=e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

この定理を使わずに証明する方法については、次の問を見よ。■

問 54. (1) $f(z)=e^z$ が $f'(z)=f(z)$, $f(0)=1$ を満たすことを用いて、任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して、$f(z)f(c-z)=f(c)$ であることを示せ。(2) 任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して $e^ae^b=e^{a+b}$ であることを示せ。

問 55. (e^z を冪級数で定義したとき) $x,y\in\mathbb{R}$ に対して、$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ であることを示せ。

複素指数関数を (25) で再定義したわけだが、最初に (8) で定義したものと一致することが確かめられたので、複素指数関数についてこれまで得られた結果は全て有効なことが分かる。

余談 3.39 (指数関数のもう一つの定義法) 高校で

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\quad(x\in\mathbb{R})$$

という式を教わったかもしれない。このやり方を拡張して、任意の複素数 z に対して

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\tag{28}$$

で e^z を定義することも可能である。これが上で定義した e^z と等しいことを示すのはちょっとした演習問題である (後で導入する $\operatorname{Log} z$ を使えば、一致することを示すのは簡単である)。

(28) で e^z を定義するやり方について、もう少し詳しいことが知りたい場合は、遠山 [23], 宮永 [24] を見ると良い。■

問 56. (1) $\sin z = 0$ を解け。　(2) $\sin z = 2$ を解け (「解なし」ではない)。

この段階で解答出来ないわけではないが、後で対数関数を学ぶと見通しが良くなるので、例 4.7 を見よ。

問 57. $\cos(x+yi) = \cos x \sinh y - i \sin x \cosh y$, $\sin(x+yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ であることを示せ。(とりあえず $x, y \in \mathbb{R}$ として証明せよ。$x, y \in \mathbb{C}$ でも成り立つわけだが$\cdots$)

これらの関数については、とりあえず一段落と言って良いだろう。

以下は収束半径が有限であるものについて述べる。

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1).$$

ただし $\binom{\alpha}{n}$ は次式で定義される**一般 2 項係数**である:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

(例えば $\sqrt{\quad}$ なども $\sqrt{1+z} = (1+z)^{1/2}$ として、これに含めることが出来る。)

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \quad (|z| < 1).$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} \quad (|z| < 1).$$

これらの関数については、まだまだ満足の行く結果が得られたとは言えない (ここに書いた収束円の外でも関数が意味を持つので)。さらに頑張る必要がある。

$\tan^{-1} z$, $\log(1+z)$ については、実関数の範囲で

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1}, \quad \log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{t+1}$$

であったので、積分を実行したくなる。それもするけれど、しばしお待ちを。

$\tan z$ の冪級数展開が出て来ないが、それについては後述する (命題 7.15 を見よ。tan の定義そのものは、実関数のときと同じ $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ を使えば十分なので、当面問題はない)。

3.5 冪級数の収束円周上の点での収束発散, Abel の級数変形法, Abel の連続性定理

任意の冪級数について収束円が存在するという定理 (定理 3.3) を証明したが、その定理は、収束円 $D(c;\rho)$ の境界である円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = \rho\}$ 上の点 z での収束発散については、何も主張していない。それについて考察しよう。結論を一言で説明すると “ケース・バイ・ケース” である。

3.5.1 まずは例から

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ という簡単な冪級数が分かりやすい例となる。

すでに見たように、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ については収束半径は 1 であるが、等比級数として議論が出来て、より詳しく「$|z|<1 \Leftrightarrow z$ で収束」が分かる。特に円周 $|z|=1$ 上のすべての点で発散する。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ についても、容易に収束半径が 1 であることが分かる。$A_n := \dfrac{z^n}{n^2}$, $B_n := \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、$|z|=1$ のとき

$$|A_n| = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} = B_n.$$

また $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する。ゆえに優級数の定理が適用できて、$|z|=1$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ は絶対収束する (あるいは、Weierstrass の M-test を使うと、閉円盤 $\overline{D}(0;1)$ で一様に絶対収束することも分かる)。特に $|z|=1$ 上のすべての点で収束する。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ についても、収束半径が 1 であることはすぐ分かる。$z=1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

であることは良く知られている。$z=-1$ のときは、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

は、一般項の絶対値が 0 に収束する交代級数であるから、収束する (実は和は $-\log 2$ である)。

実は、$|z|=1$ かつ $z \neq 1$ を満たす任意の z に対してこの冪級数は収束する。そのことの証明に使える定理を紹介する。

3.5.2 Abel による 2 つの定理

(付録 A.6 も見ること。)

議論がやや面倒なので (時間がかかりがち)、授業では省略することがありうる。少なくとも証明は「後で」と言っておいて、結局は出来ませんでしたね、ごめんなさい、という可能性が高い。

まず、どういう応用があるかを書いておく。

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は $|z|=1$, $z \neq 1$ を満たす z について収束する。
- 次の有名な級数の和の証明[49]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots.$$

[49] これらは、微積分で個別に証明することが出来るが、複素関数の立場からは、正則関数の冪級数展開が収束円の内部でもとの関数と一致するという定理と、Abel の連続性定理を使うのが分かりやすい。

どちらの定理 **Abel の級数変形法**を用いて、比較的容易に証明できる。これは微積分の部分積分法の数列 (級数) バージョンと考えることが出来る (微分 $\longleftrightarrow$ 階差, 積分 $\int \longleftrightarrow$ 和 $\sum$)。

補題 3.40 (Abel の級数変形法, 部分求和公式, summation by parts) 数列 $\{\alpha_n\}_{n\ge 0}$, $\{\beta_n\}_{n\ge 0}$ があるとき、$s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ とおくと、

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_k = s_n\beta_n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right)$$

が成り立つ。

証明 $a_0 = s_0$, $a_k = s_k - s_{k-1}$ $(k \ge 1)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_k &= s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(s_k - s_{k-1}\right)\beta_k = s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k\beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1}\beta_k \\
&= s_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k\beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\beta_{k+1} = s_0\beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k\beta_k + s_n\beta_n\right) - \left(s_0\beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\beta_{k+1}\right) \\
&= s_0\left(\beta_0 - \beta_1\right) + \sum_{k=1}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n\beta_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n\beta_n. \blacksquare
\end{aligned}$$

これから次の定理が得られる。

命題 3.41 $\{\alpha_n\}_{n\ge 0}$ は部分和が有界な複素数列、$\{\beta_n\}_{n\ge 0}$ は単調減少して 0 に収束する数列とするとき、$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ は収束する。

証明 $s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ とおくと、仮定から $(\exists M \in \mathbb{R})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|s_n| \le M$. Abel の級数変形法により

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right) + s_n\beta_n.$$

右辺第 2 項について、$|s_n\beta_n| \le M\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから、$n \to \infty$ とするとき、$s_n\beta_n \to 0$.

右辺第 1 項については

$$\left|s_k\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right)\right| \le M\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right), \quad \sum_{k=0}^{n} M\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right) = M\beta_0 - M\beta_{n+1} \to M\beta_0$$

であるから、優級数の定理より、$n \to \infty$ のとき $\sum_{k=0}^{n-1} s_k\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right)$ は収束する。

ゆえに、$n \to \infty$ のとき、$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_k$ は収束する。 $\blacksquare$

例 3.42 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は $|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす z に対して収束する。実際、$\alpha_n := z^n$, $\beta_n := \dfrac{1}{n}$ とおくとき、

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|\frac{z(1-z^n)}{1-z}\right| \le \frac{|z|\,(1+|z^n|)}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$$

であるから $\{\alpha_n\}$ の部分和は有界であり、$\{\beta_n\}$ は単調減少して 0 に収束する。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ は収束する。■

有名な Abel の連続性定理を証明するために、補題 3.40 を少し一般化しよう。

補題 3.43 数列 $\{\alpha_n\}_{n\ge 0}$, $\{\beta_n\}_{n\ge 0}$ があるとき、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、$s_n := \displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha_k$ $(n \ge m)$ とおくと、

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha_k\beta_k = s_n\beta_n + \sum_{k=m}^{n-1} s_k\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right)$$

が成り立つ。

証明 補題 3.40 の証明と同様である。■

定理 3.44 (Abel の連続性定理 (Abel's continuity theorem)) 冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ $(R > 0)$ で収束したとする。このとき、任意の $K > 1$ に対して、

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < R,\quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \le K \right\}$$

とおくと、冪級数 $f(z)$ は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。ゆえに関数 f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。特に

$$\lim_{\substack{z\in\Omega_K\\ z\to R}} f(z) = f(R).$$

さらに

$$\lim_{\substack{x\in[0,R)\\ x\to R}} f(x) = f(R).$$

(Ω_K の「形」が見たければ、例えば Mathematica で `R=1; Manipulate[ RegionPlot[ x^2 + y^2 < R^2 && Abs[1 - (x + I y)/R]/(1 - Abs[x + I y]/R) <= K, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}], {K, 1, 10, 0.1}]` とする。K を大きくすると…)

$|z| < R$ のとき、$|1 - z/R| \ge 1 - |z|/R > 0$ であるから $\dfrac{|1-z/R|}{1-|z|/R} > 1$. ゆえに $K \le 1$ なる K に対して、Ω_K を上と同じ式で定義すると、$\Omega_K = \emptyset$ である。

証明 K を任意の正の数とする。z を Ω_K の任意の要素とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\alpha_n := a_n R^n, \quad \beta_n := \left(\frac{z}{R}\right)^n, \quad f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

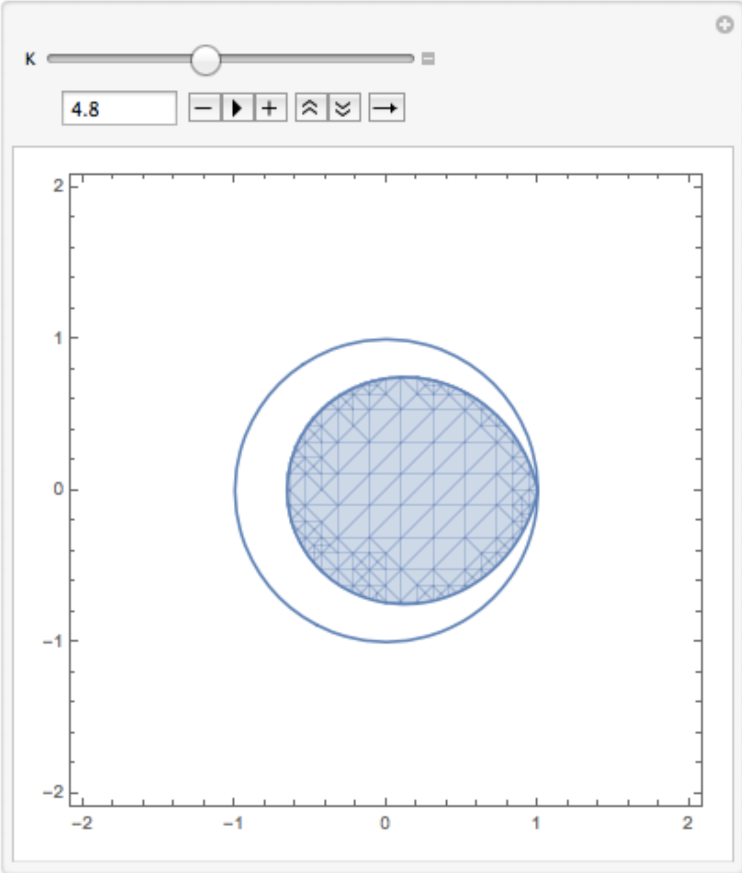


図 3: $R=1,\ K=4.8$ の場合の Ω_K と円周 $|z|=R$

とおく。$a_k z^k = \alpha_k \beta_k$ であり、

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k,\quad f_n(R)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.$$

$|z|<R$ であるから、

$$|\beta_n|=\left(\frac{|z|}{R}\right)^n<1.$$

また

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n-\beta_{n+1}|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{z}{R}\right)^n\left(1-\frac{z}{R}\right)\right|=\frac{|1-z/R|}{1-|z|/R}\le K<\infty.$$

仮定から $\lim_{n\to\infty} f_n(R)=f(R)$ であるから、$\{f_n(R)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるので、次式が成り立つ[50]。

(29) $$\lim_{n\to+\infty}\sup_{\ell>n}|f_\ell(R)-f_n(R)|=0.$$

$m,n\in\mathbb{N},\ m>n$ とするとき、補題 3.43 から

$$f_m(z)-f_n(z)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k=\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k\beta_k=\sum_{k=n+1}^{m}s_k(\beta_k-\beta_{k+1})+s_m\beta_m.$$

[50] 任意の正数 ε に対して、十分大きい N を取ると、$n,m\ge N$ ならば $|f_m(R)-f_n(R)|<\varepsilon$. ゆえに $\sup_{\ell>n}|f_\ell(R)-f_n(R)|\le\varepsilon$.

ただし $s_k := \displaystyle\sum_{j=n+1}^{k} \alpha_j$ とおいた。$s_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j = f_k(R) - f_n(R)$ であるから、

$$|s_k| = |f_k(R) - f_n(R)| \le \sup_{\ell > n} |f_\ell(R) - f_n(R)| \,.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
|f_m(z) - f_n(z)| &\le \sum_{k=n+1}^{m} |s_k|\,|\beta_k - \beta_{k-1}| + |s_m|\,|\beta_m| \\
&\le \sup_{\ell > n} |f_\ell(R) - f_n(R)| \left(\sum_{k=n+1}^{m} |\beta_k - \beta_{k+1}| + |\beta_m| \right) \\
&\le (K+1) \sup_{\ell > n} |f_\ell(R) - f_n(R)| \,.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_m(z) = f(z)$ であるので (これは既に証明済みの定理を使っても良いし、この不等式から $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるから収束する、としても良い)、この不等式で $m \to \infty$ として

$$|f(z) - f_n(z)| \le (K+1) \sup_{\ell > n} |f_\ell(R) - f_n(R)| \,.$$

z についての上限を取って

$$\sup_{z \in \Omega_K} |f(z) - f_n(z)| \le (K+1) \sup_{\ell > n} |f_\ell(R) - f_n(R)| \,.$$

(29) より、関数列 $\{f_n\}$ は Ω_K で f に一様収束する。■

余談 3.45 (Stolz の路) 多くのテキストで、Abel の連続性定理は、

> 「$\alpha \in (0, \pi/2)$ を満たす任意の α に対して、$|\arg(z - R) - \pi| < \alpha$ を満たしながら、$z \to R$ とするとき (このことを「Stolz の路に沿って $z \to R$ とする」という)、$f(z) \to f(R)$ が成り立つ。」

という形で与えられている。つまり

$$\lim_{\substack{|\arg(z-R)-\pi|<\alpha \\ z \to R}} f(z) = f(R). \tag{30}$$

実は、z が扇形

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - R| < R\cos\alpha,\ |\arg(z - R) - \pi| < \alpha\}$$

に属するとき (図が欲しい…)

$$\frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} = \frac{|\,R - z\,|}{R - |z|} < 2\sec\alpha \quad (\text{念のため: } \sec = \frac{1}{\cos})$$

が成り立つ (証明は省略する。辻・小松 [25] の p. 91 に載っている。)。すなわち、$K := 2\sec\alpha$ とおくと $z \in \Omega_K$ が成り立つ。ゆえに上の定理 3.44 を用いれば、(30) はすぐに証明できる。■

例 3.46 (有名なグレゴリー・ライプニッツ級数について)

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z| < 1) \tag{31}$$

とおく。収束半径は 1 とすぐ分かる。ゆえに f は $D(0;1)$ で正則である、

冪級数 $f(z)$ は $z=1$ で収束するので (絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数だから)、Abel の連続性定理より

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=f(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in[0,1)}} f(x).$$

$f(z)$ が、$z=x\in(-1,1)$ のとき実関数の $\tan^{-1}x$ と一致することは証明しやすい (ここでは認めることにする)。$\tan^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は連続であることから、右辺の極限は $\tan^{-1}=\frac{\pi}{4}$ に等しい:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

以上の論法は慣れると便利である (多くの場合に同じ論法が使えるので、考える手間が省ける)。

この論法を使わずに、微積分の知識だけで $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\cdots$ の証明が出来ないわけではないが (付録の A.9 を見よ)、少し手間がかかるし、一般化しにくい議論になりがちである。■

余談 3.47 (Abel とはどういう人) 昔は、Abel は若くしてなくなった天才であるということを、学生も良く知っていたと思うのだけど、最近そういうのに疎い人が多いような気がするので、少し紹介しておく。

Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー) は、冪級数の収束発散についての基礎を確立した (定理 3.23, 補題 3.40, 定理 3.40)。それ以外に

1. α が一般の複素数であるときの $(1+x)^\alpha$ の展開 (一般 2 項定理) の証明
2. 5 次以上の代数方程式が有限回の四則と冪根では解けないことの証明
3. 楕円関数論

などの仕事を行った。後の二つは、数学読み物にも良く出て来る偉大な仕事である。(偉大な数学者は、彼らの名前を有名にした大きな業績以外に、基礎的なことへの貢献も大きいことが多い、と感じている。Abel は良い例である。) ■

4 複素関数としての対数関数と冪関数

この節では、対数関数を複素関数に拡張するが、それは変数の 1 つの値に対して、関数の複数の値が対応する**多価関数**となる。これは、前節までに論じた多項式関数、有理関数、指数関数、三角関数、双曲線関数には見られなかった特徴である。

実は、冪関数 $w=z^\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$)、逆三角関数、逆双曲線関数も多価関数となるが、これらは対数関数を使って表されるので、これら関数の多価性は、対数関数の多価性を通じて理解できる。(前節で、いくつかの関数は、その Taylor 展開の収束半径が有限で収束円が $\mathbb{C}$ 全体ではない、と述べたこと[51]とも関係がある。)

この節は短いけれども非常に重要である。

[51](復習) $\log(1+z)=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$, $(1+z)^\alpha=\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}z^n$, $\tan^{-1}z=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{2k+1}z^{2k+1}$. これら冪級数の収束半径はすべて 1 である。

4.1 複素対数関数 $\log z$

4.1.1 log の Taylor 展開 (繰り返しになるのでスキップしても良い)

log の Taylor 展開について、微積の本によく載っているのは、

$$(\sharp)\qquad \log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(|x|<1)$$

である。これは

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\quad(|x|<1)$$

を項別に積分したものである。これから変数を複素数にして

$$(\natural)\qquad \log(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n\quad(|z|<1)$$

と定義することが考えられるが、変数の範囲が半径 1 の円に限られるのでは、満足できない。もともと log について

$$\lim_{x\to+0}\log x=+\infty\qquad\left(\text{つまり}\ \lim_{x\to-1+0}\log(1+x)=+\infty\right)$$

であるから、($\sharp$) が $z=-1$ で意味を持たないのは、ある意味で仕方がないが、「もっと右に行けるはず」である。これは複素変数に拡張するために冪級数展開に頼ったからとも言える。

4.1.2 方程式 $e^w=z$ を解く

実関数としての log は、$\log\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ であり、指数関数 $\mathbb{R}\ni x\mapsto e^x$ の逆関数であった。すなわち $y\in\mathbb{R}$, $x\in(0,\infty)$ に対して

$$y=\log x\quad\Leftrightarrow\quad x=e^y.$$

そこで、指数関数の逆関数として対数関数を定義することを考えよう[52]。そのためには、$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が与えられたとき[53]、方程式 $z=e^w$ を w について解く必要がある。

$w=u+iv$ $(u,v\in\mathbb{R})$ とおくと、$e^w=e^ue^{iv}$ となり、この右辺は極形式に近いので、z を極形式で表すのが良さそうである。

$$z=re^{i\theta}\quad(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$$

とおく。

$$\begin{aligned}z=e^w&\Leftrightarrow re^{i\theta}=e^ue^{iv}\\&\Leftrightarrow r=e^u\wedge e^{i\theta}=e^{iv}.\end{aligned}$$

(念のため、おさらい: $re^{i\theta}=e^ue^{iv}$ の両辺の絶対値を取ることで $r=e^u$ が得られ、それを $re^{i\theta}=e^ue^{iv}$ に代入して割算して $e^{i\theta}=e^{iv}$ を得る。)

---

[52] これ以外に、積分による表現 $\log x=\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t}$ を一般化するというやり方もある。

[53] すでに指数関数の値は 0 にならないことが分かっているので、$z\neq 0$ とする。

$$\begin{aligned} z = e^w &\Leftrightarrow u = \log r \wedge v \equiv \theta \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow u = \log r \wedge (\exists n \in \mathbb{Z})\ v = \theta + 2n\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad w = \log r + i\left(\theta + 2n\pi\right). \end{aligned}$$

分かったことをまとめておく。

定理 4.1 ($e^w = z$ を解く) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が与えられたとき、w に関する方程式 $e^w = z$ の解は存在し、それらは z の極形式を $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\, \theta \in \mathbb{R})$ とするとき、

$$w = \log r + i\left(\theta + 2n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と表される。これは

$$w = \log|z| + i \arg z$$

と書くことも出来る。

例 4.2 (ゆっくり慣れよう) 色々な z の値に対し、実際に $e^w = z$ の解を求めてみよう。

$e^w = 0$ の解は存在しない (上でもやったし $e^w e^{-w} = e^{w-w} = e^0 = 1 \neq 0$ からも分かる)。

$e^w = 1$ の解は $w = \log|1| + i \arg 1 = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = 2$ の解は $w = \log|2| + i \arg 2 = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$x > 0$ とするとき $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$. つまり $2n\pi i$ をくっつければ良い。

$e^w = -1$ の解は $w = \log|-1| + i \arg(-1) = 0 + (2n-1)\pi i = (2n-1)\,\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -2$ の解は $w = \log|-2| + i \arg(-2) = \log 2 + (2n-1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = i$ の解は $w = \log|i| + i \arg i = 0 + (2n+1/2)\pi i = (2n+1/2)\,\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = 2i$ の解は $w = \log|2i| + i \arg(2i) = \log 2 + (2n+1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$. ■

4.1.3 複素関数 $\log z$ の定義

さて、それでは複素関数 $\log z$ をどう定義したら良いか？上の $e^w = z$ の解を見れば、z の偏角 $\arg z$ をどう定義するかとほとんど同じであることが分かる。

(ここでは複数の log が出て来るので、色で区別して見た。実関数としての対数関数は黒 (板書では白)、無限多価関数としての対数関数は赤、適当に偏角の値を制限して (そのやり方は色々ある) 一価関数にしたものは青、特に $(0, 2\pi)$ の範囲に制限したものは緑 (板書では黄色)。このやり方が良いと確信しているわけではなく、毎年模索中である。色チョークは見にくい場合もあるし、色覚の個人差もあるし。)

(i) 気前よく $e^w = z$ を満たす w すべてを表すことにしてみよう。つまり

$$\begin{aligned} \log z &:= \log|z| + i \arg z \\ &= \log|z| + i\left(\theta + 2n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、$\log z$ という式は無限個の複素数値を表すことになる。log は普通の意味では関数・写像ではないが、無限**多価関数**と呼ばれる。これに対し、(任意の z に1つの値だけが対応する) 普通の関数を (対比させる意味で) **一価関数**という。

一方、適当なルールで、z の偏角をただ一つだけ選ぶことにより、複素関数 $\log z$ を正則な一価関数として定義することも出来る。そうしたとき、その一価関数を、多価関数 $\log z$ の**分枝**(ぶんし) (**branch**) と呼ぶ。

(ii) 幅 2π の半開区間 I を選ぶ。例えば $I = [0, 2\pi)$ や $I = (-\pi, \pi]$ など。(一般化すると、$\alpha \in \mathbb{R}$ として、$I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ や $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$.)

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、

$$z = re^{i\theta} \quad (r > 0,\ \theta \in I)$$

となる r, θ が一意的に定まる。この r, θ を用いて

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。

$\log\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ であり、値域は $\{u + iv \mid u \in \mathbb{R},\ v \in I\}$ である。

(a) 特に $I = (-\pi, \pi]$ としたとき、この $\log z$ を**対数関数の主値**と呼び、$\operatorname{Log} z$ と表す。すなわち

$$\operatorname{Log} z := \log r + i\theta, \quad \text{ただし } z = re^{i\theta}\ (r > 0,\ -\pi < \theta \le \pi).$$

$\operatorname{Log}\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ であり、値域は $\{u + iv \mid u \in \mathbb{R},\ -\pi < v \le \pi\}$ である。

Log は偏角の主値 Arg を用いて表せる:

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Log は、負の実数全体 $N := \{z \in \mathbb{C} \mid z < 0\}$ 上の任意の点で不連続である。(x を任意の負の実数とするとき、z を「上岸」から x に近付けるとき $\operatorname{Im} \operatorname{Log} z \to \pi$, z を「下岸」から x に近付けるとき $\operatorname{Im} \operatorname{Log} z \to -\pi$.

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{Log} z = \log |x| + i\pi, \qquad \lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z < 0}} \operatorname{Log} z = \log |x| - i\pi.$$

従って $z \to x$ のとき $\operatorname{Log} z$ は極限を持たない。)

(図が必要である。)

Mathematica で見てみよう

プログラミング言語の複素対数関数は主値を計算するのが普通である。Mathematica では `Log[]` で対数関数の主値が計算できる。

$\operatorname{Im} \operatorname{Log} z$ のグラフは螺旋階段のような感じ。

```
Plot3D[Boole[x^2+y^2<4] Im[Log[x + I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```

(`Boole[]` はなくても良い。)

マウスでグラフをつかまえて動かしてみると様子が分かる。

ついでに $\operatorname{Re} \operatorname{Log} z$ のグラフも描いてみよう。描く前に想像できるだろうか。

無限多価関数 $\log z$ について、$\operatorname{Im} \log z$ のグラフを想像してみよう。

しかし、負の実数と 0 を除いた集合 $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \le 0\}$ に制限すると、正則 (当然連続) になる。

これは指数関数を $\Omega_{(-\pi,\pi)} := \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$ に制限した写像

$$f\colon \Omega_{(-\pi,\pi)} \to \mathbb{C}, \quad f(w) = e^w \quad (w \in \Omega_{(-\pi,\pi)})$$

の逆関数である (単射でない関数を小さい集合に制限することで単射にして逆関数を作る、という良くある話である)。複素関数に対しても、逆関数の微分、逆関数定理は成り立つので[54]、Log は正則であることが分かる。$z = f(w)$ とするとき、$\dfrac{dz}{dw} = e^w = z$ であるから、$\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{z}$. すなわち

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z} \tag{32}$$

が成り立つ。

他のやり方もありうる。

(b) これも良く使われるやり方だが、z の偏角を $[0, 2\pi)$ の範囲に選ぶ (それを主値と呼ぶ人もいるそうである)。つまり $z = re^{i\theta'}$, $r > 0$, $\theta' \in [0, 2\pi)$ として、

$$\log z := \log r + i\theta'$$

とする。

$\log\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ (普通の関数) であるが、正の実数全体 $P := \{z \in \mathbb{C} \mid z > 0\}$ 上の任意の点で不連続である。しかし、正の実数と 0 を除いた集合 $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \geq 0\}$ に制限すると、正則 (当然連続) になる。

これは指数関数を $\Omega_{(0,2\pi)} := \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$ に制限した写像

$$g\colon \Omega_{(0,2\pi)} \to \mathbb{C}, \quad g(w) = e^w \quad (w \in \Omega_{-\pi,\pi})$$

の逆関数である。$z = g(w)$ とするとき、$\dfrac{dz}{dw} = e^w = z$ であるから、$\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{z}$. すなわち

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} \tag{33}$$

が成り立つ。

(ii)-(a) の Log も (ii)-(b) の log も、実関数としての log の拡張になっている、つまり

$$(\forall x \in (0, \infty)) \quad \log x = \operatorname{Log} x = \log x.$$

(それ以外の任意の log については、この関係が成り立つとは限らない。)

余談 (?): (ii)-(a) の Log は N で不連続、(ii)-(b) の log も P で不連続と聞くと、「気持ち悪い」と感じるかもしれないが、後でその不連続性を利用した計算を行なったりする。

余談 4.3 (常微分方程式 $dy/dx = ay$ を解く) a を定数とするとき、常微分方程式 $dy/dx = ay$ の解は $y = Ce^{ax}$ (C は任意定数) というのは、常識的なことだけれど、これを次のように解く人がいる。

[54] 逆関数の定理は現時点では一般に証明していないが、指数関数は導関数が連続であるから、2.5.4 の議論だけで逆関数が正則であることが証明できる)。

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int a\,dx$ より $\log|y| = ax + C$ (C は積分定数). ゆえに $|y| = e^{ax+C} = e^C e^{ax}$. ゆえに $y = \pm e^C e^{ax} = C' e^{ax}$. ただし $\pm e^C$ を C' とおいた。

実数の世界だけで考える場合は (分母が 0 になる場合の問題をおいておけば) これでも構わないけれど、関数の値だけでも[55]複素数を使う場合は、かなり悩ましいことが分かるだろうか？じっくり考えてみることを勧める。大学の微分方程式の授業では、定数係数線形常微分方程式に対する特性根の方法というのを教わるはずなので、それを使うようにしよう。■

授業メモから (こちらにマージする)

以上の話は対数関数の主値に限らない。幅 2π の任意の半開区間 $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ あるいは $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$ を選んで、$z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in I$) に対して

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

と定めた log も、N を

$$N_\alpha := \left\{ re^{i\alpha} \mid r \geq 0 \right\}$$

とおいて $\mathbb{C} \setminus N$ に制限すると正則関数になり、

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

すでに述べたように、一価関数にした log を対数関数の分枝と呼ぶが、N のように、それを除くことで 1 つの分枝を截(き)り出すことができる曲線 (普通は半直線や線分を選ぶ) を、分岐截線(せっせん) (branch cut) と呼ぶ。

4.2 冪関数 z^α

(この項では複素関数 $\log z$ が現れるが、前項のように色で区別するのはさぼる。今その記号がどういう意味で使われているか「文脈を読み取って」読む必要がある。)

実数 a, b に対して、a の b 乗 a^b はいつでも定義されるわけではなかった ($(-1)^\pi$ はいくつ？詳しいことは省略)。$a > 0$ の場合は

$$a^b = e^{b \log a} \tag{34}$$

となっていた。この関係を複素数に拡張して、複素数の冪関数 z^α を定義しよう。

問 58. $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ のとき、$a^b = e^{b \log a}$ が成り立つことを示せ。

これまで定義してあるものと区別するため、しばらく z^α でなく $p(z, \alpha)$ と書くことにする (p は冪 (power) の頭文字のつもり)。

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$p(z, \alpha) := e^{\alpha \log z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \tag{35}$$

とおく。$\log z$ は複素関数であり、一つの分枝を選ぶこともあるし、多価関数とすることもある。前者の場合は、$p(z, \alpha)$ は当然一価関数である。後者の場合は $p(z, \alpha)$ は多価関数となりうるが、一価関数の場合もある (詳しくは以下に述べる)。

[55] 変数の方が実数ならば大丈夫かと考えていたときもあったけれど…

z の極形式 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) を用いると、

$$p(z,\alpha) = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

簡単のため、最初は $\alpha \in \mathbb{R}$ のときのみ考えることにする。このとき $\alpha \log r \in \mathbb{R}$, $\alpha(\theta + 2n\pi) \in \mathbb{R}$ である。また $e^{\alpha \log r} = \left(e^{\log r}\right)^\alpha = r^\alpha$ であるので、

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$e^{2\pi i n\alpha}$ がどういう値を取りうるか、場合分けして調べてみる。

(a) $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、$n\alpha \in \mathbb{Z}$ であるから、$e^{2\pi i n\alpha} = 1$. ゆえに

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = \left(re^{i\theta}\right)^\alpha = z^\alpha.$$

(この z^α は、$\alpha > 0$ ならば α 個の z の積、$\alpha < 0$ ならば $-\alpha$ 個の z の積 $z^{-\alpha}$ の逆数を表す。)

(b) $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき、

$$\alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z},\ p \geq 2,\ p \text{ と } q \text{ は互いに素}) \tag{36}$$

と表せる (既約分数表示)。そうすると

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad \omega := e^{2\pi i/p}$$

p と q が互いに素であるので、n が $\mathbb{Z}$ を動くとき、nq を p で割った余りには、$0, 1, \dots, p-1$ がすべて現れる[56]。ω^{nq} は、$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}$ のどの値も取る[57]。ゆえに

$$p(z,\alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

これらは円周 $|z| = r^\alpha$ の p 等分点である。特に $\alpha = \dfrac{1}{p}$ ならば、z の p 乗根に等しい。

(c) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ ならば実は $p(z,\alpha)$ は無限個の値を持つ。(この場合はあまり使わないだろうから、証明は省略する。)

$p(z,\alpha)$ を図示する Mathematica プログラム

```
p[z_, alpha_, maxn_] := Module[{r, t, w},
  r = Abs[z]; t = Arg[z];
  w = r^alpha*Exp[ alpha t];
  Table[{Re[w Exp[I n alpha 2 Pi]], Im[w Exp[I n alpha 2 Pi]]}, {n, maxn}]]

g8=ListPlot[p[1,1/8,8], AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{PointSize[0.03]}]

groot2a=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 100], AspectRatio -> Automatic]

groot2b=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 1000], AspectRatio -> Automatic]

Manipulate[
 ListPlot[p[1, Sqrt[2], n], AspectRatio -> Automatic], {n, 1, 1000}]
```

今後は、この $p(z,\alpha) = e^{\alpha \log z}$ のことを断りなく z^α と書く。また $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ のとき、$\sqrt[n]{z}$ とも書く。特に $n = 2$ のときは $\sqrt{z}$ と書く。

[56]実際、p と q は互いに素であるから、$(\exists k, \ell \in \mathbb{Z})$ $kp + \ell q = 1$. ゆえに任意の m に対して、$mkp + m\ell q = m$. ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m であるから、$\omega^{(m\ell)q} = \omega^m$.

[57]さっきの続きで、$n := m\ell$ とおくと、$\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp}\omega^m = \omega^m$.

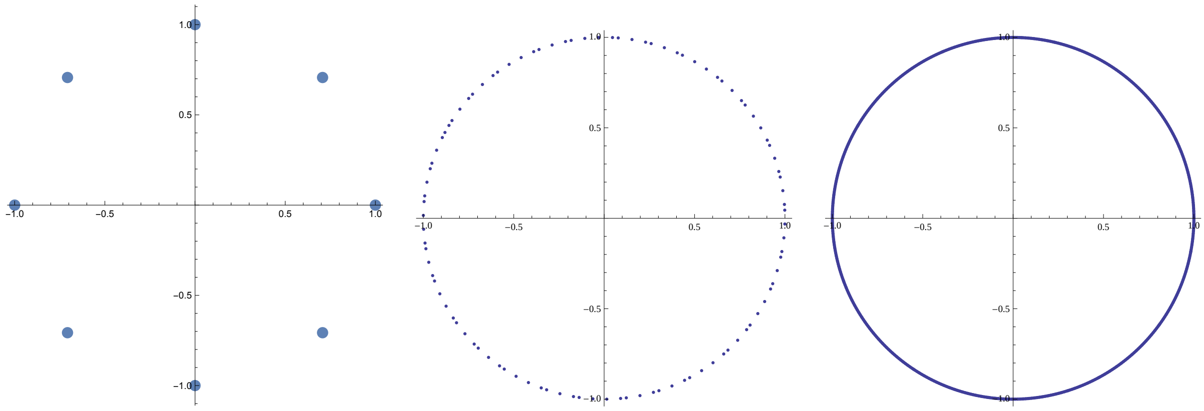


図 4: $p(1,1/8)$, $p(1,\sqrt{2})$ ($1\le n\le 100$ の 100 個), $p(1,\sqrt{2})$ ($1\le n\le 1000$ の 1000 個)

例 4.4 ($\sqrt{-1}$ は何か？) $(-1)=1\cdot e^{\pi i}$ より $\log(-1)=\log 1+i(\pi+2n\pi)=(2n+1)\pi i$ ($n\in\mathbb{Z}$) であるから、

$$\sqrt{-1}=(-1)^{1/2}=e^{\frac{1}{2}\log(-1)}=e^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi i}=e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}=i(-1)^n=\pm i.$$

(別法) $\alpha=\frac{1}{2}$, $z=-1$ とすると、$z=1\cdot e^{\pi i}$, $\omega=e^{2\pi i/2}=e^{\pi i}=-1$ であるから、

$$\sqrt{-1}=z^{1/2}=1^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\cdot\pi i}\cdot\omega^k=i\cdot(-1)^k\quad(k=0,1)$$

ゆえに

$$\sqrt{-1}=\pm i.\blacksquare$$

例 4.5 多分応用はないと思うが、i^i を求めてみよう。i の極形式は $i=1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ であるから

$$\log i=\log|1|+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

ゆえに ($a^b=e^{b\log a}$ によって)

$$i^i=e^{i\log i}=e^{i\cdot\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i}=e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\quad(n\in\mathbb{Z}).\blacksquare$$

ここまでに分かったことのまとめ

(a) $\alpha\in\mathbb{Z}$ ならば、z^α は、これまで使ってきた記号と同じ意味になる。

(b) $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ ならば、α の既約分数表示を $\alpha=\dfrac{q}{p}$ ($p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Z}$) とすると、z^α は p 価関数であり、p 個の値は複素平面内の原点中心の円周の p 等分点である。

(c) $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ならば、z^α は無限多価関数である。

心構え: まず注意が必要であることを理解する。$z^\alpha=e^{\alpha\log z}$ と $\log z=\log r+i(\theta+2n\pi)$ (ただし $z=re^{i\theta}$ とする) を使えば、後は地道な計算である。α が整数、有理数、それ以外で異なる。

($\sqrt{z}=z^{1/2}$ の話をしたいけれど…これは分枝を選ばず、多価関数とするときは、二価関数。)

余談 4.6 (0^0 をめぐって (長い話)) 数学を学んでいて、「0^0 は何か？」という話が時々出て来る。冪 (累乗) a^b について、$b\in\mathbb{N}$ の場合はほとんど問題にならないが[58]、そうでない場合は、

[58]もちろん、b 個の a の積という意味に取る — 積さえ定義できれば、数でない場合 (例えば多項式や行列など) にも自然に拡張できる。

後で便利であるように定義する、という基本方針でやっている。他の初等的な数学的概念と同様に、数学の学習の進行に沿うように定義を拡張して行く。数の冪乗について、ほぼ最終地点まで到達したので、0^0 について考えてみよう。

Wikipedia (英語版) に

> Zero to the power of zero
> https://en.wikipedia.org/wiki/Zero_to_the_power_of_zero

という記事があり、良くまとまっている。

最初のパラグラフは以下のようになっている。

> Zero to the power of zero, denoted by 0^0, is a mathematical expression with no agreed-upon value. The most common possibilities are 1 or leaving the expression undefined, with justifications existing for each, depending on context. In algebra and combinatorics, the generally agreed upon value is $0^0 = 1$, whereas in mathematical analysis, the expression is sometimes left undefined. Computer programs also have differing ways of handling this expression.

これはなかなか優れたまとめだと思う。直訳すると、概ね以下のようになるであろう。

> 0 の 0 乗 (0^0 と表される) は、合意された値を持たない数式です。最も普通な可能性は、1 であるか、その式を未定義のままにしておく、というものです。いずれも文脈によって正当な理由があります。代数学や組み合わせ数学では、$0^0 = 1$ であると、一般的に合意されています。しかし解析学では、この式はしばしば未定義とされます。コンピューターのプログラムでも、この式は色々な取り扱い方があります。

Wikipedia の記事には、TeX の開発者として数学者村でも有名な D. Knuth (数学者かつ computer scientist) は、$0^0 = 1$ と定義すべきであると力説しているとか、色々面白い話も載っているが、この文書は関数論の講義ノートであるから、解析学の立場というものを説明してみよう。

まずは微積分の復習から始めよう。多変数の微分積分学を学ぶとき、以下の例に遭遇したかもしれない (私は「数学解析」という授業で話すことが多い)。

$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0 \land y \ge 0 \land (x,y) \ne (0,0)\}$ とするとき、$f(x,y) = x^y$ $((x,y) \in \Omega)$ によって定義された関数 f は、

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} x^0 = 1, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0^y = 0$$

を満たすので、極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。ゆえに、f を $(0,0)$ を含む集合まで連続関数として拡張することはできない。

次に現在学習中の複素関数論の立場から見てみよう。今回 $a^b = e^{b\log a}$ という関係式を用いて、複素数の範囲にまで冪乗を拡張したが、$a = 0$ の場合は定義していないことは注意しておくべきであろう。0 は log にとってある種の特異点であるので、ここでのやり方で $a = 0$ の場合まで拡張するのが難しいことは理解できるであろう。

(少し脱線になるが) $0! = 1$ という式が、関数論の立場からすると、ガンマ関数 Γ の 1 での値が 1 である ($\Gamma(1) = 1$) ことから、自然な式に思えるのとは対照的な感じがする[59]。

[59] 微積分の段階で $x > 0$ に対して $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ が定義され、$n > 1$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることは容易に証明できる。$\Gamma(1) = 1$ であるから、$\Gamma(n) = (n-1)!$ という式が $n = 1$ についても成立するには、$0! = 1$ と定義すれば良い。ガンマ関数は複素関数に拡張され、1 は特異点ではない。

Wikpedia の記事で「解析学では、この式はしばしば未定義とされます」とあるが、未定義とする理由は、おおむね上の 2 つの話が根拠になっていると考えられる[60]。

以上のような話だけだと「解析学をやっているときは $0^0 = 1$ は未定義だ」という誤解が生じそうなので、ここまで読んだ人は、もう少し話につきあって下さい。

解析学の中にも代数はある。実は $0^0 = 1$ ということは良く使っている。例えば微積分でも Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{37}$$

や二項定理

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} \tag{38}$$

などの式が頻出するが、(37) では、$n = 0$ かつ $x = a$ のとき、(38) では、$r = 0$ かつ $a = 0$ のとき、または $r = n$ かつ $b = 0$ のとき、0^0 が登場する。これらの場合、いずれも $0^0 = 1$ と解釈することになっている (そうしないと等式が成立しない)。

代数の立場では、多項式 (あるいはその極限だから)、と説明するものかもしれない。例えば 1 変数 x の多項式とは、

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

という形をした式のことをさすが、これは普通 $\sum$ を用いて

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}$$

と表される。$j = n$ に対する項は $a_n x^0$ であるが、これが a_n を表すためには $x^0 = 1$ である必要がある。$x = 0$ を代入できるためには $0^0 = 1$ でなければならない。

代数学では、多項式は基本中の基本であるから、「代数学や組み合わせ数学では、$0^0 = 1$ であると、一般的に合意されています。」とあるのは理解できる。

(組み合わせ数学については、ここでは説明できないが、Wikipedia に D. Knuth が出て来たので Graham-Knuth-Patashnik [26] をあげておく。)

そろそろ、筆者の意見を述べよう。

> 0^0 を 1 と定義するか、未定義とするかは文脈による。
>
> - 2 変数変数の関数の値としては定義しないという立場も認める (連続関数にならないので)。
> - しかし (例えば) $\sum\limits_{k}$ という式の中で現れる 0^k については、$0^0 = 1$ と定義する。
>
> 一方で、一律に $0^0 = 1$ と定義しても構わない (反対する気はまったくない)。x^y は $(0,0)$ で不連続となるが、それを理解していれば問題は生じないはずだから。基本的な関数に不連続なものがあっても構わないだろう。$a^b = e^{b \log a}$ とはつながらなくなるけれど、矛盾するわけでもなし、それは構わない。

[60] 定義するときは、なぜそう定義するか理由を説明することが多いが、定義しないものについては、なぜ定義しないか理由を説明することはほとんどないので、ここは推測になってしまうが、多分大きく外していないと思う。

(結局のところ、Wikipedia に書いてあることとほぼ変わらない、**代数と解析学は共通部分が空というわけではない**ので、一冊の本の中でも、どこに書いてあるかで違うよね、ということである。)

おそらく、多くの数学者が同じような意見だと想像する。微積分の教科書で Taylor 展開の式が出て来たとき、$(x-a)^0=1$ とするという断り書きは、省略されることが多い (「だって、多項式書くときもそうだろう、そんなのは常識だ」と言う人が多そう — 高校数学では多項式 (整式) を $\sum$ で書かないんだけどね)。

上の例に戻って、指数 ((37) では n, (38 では r や $n-r$)) が連続的に変化するものでないから、という説明も出来るかもしれない。つまり x^y (y は変数) でなく、x^b (b は定数、ここでは $b=0$) を考えている、ということである。これについて、もう一つだけ書いておくと (ちょっとしつこい?)

$$n \text{ を自然数とするとき} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

と書いてあるのをしばしば目にするけれど、$n=1$ かつ $x=0$ のときに右辺が $1\cdot 0^0$ になるので、もしも 0^0 を未定義とすると、$(x^n)'=nx^{n-1}$ という式に「ただし $n=0$ のときは $x\neq 0$ とする」というただし書きが必要になる。こういう式を扱うときは

$$x^0 = 1 \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

だけでなく

$$x^0 = 1 \quad (x\in\mathbb{R})$$

とする方がスッキリすると思うけれど、いかが。解析学の精神にのっとり、連続的に拡張できるものはそうする、ということかな。　　閑話休題(ひまばなしはこれまで)

問 59. $0<a<1$ を満たす任意の a に対して、$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = a$ を満たすような数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が存在することを示せ。

もうこういうのは不要かと思うけれど、念のため。これを間違えなければ良いでしょう。

問 60. $\varphi\colon (0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $\psi\colon (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ が $\lim_{t\to+0}\varphi(t)=0$, $\lim_{t\to+0}\psi(t)=0$ を満たすとき、

$$\lim_{t\to+0}\varphi(t)^{\psi(t)} = 1$$

であるかどうか答えよ。

(解答は p. 229 にある。)

4.3　初等関数ワールド

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を (複素関数として) 定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例 4.7 (1) $\sin z = 0$ を解け。　(2) $\sin z = 2$ を解け。

(解答) $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ である。

(1)

$$\begin{aligned}\sin z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad 2iz = \log 1 + i(0 + 2n\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = n\pi.\end{aligned}$$

ゆえに $\sin z = 0$ の解は $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(2) $w := e^{iz}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\sin z = 2 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i \Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 4i \Leftrightarrow w^2 - 4iw - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow w = 2i \pm \sqrt{(2i)^2+1} = 2i \pm \sqrt{3}i = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) e^{i\pi/2} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i(\pi/2 + 2n\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = -i \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + \pi(1/2 + 2n).\end{aligned}$$

ゆえに $\sin z = 2$ の解は $z = (2n + 1/2)\pi - i \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$. ■

この例を一般化して、$w \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、$w = \sin z$ を z についての方程式として解くと、

$$z = -i \log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

既に学んだように、三角関数や双曲線関数は、指数関数を使って表すことが出来る。従って、三角関数や双曲線関数の逆関数を (指数関数の逆関数である) 対数関数を使って表せるのは、比較的自然に受け入れられるであろう。詳細は省略するが、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\arcsin z &= \sin^{-1} z := -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \\ \arccos z &= \cos^{-1} z := i \log\left(z - i\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{\pi}{2} + i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \\ \arctan z &= \tan^{-1} z := \frac{i}{2}\left(\log(1-iz) - \log(1+iz)\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh} z &= \sinh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \\ \operatorname{arccosh} z &= \cosh^{-1} z := \log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \\ \operatorname{arctanh} z &= \tanh^{-1} z := \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.\end{aligned}$$

(一つくらいやってみせるか？特に arcsinh は良く出てくるから[61])

従って、指数関数、対数関数、それと $\sqrt{}$ (これも log と exp で $\sqrt{z} = e^{\log z/2}$ 表せるけれど…) を詳しく調べれば良い、と考えられる。

[61] $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+k}\right|$ という公式があるが、$k > 0$ のとき $\operatorname{arcsinh} \dfrac{x}{\sqrt{k}}$ とも表せる。Mathemaitca は `ArcSinh[]` を使って答える。k が負の場合や、符号が不明な場合は、$\log(x + \sqrt{x^2+k})$ と答える。

問 61. 次式を確かめよ。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

問 62. 次式を確かめよ。

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2},$$
$$(\operatorname{arcsinh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \quad (\operatorname{arccosh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad (\operatorname{arctanh} z)' = \frac{1}{1-z^2}.$$

この節のおわりに

複素対数関数は、ちょっとやっかいな感じがするけれども、なかなか重要そうだ、と感じてもらえただろうか。実はとてもとても重要なことが後々分かってくる。

5 線積分

いよいよ関数論の佳境の入り口である[62]。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(街中の道をトロトロ走って高速道路の入り口に到達、これからスピードを上げる、そういう感じ。景色がどんどん変わる。)

複素関数の線積分を導入する。線積分が重要である理由は、それが微分の逆演算に相当するからである。実関数とは異なり、複素関数は連続であっても原始関数が存在するとは限らない。原始関数がどういう場合に存在するか、存在しない場合にどういうことが起こるか、それを理解するのがこの「複素関数」の核心である。

5.1 線積分の定義と例

5.1.1 おはなし

いよいよ線積分を学ぶ。この後の授業では、毎回線積分が現れる。例えば、

- この講義科目において最も重要な定理は、Cauchy の積分定理であると考えられるが、これは線積分に関する定理である。
- 既に述べたように、この講義では、「正則関数は冪級数展開可能である」という定理を示すことが重要な目標の一つである。この定理のどこにも「積分」という語は出てこないが、その証明は普通「線積分」を使ってなされる[63]。
- 複素対数関数の多価性も、線積分 $\log z = \displaystyle\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ を通して理解できる。

---

[62]講義では、「今日はいよいよこの講義の核心部分に触れるので、真剣に聴きましょう。」とか、そういう意味のことを話す。

[63]「線積分」を使わない証明もあるらしいが、ずっと後になって発見されたもので、一般にはあまり知られていないそうである (私は不勉強で読むのをさぼってます (笑))。Ahlfors [27] に書いてあった話？

(余談: 高木貞治の「函数論縁起」([6] に収録) にある[64]、1 頁ちょっとのガウスからベッセルへの手紙の引用を読んでみよう。この講義の WWW サイト (https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/) に載せてある。高木先生はお亡くなりになってから、50 年以上経っているので、著作権フリーです。)

(これは蛇足?) $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ に近いので、重積分というものもあるが、複素関数論でそれが必要になることは稀で、必要なのは線積分の方である (線積分がある意味で微分の逆演算となる)。

これからしばらくの話は

1. まず線積分を定義、例を見せる
2. 反省モード
3. 線積分の基本的な性質を粛々と調べる

と進める。Cauchy の積分定理の準備をすることになる。

5.1.2 線積分の定義

それでは、線積分を定義しよう。2 種類あるが、良く使うのは次のものである。

(次は図を描くこと。ちょろっと、始点、終点という言葉を書き込み、ちょろっと「始点と終点が同じでも道はたくさんある」と言う。)

定義 5.1 (曲線に沿う線積分) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は連続、$C: z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき、曲線 C に沿った f の**線積分** (line integral) を次式で定める。

$$\int_C f(z)\,dz := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{39}$$

C のことを**積分路**(せきぶんろ)と呼ぶ。

次の形の線積分も必要になる。

定義 5.2 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は連続、$C: z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき、

$$\int_C f(z)\,|dz| = \int_C f\,ds := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt. \tag{40}$$

(特に $f\equiv 1$ のとき、つまり $\displaystyle\int_C ds$ は C の弧長となる。)

曲線、区分的に C^1 級などの言葉については、知っている人も多いと想像するが、すぐ後で説明する。

$F(t) := f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ は複素数値関数である。微積分では実数値関数の積分しか出て来なかったかもしれない。$U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$ とおいて、

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (U(t)+iV(t))\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt$$

[64] 「縁起」というのは、物事の起源・由来、またはその言い伝え、という意味です。

で積分を定義すると考えれば良い。(これは実際には既に他の授業で普通に使ってあるはず。例えば「信号処理とフーリエ変換」の Fourier 係数の計算など。)

問 63. $F\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ は連続とするとき、$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right|\le\int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$ を示せ。

注意 5.3 (細かい注意 — 授業では寝た子を起こさないかも) 任意の t に対して $\varphi'(t)$ が定義されるわけではない (「区分的…」なので)。(39) は大丈夫なのだろうか? $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ が区分的に C^1 級の曲線とは、$\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ は連続で、$\exists\{t_j\}_{j=0}^n$ s.t. $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$, φ を $I_j:=[t_{j-1},t_j]$ に制限した $\varphi_j:=\varphi|_{I_j}$ は I_j で C^1 級、と定義される。ゆえに

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f\left(\varphi_j(t)\right)\varphi_j'(t)\,dt$$

は問題なく定義される (被積分関数は $[t_{j-1},t_j]$ で連続なので、積分可能であり、値が確定する[65])。(39) は

$$\int_C f(z)\,dz:=\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j} f\left(\varphi_j(t)\right)\varphi_j'(t)\,dt.$$

と定義するのが厳密であると言えるかもしれない。しかし積分は関数が定義されていなかったり、不連続であるような例外点の存在を許して考えるのが普通 (慣習) なので、上のように書いておいた。積分可能であることを確かめるには、ここに書いたような議論が必要になる。■

参考 5.1 (積分の定義の反省) 実関数の積分は Riemann 和の極限として定義されるのが普通である:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x_j,$$

$$\Delta x_j:=x_j-x_{j-1},\quad \xi_j\in[x_{j-1},x_j],\quad |\Delta|:=\max_{1\le j\le n}\left(x_j-x_{j-1}\right).$$

複素関数の曲線に沿う線積分も同様に定義可能である。

$$\int_C f(z)\,dz=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{j=1}^n f(\zeta_j)\Delta z_j.$$

$$\Delta z_j:=z_j-z_{j-1},\quad \zeta_j\in\overset{\frown}{z_{j-1}z_j},\quad |\Delta|:=\max_{1\le j\le n}\left|z_j-z_{j-1}\right|.$$

(ここで $\overset{\frown}{z_{j-1}z_j}$ は、2 点 z_{j-1}, z_j を端点とする弧を表す。実はこの辺は突っ込みどころなのだけど、頬かむりする。)

z_j, ζ_j をどう取るか。パラメーターの区間の分割

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$$

と各小区間から任意の選んだ点

$$\xi_j\in[t_{j-1},t_j]\quad(j=1,\ldots,n)$$

を用いて

$$z_j=\varphi(t_j),\quad \zeta_j:=\varphi(\xi_j)$$

[65] 一方、φ は $t=t_j$ で微分可能でないことがありうる ($\varphi_j'(t_j)\ne\varphi_{j+1}'(t_j)$ であるとき、φ は t_j で微分可能ではない)。その場合、$f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は $t=t_j$ で定義されていない。

とするのが自然であろう。すると

$$\begin{aligned}
&f(\zeta_j) = f\left(\varphi(\xi_j)\right),\\
&\Delta z_j = \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) \simeq \varphi'(\xi_j)\Delta t_j,\\
&\Delta t_j := t_j - t_{j-1}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j \simeq \sum_{j=1}^{n} f(\varphi(\xi_j))\varphi'(\xi_j)\Delta t_j.$$

この右辺は、実変数の関数 $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の Riemann 和になっているので、$|\Delta| := \max_{1\le j\le n}(t_j - t_{j-1})$ を 0 に近付けた時の右辺の極限は $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$ になることが証明できる。複素関数の曲線に沿う線積分の妥当性が分かる。

もう一つの方の線積分は

$$\int_C f(z)\,|dz| = \int_C f\ ds = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\,|\Delta z_j|\,.$$

($f \equiv 1$ の場合は、Riemann 和は折れ線の長さになっていることに注意。) ■

5.1.3 線積分の実例

例 5.4 $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$, C は $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0,\pi])$ とするとき

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\ dz &= \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)\ d\theta = \int_0^\pi \left(e^{i\theta}\right)^2 \cdot ie^{i\theta}\ d\theta = i\int_0^\pi e^{3i\theta}\ d\theta\\
&= i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^\pi = \frac{e^{3\pi i} - e^0}{3} = \frac{-1-1}{3} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(実はこの積分は、原始関数を利用して計算することができる。後述する。) ■

例 5.5 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$, C は $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0,2\pi])$ とするとき

$$\int_C f(z)\ dz = \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}\ d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \blacksquare$$

曲線を “$z =$ パラメーターの式” の形で与えることも多い。

例 5.6 $f(z) = |z|$ $(z \in \mathbb{C})$, C は $z = (1+2i)t$ $(t \in [0,1])$ とする。

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\ dz &= \int_0^1 f(z(t))\frac{dz}{dt}\ dt = \int_0^1 |(1+2i)t|\cdot(1+2i)\ dt\\
&= (1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 |t|\ dt = (1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 t\ dt = \frac{(1+2i)\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

実関数の積分でよくやるように、$dz = (1+2i)dt$ と書いて、それを代入するように覚えるのも良いだろう。■

5.1.4 原始関数の存在する場合

定理 5.7 (微積分の基本定理 (のようなもの)) Ω が $\mathbb{C}$ の開集合、$F\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線で、始点が a, 終点が b とするとき、

$$\int_C F'(z)\,dz=[F(z)]_{z=a}^{z=b}=F(b)-F(a).$$

証明 C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とする。φ が C^1 級の場合は、

$$\begin{aligned}\int_C F'(z)\,dz&=\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta\frac{d}{dt}F(\varphi(t))\,dt=[F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta}\\&=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).\end{aligned}$$

φ が連続かつ区分的に C^1 級の場合は、C^1 級であるような小区間に分割して、各区間で上と同じことをして

$$\begin{aligned}\int_C F'(z)\,dz&=\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\sum_{j=1}^n\left(F\left(\varphi\left(t_j\right)\right)-F\left(\varphi\left(t_{j-1}\right)\right)\right)\\&=F\left(\varphi(t_n)\right)-F\left(\varphi(t_0)\right)=F(b)-F(a).\blacksquare\end{aligned}$$

この定理を見て、次のように考えるかもしれない。

何だ、実関数のときと同じじゃないか？

確かに原始関数が分かっていればこれまでと同じだ。しかし、すぐ後の例 5.10 で見るように

複素関数では、原始関数が存在するとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

この原始関数の存在問題については、時間をかけて説明することになる。

Cf. $[a,b]$ を $\mathbb{R}$ の区間とするとき、$f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続ならば、f は必ず原始関数を持つ。すなわち $\exists F$ s.t. $F'=f$. 実際、

微積分の基本定理

$f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続ならば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\quad(x\in[a,b]).$$

が成り立つから、$F(x):=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおけば、F は f の原始関数である。

なお、

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)\qquad\left(\text{すなわち}\quad\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a)\right)$$

も微積分の基本定理と呼ばれる。これらは要するに、

(実関数では、つねに) 微分と積分は互いに逆演算である

ということを言っている。

複素関数で曲線に沿う線積分が重要である理由は、(「つねに」ではないけれど) 微分の逆演算となりうるからである。

注意 5.8 (ベクトル解析との比較) このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャル ($\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす F のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})$. ■

例 5.9 (原始関数を利用した線積分の計算) 例 5.4 を原始関数を用いて計算してみよう。すなわち $f(z) = z^2$, C は $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) とする。$F(z) := \frac{z^3}{3}$ は f の原始関数である (実際 $F'(z) = f(z)$ を満たす)。また C の始点、終点はそれぞれ 1, -1 ($\theta = 0$ のとき $z = 1$, $\theta = \pi$ のとき $z = -1$) であるから

$$\int_C f(z)\,dz = [F(z)]_{z=1}^{z=-1} = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3}. ■$$

例 5.10 (原始関数が存在しない例) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ ($z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$) とする。この f の原始関数は存在しない。実際、もしも原始関数 F が存在するならば、$C\colon z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) は Ω 内の C^1 級閉曲線 (始点も終点も $z = 1$) であるから

$$\int_C f(z)\,dz = [F(z)]_{z=1}^{z=1} = F(1) - F(1) = 0.$$

ところがすでに見たように $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ であるから、矛盾が生じる。ゆえに f の原始関数は存在しない。

この線積分については、定理 5.7 を適用できないことになるが、以下のように “間接的に” 適用することができる。

$\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ における対数関数の分枝 $\log z$ を、$z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。このとき $F(z) := \log z$ ($z \in \Omega'$) は Ω' で正則であり、$F'(z) = \dfrac{1}{z}$ ($z \in \Omega'$). つまり F は f の Ω' への制限 $f|_{\Omega'}$ の原始関数である。$0 < \varepsilon < \pi$ を満たす任意の ε に対して、

$$C_\varepsilon\colon z = e^{i\theta} \quad (\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$$

とおく。この C_ε は Ω' 内の C^1 曲線で

$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz &= [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon} \\ &= (2\pi - \varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi - \varepsilon)i.\end{aligned}$$

この値の、$\varepsilon \to +0$ のときの極限 $2\pi i$ が、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ に一致するのはもっともらしい。■

ここでは

この辺の事情は、前節の複素対数関数の話に通じる。やや判りづらいと思われるが、説明する。

$F(z) := \log z$ は多価関数で、関数とは認められないが、ある意味で $F'(z) = f(z)$ を満たす。

関数 f の定義域を少し小さいものに置き換えると、原始関数は存在することがある。例えば、複素平面から実軸の正の部分を除いた領域 $\Omega' := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \geq 0\}$ では

$$F(z) = \log z = \log r + i\theta \quad (z = re^{i\theta}, \text{偏角 } \theta \text{ を } (0, 2\pi) \text{ の間に取る})$$

が f の原始関数になる。そこで $0 < \varepsilon < 1$ に対して、$C_\varepsilon \colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$ とすると、C_ε の像は Ω' に含まれるので

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz = F(\varphi(2\pi - \varepsilon)) - F(\varphi(\varepsilon)) = (\log 1 + i(2\pi - \varepsilon)) - (\log 1 + i\varepsilon) = (2\pi - 2\varepsilon)i.$$

ここで $\varepsilon \to +0$ とすると $2\pi i$ に収束する。これが $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$ に等しいのはうなずけるだろうか (そうしてもらえることを期待している)。■

例 5.11 (z^n の積分) $n \in \mathbb{Z}$, $f(z) = z^n$ とする。$n = -1$ の場合が上の例であるが、$n \neq -1$ であれば、$F(z) := \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ とおくと、$F'(z) = f(z)$ であるから、

$$\int_C f(z)\, dz = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.\blacksquare$$

関数が原始関数を持つかどうか、簡単に分かることを述べておく。

- 多項式関数は ($n \geq 0$ しか出て来ないので) 必ず原始関数を持つ。
- 冪級数は収束円の内部では必ず原始関数を持つ。
- 有理関数で (実関数ならば) log が出て来るケース ($\dfrac{1}{z-a}$ とか、$\dfrac{z}{z^2+1}$ — もっともこちらは $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+i} + \dfrac{1}{z-i}\right)$ に等しいので、$\dfrac{1}{z-a}$ に帰着されると言って良いかもしれない) や、$\sqrt{\ }$ などは注意を要する。
- 実は「原始関数を持つならば正則である」ことが後で分かる。従って正則関数でない $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ などは原始関数を持たない。■

余談 5.12 (授業楽屋裏) 線積分の練習問題を出す立場の楽屋裏を説明すると、原始関数が分かる場合は、定理 5.7 によって、線積分は簡単に計算できてしまい、線積分の定義に基づいて計算することの練習にならないので、原始関数が存在しない問題を出すことが多い。その中に (x, $|z|$ のような) 正則関数でない関数を含めることがあるが、関数論で実際にそういう関数の積分が出て来ることはあまり多くないので、「問題のための問題」になりがちである (少し複雑な気持ちになる)。■

5.2 曲線に関する用語の定義

ここは説明するのに結構時間がかかるが、説明を完全にサボるのは難しい。スライドを見せたりして済ませるとか (もっとたくさんの図をスライドに含める必要がある？)、工夫を考えたい (と言って、毎回結局は板書して時間をかけてしまう。)

定義 5.13 Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$C\colon z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の曲線とする。(これは $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ が連続ということを意味する。)

- 写像 φ の値域 $\{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ のことを曲線 C の**像** (the image of C)、あるいは**跡** (the spur of C) という。しばしば記号 C^* で表す。
- 曲線 C が C^1 **級曲線**であるとは、φ が C^1 級であること、すなわち 1 回微分可能で、導関数 φ' が連続であることをいう。
- 曲線 C が C^1 **級正則曲線**であるとは、φ が C^1 級であり、$(\forall t\in[\alpha,\beta])$ $\varphi'(t)\neq 0$ を満たすことをいう。
- 曲線 C が**区分的に** C^1 **級の曲線**であるとは、$[\alpha,\beta]$ のある分割 $\{t_j\}_{j=0}^n$ で、各 $[t_{j-1},t_j]$ に φ を制限した $\varphi|_{[t_{j-1},t_j]}$ が C^1 級曲線であるものが存在することをいう。

  (t_j では片側微分係数しか存在しないかもしれない、ということである。)
- 曲線 C が**区分的に** C^1 **級の正則曲線**であるとは、ある $\{t_j\}_{j=0}^n$ で各 $[t_{j-1},t_j]$ に φ を制限した $\varphi|_{[t_{j-1},t_j]}$ が C^1 級正則曲線であるものが存在することをいう。
- 曲線 C が**閉曲線** (closed curve) であるとは、始点と終点が等しいこと、すなわち $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ であることをいう。
- 曲線 C が**単純曲線** (a simple curve) あるいは **Jordan 弧** (a Jordan arc) であるとは、
  - (曲線が閉曲線でない場合) φ が単射であること、すなわち

    $$(\forall t_1\in[\alpha,\beta])(\forall t_2\in[\alpha,\beta])\quad t_1\neq t_2\Rightarrow\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$$

    を満たすことをいう。
  - (曲線が閉曲線である場合) φ が $[\alpha,\beta)$ で単射であること、すなわち

    $$(\forall t_1\in[\alpha,\beta))(\forall t_2\in[\alpha,\beta))\quad t_1\neq t_2\Rightarrow\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$$

    を満たすことをいう。

  (直観的には「自分自身と交わらないこと」である。)
- 単純閉曲線 C が**正の向き**の曲線であるとは、進行方向の左手に C が囲む有界領域が見えることをいう。

  (曖昧な言い方であるが、簡単な場合のときのみ扱うので、混乱は生じないであろう。)

平面内の単純閉曲線を **Jordan 曲線**と呼ぶ。任意の Jordan 曲線 C は平面を 2 つの領域に分け、そのうちの一方は有界、他方は非有界となり、どちらの領域の境界も C^* である (**Jordan 曲線定理** (定理 E.10, p. 292) — 証明が難しいことで有名)。有界な領域の方をその曲線が囲む **Jordan 領域**と呼ぶ。

曲線の例を 2,3 あげる。

例 5.14 (円周) $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とする。$C\colon z = \varphi(t) = c + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とすると、C は C^1 級正則曲線である。さらに単純閉曲線で、正の向きである。C の像は c を中心とする半径 r の円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = r\}$ である。

この曲線 C を単に記号 $|z - c| = r$ で表すことがある。例えば $\displaystyle\int_{|z-c|=r} f(z)\,dz$ は $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ という意味である。■

問 64. このことを確かめよ。

例 5.15 (正方形の周) 曲線 $C\colon z = \varphi(t)$ ($t \in [0, 4]$) を

$$z = \varphi(t) := \begin{cases} t & (t \in [0,1]) \\ 1 + i(t-1) & (t \in [1,2]) \\ 1 + i - (t-2) & (t \in [2,3]) \\ i - i(t-3) & (t \in [3,4]) \end{cases}$$

で定めると、C の像は 0, 1, $1+i$, i を頂点とする正方形の周である。C は区分的に C^1 級正則曲線である。さらに単純閉曲線で、正の向きである。■

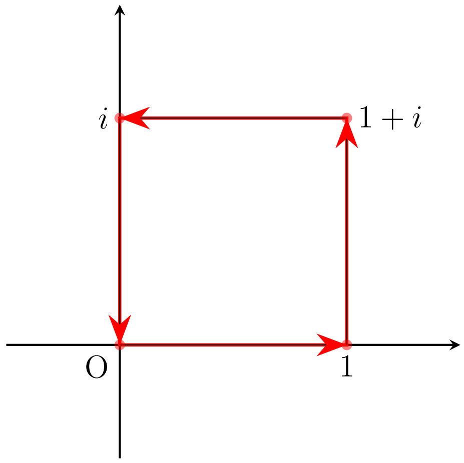


図 5: 正方形の周を正の向きに一周する

C^1 級の正則曲線では、曲線上の各点で 0 でない接線ベクトルが存在し、その接線ベクトルが連続的に変化するので、図形として滑らかであり、決してとがることがない。

区分的に C^1 級の曲線を考える理由は、このような多角形や折れ線を扱うためである。

定義 5.16 (C を逆向きにした $-C$) 曲線 $C\colon z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に対して、$z = \varphi(-t)$ ($t \in [-\beta, -\alpha]$) で定まる曲線を、C を逆向きにした曲線と呼び、$-C$ で表す。

定義 5.17 (曲線 C_1, C_2 をつないだ C_1+C_2) 曲線 $C_1\colon z=\varphi_1(t)$ ($t\in[\alpha_1,\beta_1]$), $C_2\colon z=\varphi_2(t)$ ($t\in[\alpha_2,\beta_2]$) で、C_1 の終点と C_2 の始点が等しい ($\varphi_1(\beta_1)=\varphi_2(\alpha_2)$) であるとする。このとき

$$\varphi(t):=\begin{cases}\varphi_1(t) & (t\in[\alpha_1,\beta_1])\\ \varphi_2(t-\beta_1+\alpha_2) & (t\in[\beta_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2])\end{cases}$$

で定まる曲線を、C_1 に C_2 をつないだ曲線と呼び、C_1+C_2 で表す。
(教科書では、C_2C_1 と表している。もっともな理由のある書き方なのだが、標準的な記号とは言えないので、この講義では C_1+C_2 と書くことにする。)

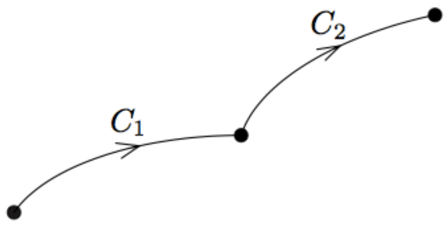


図 6: C_1 の終点 $=C_2$ の始点ならば C_1+C_2 が作れる

(実は後になって、C_1 の終点が C_2 の始点でないような場合にも、C_1+C_2 を考えるようになる。いわゆる「曲線鎖」というものであるが、その厳密な定義はこの講義では説明しない。この辺はずぼらなところ…)

5.3 線積分の性質

命題 5.18 (1) $\displaystyle\int_C (f(z)+g(z))\,dz=\int_C f(z)\,dz+\int_C g(z)\,dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \lambda f(z)\,dz=\lambda\int_C f(z)\,dz.$

(3) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C |f(z)|\,|dz|.$

(4) $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz=-\int_C f(z)\,dz.$

(5) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz.$

証明 (1), (2) は明らかである。

(3) 一般に連続関数 $F\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ に対して,

$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right|\le\int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$

が成り立つことを認めれば、$F(t)=f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$ について適用して、

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right|\le\int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt=\int_C |f(z)|\,|dz|\,.$$

(4) $z=\varphi(-t)$ ($t\in[-\beta,-\alpha]$) とすると、$dz=-\varphi'(-t)dt$ であるから、

$$\int_{-C} f(z)\,dz=\int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t))\cdot(-\varphi'(-t))dt=\int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t)\,dt.$$

$s=-t$ とおくと、$t=-\alpha$ のとき $s=\alpha$, $t=-\beta$ のとき $s=\beta$, $dt=-ds$ であるから、

$$\int_{-C} f(z)\,dz=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s))\varphi'(s)\cdot(-1)ds=-\int_C f(z)\,dz.$$

(5) 簡単なので演習問題とする。■

注意 5.19 孤長要素に関する線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,|dz|=\int_C f\ ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z)\,|dz|=\int_C f(z)\,|dz|\,.■$$

命題 5.20 線積分は曲線 C の向きを変えないパラメーター付けに依らない。

例 5.21

$$\begin{aligned}
&C_1\colon z=e^{i\theta}\quad(\theta\in[0,\pi]),\\
&C_2\colon z=e^{i\pi t}\quad(t\in[0,1]),\\
&C_3\colon z=e^{i\pi t^2}\quad(t\in[0,1]),\\
&C_4\colon z=-t+i\sqrt{1-t^2}\quad(t\in[-1,1])
\end{aligned}$$

とするとき、曲線の像はみな同じ半円 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1,\ \operatorname{Im}z\geq 0\}$. また向きも同じである (始点は 1, 終点は -1)。半円の近傍で定義された f に対して、$\displaystyle\int_{C_j} f(z)\,dz$ は共通の値を取る。■

問 65. $C_5\colon z=t+i\sqrt{1-t^2}\quad(t\in[-1,1])$ とするとき、$\displaystyle\int_{C_5} f(z)\,dz$ と $\displaystyle\int_{C_4} f(z)\,dz$ の間の関係はどういうものか。

命題 5.20 により、例えば「点 a から点 b に向かう線分」や「点 c を中心として、半径 r の円周上を正の向きに一周する曲線」の上での線積分が、具体的なパラメーター付け φ を指定しないでも確定することが分かる。

閉曲線の場合は、向きを指定していない場合は、正の向きであるとする暗黙のルールがある。

(この辺は、あまり素朴に済ませようとすると、失敗することがある。「始点・終点を指定すれば良い」という思いつきは、閉曲線の場合は困ることになる。それで図に矢印をつけたり、「正の向き」や「一周」という言葉を追加したりするわけである。それでようやく解決かと言うと、自己交叉する曲線については、うまく行かないので、結局はパラメーター付けを駆逐するのは無理である。「いざとなったらパラメーター付け」と頭に入れておこう。)

実関数の場合に「一様収束ならば項別積分可能」が成り立つことを説明したが、複素関数の線積分についても成り立つ。次の定理を今後頻繁に使うことになる。

命題 5.22 (一様収束ならば項別積分可能) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数からなる関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz.$$

証明 f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

$$\begin{aligned}\left|\int_C f_n(z)\,dz-\int_C f(z)\,dz\right| &\le \int_C |f_n(z)-f(z)|\,|dz|\\ &\le \max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\int_C |dz|.\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_C |dz|$ は C の弧長である。一様収束とは、$n\to\infty$ のとき $\displaystyle\max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\to 0$ を意味するので、

$$\int_C f_n(z)\,dz\to\int_C f(z)\,dz\quad(n\to\infty).\blacksquare$$

5.4 参考: $\mathbb{R}^2$ で活躍する積分 (ベクトル解析との関係)

「電磁気とベクトル解析」を履修した学生向けに、ベクトル解析に現れる積分を思い出して、複素関数の線積分との関係を説明してみよう。

重積分

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy,$$

弧長要素に関する線積分

$$\int_C f\;ds.$$

$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$, C の単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ に対して

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}\;ds=\int_C P\;dx+Q\;dy.$$

(Green の定理、Green の積分公式) C が単純閉曲線であり、ある有界領域 D を囲み、C の向きが正であるとする。こういう場合に、C のことを ∂D と書くことが多い[66]。このとき

$$\int_{\partial D}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\;dx\,dy,$$

あるいは (見た目を変えて)

$$\int_{\partial D}P\;dx+Q\;dy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy.$$

[66]ベクトル解析では、Green の積分公式以外に、Gauss の発散定理、Stokes の定理という重要な定理があるが、それらを一般化して、共通の公式 $\displaystyle\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega$ で表すことが出来る (名前が重なってしまうが、この公式自体が Stokes の定理と呼ばれる)。この立場からすると、今の場合は $D=M$, $C=\partial M=\partial D$ と対応する。

ただし

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \det \begin{pmatrix} \nabla & \boldsymbol{f} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{pmatrix} = Q_x - P_y.$$

複素数値関数 f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx + i\,dy) = \int (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy).$$

$$\int_C g\,|dz| = \int_C g\,ds.$$

6　Cauchy の積分定理

これから、この講義が終わるまでのすべては、ある意味で Cauchy の積分定理とその応用 (あるいはそれから導かれる結果) である。

6.1　はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[67]は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである。

(a) f は正則関数。簡単のため定義域は $\mathbb{C}$ の領域 Ω としておく。

(b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意

(c) C の「囲む」範囲に Ω の点でない点 (f が定義されていない点) がない。

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\},\ f(z) = \frac{1}{z},\ C\colon z = e^{i\theta}\ (\theta\in[0,2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a), (b) を満たすのに、$\int_C f(z)\,dz = 0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、C の像 C^* (図形としての曲線) は $\mathbb{C}$ のある有界領域 D の境界であることが分かるので、C は D を囲むと言っても

[67] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、聞けば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、聞いても答えられないんじゃないかと思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。

良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具 (？) はあまり使いたくないし[68]。C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は 2 つある。

(i) Ω 自身にまったく穴がない場合だけを考える。後で定義する「単連結」という条件を使う。「Ω が $\mathbb{C}$ の単連結領域であれば、Ω で正則な任意の関数と、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。

(ii) 個々の閉曲線 C が 1 つの点を囲むという条件をうまく定義してからとりかかる。閉曲線の点の周りの**回転数**という概念を使うことになる。

この講義では、(i) のやり方を採用する。単純な場合から話を進めていく。

6.2 三角形の周に沿う線積分の場合

三角形のような単純な図形の場合は、内部とは何か明らかで議論が簡単になる。次の補題は、その証明とともに非常に有名である。

補題 6.1 (Goursat, Pringsheim) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 正則、Δ は Ω 内の三角形とするとき、

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

ここで $\partial\Delta$ は、三角形 Δ の周を正の向きに一周する閉曲線である。

(有名な定理であるが、その歴史については Gray [29] を見よ。Goursat (グルサー) の定理と呼ぶ人が多いが、高木 [30] では Pringsheim という名前をあげている理由が良く分かる。簡潔な証明であるが、ここに行き着くまでに紆余曲折があったことが分かる。)

証明に使われるのは、(a) 三角形の周に沿う積分は、分割して出来た小三角形の周に沿う積分の和である、(b) 微分できるということは、局所的には 1 次関数でいくらでも精度良く近似できるということである、(c) 1 次関数の閉曲線に沿う積分は 0 (1 次関数 $az+b$ は原始関数 $\frac{a}{2}z^2+bz$ を持つから), という 3 つの事実と区間縮小法であるが、それらの組み合わ方が絶妙である。

証明 (注意: 対面授業で証明すると 40 分強の時間が必要になる。前日よく寝ておくこと。)

$M := \left|\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M=0$ を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、$\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、$j=1,2,3,4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに逆向きになっているので (図が欲しい)、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z)\,dz.$$

[68]Jordan 曲線定理の短い証明があるという話は何度か耳にしたことはある。例えば Brouwer の不動点定理を使って 3 ページという話 (Maehara [28], Brouwer の不動点定理の短くてクリアな証明はあるかしら。)。残念ながら複素関数論を学ぶ学生のレベルで理解できそうな証明は知らない。

ゆえに

$$M=\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right|\le\sum_{j=1}^{4}\left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|.$$

右辺の 4 つの項 $\left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)dz\right|$ のうち最大値を与える三角形が Δ_{0j^*} であったとして、それを Δ_1 とおくと、

$$M\le 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right|.$$

ゆえに

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right|\ge\frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割を続ける:

$$\Delta=\Delta_0\supset\Delta_1\supset\Delta_2\supset\cdots$$

このとき任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|\ge\frac{M}{4^n}.$$

区間縮小法の原理により

$$(\exists c\in\mathbb{C})\quad\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Delta_n=\{c\}\,.$$

$c\in\Delta_0=\Delta\subset\Omega$ であることに注意する。

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 である。ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz=\int_{\partial\Delta_n}\left[f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))\right]dz.$$

右辺の被積分関数を $g(z)$ とおくと、

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|=\left|\int_{\partial\Delta_n} g(z)\,dz\right|\le\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\int_{\partial\Delta_n}|dz|\,.$$

$\int_{\partial\Delta_n}|dz|$ は $\partial\Delta_n$ の弧長である。それを L_n とおくと、Δ_n は Δ と相似であり、n が 1 増えるごとに長さが 1/2 倍になるから、$L_n=\dfrac{L}{2^n}$ が成り立つ。

微分の定義 $\lim_{z\to c}\dfrac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって、

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して、

$$|z-c|<\delta\quad\Rightarrow\quad|g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

$c\in\Delta_n$ であるので、十分大きな任意の n に対して、$\Delta_n\subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|z-c|\,.$$

三角形の直径は周長以下であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n}\le\left|\int_{\partial\Delta_n}f(z)\,dz\right|\le\varepsilon L_n\cdot L_n=\frac{\varepsilon L^2}{4^n}$$

であるから

$$M\le\varepsilon L^2.$$

以上で

$$(\forall\varepsilon>0)\quad 0\le M\le\varepsilon L^2$$

が証明できた。ゆえに $M=0$. ■

注意 6.2 (上の証明の工夫の鑑賞) 積分を評価するのに、良く使うのは

$$\left|\int_{\partial\Delta_n}f(z)\,dz\right|\le\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|f(z)|\int_{\partial\Delta_n}|dz|$$

という不等式であるが、これでは

$$\left|\int_{\partial\Delta_n^*}f(z)\,dz\right|\le\text{定数}\times L_n=\text{定数}\times\frac{L}{2^n}$$

という評価しか出ない。$f(z)$ から 1 次近似式 $f(c)+f'(c)(z-c)$ を除いた $g(z)$ を用いて

$$\left|\int_{\partial\Delta_n^*}f(z)\,dz\right|=\left|\int_{\partial\Delta_n^*}g(z)\,dz\right|\le\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\int_{\partial\Delta_n}|dz|$$

とするのは気づきにくい工夫である ($\max|f|$ は小さくないが、$\max|g|$ は小さくなる)。

一方、もしも f が 2 回微分可能で、f'' が連続であれば、Taylor の定理によって

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\frac{1}{2}\max_{|z-c|\le\delta}|f''(z)|\,L_n^2$$

が得られて、

$$\left|\int_{\partial\Delta_n^*}f(z)\,dz\right|\le\frac{1}{2}\max_{|z-c|\le\delta}|f''(z)|\,L_n^3,$$

さらに

$$M\le\text{定数}\times\frac{L^3}{2^n}$$

という評価が得られる。こうなれば簡単に $M=0$ が得られてバンザイだけれど、今の時点では[69]、f が 2 回微分可能ということは証明出来ていないので、このやり方で証明するのは無理である。1 回微分可能という仮定から

$$(\forall\varepsilon>0)\quad M\le\varepsilon L^2$$

という評価を導く上の議論は、実に繊細である。 ■

[69] たびたび言及しているように、正則関数は実は無限回微分可能であることが後で証明される— Cauchy の積分定理を根拠として (これを使ったら循環論法に落ちてしまう)。

後の Cauchy の積分公式の証明に用いるため、仮定を少し弱くした命題も証明しておく。

系 6.3 (積分公式のための準備) 上の補題 6.1 の条件で、f が Ω で正則というところを、

f は Ω で連続、1 点 $a \in \Omega$ を除いて正則

とゆるめても、$\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。

実際には、Ω で連続で、1 点を除いて正則という場合、実はその点でも微分可能で、Ω 全体で正則となってしまう (後述の除去可能な特異点というものにあたる)。つまり、これは純粋に証明するための都合、ということになる。

証明 $a \notin \Delta$ ならば、上の証明のままで良い。$a \in \Delta$ の場合は、

(i) a が Δ のある頂点に一致

(ii) a が Δ の頂点ではない辺上にある

(iii) a が Δ の内部にある

のいずれかに分類される。

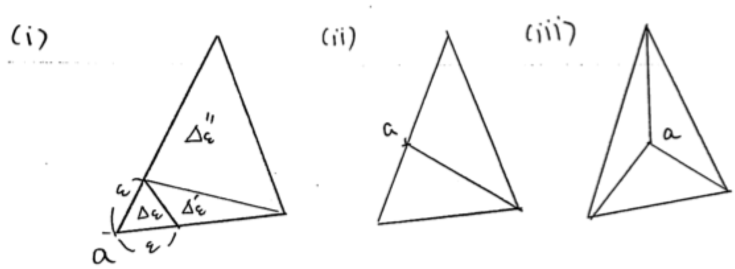


図 7: a が三角形 Δ のどこにあるかで場合分け (頂点, 辺上, 内部)

(i) の場合、Δ の辺の長さより小さい任意の正数 ε に対して、図のように Δ を 3 つの三角形に分割する。a を含まない三角形 Δ'_ε, Δ''_ε では、周に沿う線積分の値は 0 であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta'_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta''_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

ゆえに ($\partial\Delta_\varepsilon$ の周の長さが 4ε 以下であることに注意して)

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\Delta}|f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \le 4\varepsilon \max_{z\in\Delta}|f(z)|\,.$$

$\varepsilon \to +0$ とすることで $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$

(ii), (iii) の場合も、図のように三角形を分割すると、各三角形で (i) が適用できて、線積分の値が 0 であることが導かれる。 ■

余談 6.4 Cauchy の積分公式を導くために、正則性の条件を緩めた積分定理をおくテキストが良くあるが、上の形のものはどうやら高橋 [22] が最初らしい (杉浦 [31] で [22] があげられている)。 ■

補題 6.1 とその証明を理解すると、例えば、関数 f が多角形 ☆ を含む開集合で正則ならば、☆ の周に沿った積分 $\displaystyle\int_{\partial☆} f(z)\,dz = 0$ であることが容易に理解できる (なぜならば、多角形は三角形 Δ_j の和に分割でき、各三角形 Δ_j に対して $\displaystyle\int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz = 0$ が成り立つことから、$\displaystyle\int_{\partial☆} f(z)\,dz = 0$ が導かれる)。

そして実は、閉曲線 C の像が多角形の周になっていなくても、C が囲む範囲と C 上で f が定義されて正則ならば、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ となることが証明できる。これがいわゆる Cauchy の積分定理なのであるが、きちんと定式化して証明するのは意外と難しい。一歩一歩進んで行くことにする。

余談 6.5 これは私の昔話。大学 2 年生の秋学期、数学科に進学を決めたのだけれど、自分が果たしてこのまま数学の勉強を続けられるかどうか、おっかなびっくり過ごしていた。1 つ上の学年は (定員が 45 名というクラスで)、何と 6 人が転学科した (数学が難しいことに気がついて、1 年棒に振ることを受け入れ、数学科から逃げた) という話を聞いていて、自分もそうなる羽目になるのでは、とおそれていたのだ。そうならないように、必死に予習をして授業にのぞんだのだけど、最初の 1 コマで 3 ヶ月分の貯金がなくなる講義があったり、心の中はパニック状態。秋が深まり、疲れが出て来た時のこと。

複素関数論の講義を受講していたのだが、教官が授業で上の定理の証明をしていた。内容は有名な「解析概論」[30] で予習済みであったので、自分にとっては復習だったが、「ああ、この定理の証明はやはり美しい、もっと数学を続けたい」と感じた。

そのとき、証明を終えた教官が「この証明を見て何も感じない奴は、数学を続けることを考え直した方が良い」という意味の発言をした。今だったらハラスメントとか非難されたりしそうだが (時代を感じてしまいます)、そのときの自分は何か救われたような気がした (まあ、教官の主張が真だとしても、何かを感じた奴が数学を続けることを考え直さなくて良い、ということには、論理的にはならないけれど)。

その後、数学者の中で、この定理の証明が素敵だと思う人と、別にそれほどのことは感じない人、両方いるらしいことは分かったので、あの教官の発言は正しいと言う気はないけれど、まあ、同じように感じる人もいる、ということですね。 ■

余談 6.6 (Green の定理を用いる別証明) 実は有名な別証明がある。それにはベクトル解析で有名な次の Green の定理を用いる。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の縦線領域であり、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

三角形の内部は縦線領域であるので、この定理が適用出来て

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy) \\ &= \iint_\Delta (-v_x - u_y)dx\,dy + i\iint_\Delta (u_x - v_y)dx\,dy.\end{aligned}$$

f は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。ゆえに

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \iint_{\Delta} 0\,dx\,dy + i\iint_{\Delta} 0\,dx\,dy = 0.$$

この論法が成立するには、f' の連続性を仮定する必要がある。強い仮定が必要という意味では、定理としては弱くなるが、Green の定理に十分慣れていれば、三角形以外の多くの領域に対して Cauchy の積分定理がすぐに拡張できる。これは魅力的に感じられるかもしれない。実は教科書 (神保 [1]) はこの証明を採用しているが、残念ながら Green の定理の説明はあまり詳しくない。この方針のもとに書かれている本のうちで、私のお勧めは、堀川 [32] である (Green の定理のていねいな説明が載っている)。

Green の定理については、例えば杉浦 [31] の VIII§3 が詳しい。そこには縦線領域でない、より一般の領域に対する Green の定理も載っている。■

6.3 原始関数が存在 $\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線に沿う線積分が 0

Cauchy の積分定理の結論は、

$$\text{閉曲線 } C \text{ に沿う } f \text{ の線積分が } 0\text{: } \int_C f(z)\,dz = 0$$

という条件だったが、「f が原始関数を持てば」これが成り立つ。何か関係があるのだろうか？

Ω を $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続とするとき、以下の 3 つの条件の関係について調べよう。

(i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)

(ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ

(iii) f は Ω で正則である

すでに (i) $\Rightarrow$ (ii) は知っているが[70]、実は (ii) $\Rightarrow$ (i) も成り立つ。証明は難しくないので、このすぐ後で述べる (命題 6.10)。

実は (i) $\Rightarrow$ (iii) である。それは Cauchy の積分定理を用いて得られる「正則ならば、各点の近傍で冪級数展出来る」という定理 7.4(この講義の重要な目標) から、F は何回でも微分できることが分かるので、特に F が 2 回微分可能であることから、$f = F'$ も微分できるからである。上に述べたように (i) と (ii) は同値なので、(ii) $\Rightarrow$ (iii) も成り立つ。すなわち「Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つならば、f は Ω で正則である。」これは通常 **Morera の定理**と呼ばれる。

(これは既に言ってあることだが) (iii) $\Rightarrow$ (ii) は一般には成り立たない。これは $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ という例から分かる (念のため: $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$)。

ここまでをまとめると、

(i) と (ii) は同値で (iii) より強い

[70] $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = F(\text{終点}) - F(\text{始点}) = 0.$

(iii) に条件を足して (ii) を導くのが Cauchy の積分定理である、と見ると、はっきりする。

Ω が (次項で定義を説明する) 単連結領域である場合は、(iii) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つ (定理 6.12)。これは Cauchy の積分定理の 1 つの有名な形である (ただし、この講義で証明をきちんとする時間的余裕があるかは分からない)。ゆえに

単連結領域に対しては、(i), (ii), (iii) は同値である

余談 6.7 (ベクトル解析を勉強した人に) 実は、ベクトル解析にもこれと対応する話がある[71]。(i) が「ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持つ」, (ii) が $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$, (iii) が $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 0$, ということになる。(i) と (ii) は同値で、(i) (あるいは (ii)) から (iii) が導かれるが、逆は一般には成り立たず、単連結領域であれば逆も成立する、というのは同じである。 ■

余談 6.8 (複素数の世界は朗らか(ほがらか)) 高木貞治の解析概論 [30] には、この辺りのことを次のように書いてある。(i) と (ii) に相当することを「かりに積分可能ということにしてみよう」…(中略)…「この意味において、複素数の世界では、微分可能も積分可能も同意語である。驚嘆すべき朗らかさ！」とある。印象的な言い回しだけど (持っている人は原文を読むことを勧めます)、単連結などの条件がないと同意でないことは注意しよう。■

余談 6.9 実は任意の f に対して (iii) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つならば、Ω は単連結である。 ■

(i), (ii), (iii) のこのような関係をはっきりさせるのが、この講義の重要な課題である。

では (ii) $\Rightarrow$ (i) を証明しよう。

「領域」という用語は、定義 2.18(p. 48) で導入してある。

命題 6.10 (任意の区分的 C^1 級閉曲線に沿う線積分が 0 ならば原始関数を持つ) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は連続で、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つとする。このとき、ある正則関数 $F\colon\Omega\to\mathbb{C}$ が存在して、$F' = f$.

証明 Ω 内の任意の点 a を取る。Ω が弧連結であるから、任意の $z\in\Omega$ に対して、a を始点、z を終点とする Ω 内の区分的に C^1 級の曲線 C_z が存在する。

$$F(z) := \int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta$$

とおく。$F(z)$ の値は C_z の取り方にはよらない。実際、a を始点、z を終点とする Ω 内の 2 曲線 C_z, C_z' があるとき、$C := C_z + (-C_z')$ とおくと、C は閉曲線であるので、条件 (ii) から

$$0 = \int_C f(\zeta)\,d\zeta = \int_{C_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{C_z'} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つからである。

この F が f の原始関数であることを示す。任意の $z\in\Omega$ に対して、$\exists\varepsilon>0$ $D(z;\varepsilon)\subset\Omega$. ゆえに $|h|<\varepsilon$ を満たす任意の h に対して、z から $z+h$ に向かう線分 $[z,z+h]$ は Ω に含まれる。C_{z+h} として $C_z + [z,z+h]$ を選ぶことにより、

$$F(z+h) - F(z) = \int_{C_z+[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta - \int_{C_z} f(\zeta)d\zeta = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta.$$

[71] ベクトル解析の場合は、クロース・アップされる条件が (i), (iii) なのに、関数論では (ii), (iii) がクロース・アップされるのはなぜなのだろう？ Cauchy の積分定理のせい？

一方
$$\int_{[z,z+h]} d\zeta = [\zeta]_{\zeta=z}^{\zeta=z+h} = h$$
であるから、$\displaystyle\int_{[z,z+h]} f(z)\, d\zeta = f(z)h$ であるので、$h \neq 0$ とするとき
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(\zeta)-f(z))\, d\zeta.$$
ゆえに
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &\le \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)|\, |d\zeta| \\ &\le \frac{1}{|h|}\max_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)| \int_{[z,z+h]} |d\zeta| = \max_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)|\,.\end{aligned}$$
f は z で連続であるから、この右辺は、$h \to 0$ のとき 0 に収束する。ゆえに $F'(z) = f(z)$. ■

6.4 星型領域, 単連結領域

Cauchy の積分定理のある有名な形 (定理 6.12) を紹介する。やや手間がかかるため、講義では証明を遂行する余裕はないと思われるが (詳しいことは付録 E.5 を見よ)、証明に用いるアイディアについては、説明を試みる。

ここでは、必要な用語の紹介を行う。

定義 6.11 (単連結) Ω を $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{C}^n$ の領域とする。Ω が**単連結** (simply-connected) であるとは，Ω 内の任意の閉曲線が定数曲線 (像が 1 点である曲線) に Ω 内で連続的に変形できることを言う。

閉曲線 $z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha,\beta])$ が、点 $a \in \Omega$ に、Ω 内で連続的に変形できるとは、ある連続関数 $F\colon [\alpha,\beta]\times[0,1] \ni (t,s) \mapsto F(t,s) \in \Omega$ が存在して
$$\begin{aligned} &F(t,0) = \varphi(t) \quad (t\in[\alpha,\beta]),\\ &F(t,1) = a \qquad (t\in[\alpha,\beta])\end{aligned}$$
が成り立つことをいう。

定理 6.12 (単連結領域における Cauchy の積分定理) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で単連結、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、C は Ω 内の区分的 C^1 級閉曲線とするとき、
$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

証明 (付録 E 節 (p. 281〜) を参照せよ。) ■

例 6.13 単連結な領域の例として，全空間 $\mathbb{R}^n$, 開球 $B(\boldsymbol{a};R) = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < R\}$, 平面内の単純閉曲線 (Jordan 閉曲線) が囲む領域，平面から半直線を除いた領域、3 次元空間での 1 点の補集合 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ などがある。後で証明するように、凸領域、星型領域も単連結領域である。

単連結でない領域の例としては，2 次元空間での 1 点の補集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ (複素平面での 1 点の補集合 $\mathbb{C}\setminus\{c\}$ も本質的に同じ), 円環領域 $\{z\in\mathbb{C} \mid R_1 < |z-c| < R_2\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$（$\ell$ は両方向に無限にのびた直線）, 輪環面 (トーラス, torus) の内部（ドーナツ型の領域）などがある． ■

この例の中に現れた「凸」,「星型」という言葉を説明しておく。

定義 6.14 (凸, 星型) Ω はベクトル空間の部分集合とする。

(1) Ω が**凸** (convex) であるとは、次が成り立つことをいう。

$$(\forall a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a, b] \subset \Omega.$$

(2) Ω が**星型** (star-shaped) であるとは、次が成り立つことをいう。

$$(\exists a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a, b] \subset \Omega.$$

特にこのとき、Ω は a について星型であるという。

おそらく、凸という言葉は既に知っている人が多いであろう。

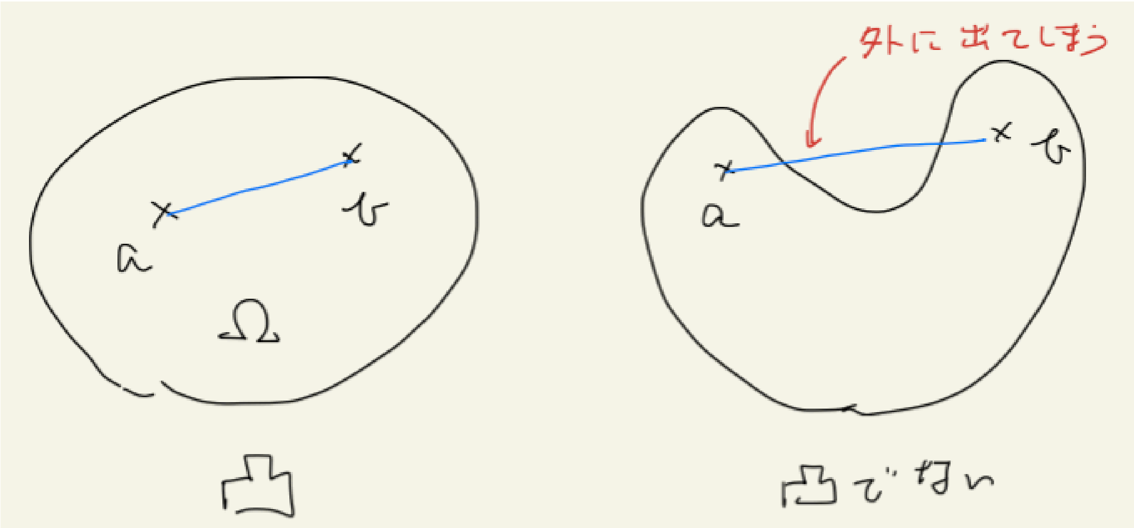


図 8: 凸領域、凸でない領域の典型的イメージ

星型について良くある説明に、次のようなものがある。Ω が部屋の見取り図であるとする。部屋全体を明るくするために、1 つのライトだけで足りる場合が星型で、そうでない場合は星型でない。つまり、ある場所にライトをおいたとき、部屋のすみずみまで光が届くように出来るならば、その場所を a として定義の条件が満たされる、ということである。

例 6.15 (凸集合の例) 全平面 $\mathbb{C}$, 開円盤 $D(c; r)$, 閉円盤 $\overline{D}(c; r)$, 三角形 (内部あるいは内部と周の合併)、正多角形 (内部あるいは内部と周の合併) は凸である。■

例 6.16 (星型集合の例) 空でない凸集合 (全平面 $\mathbb{C}$, 開円板, 閉円盤, 三角形の内部、三角形 (内部と周の合併)、正多角形の内部など) は星型である。平面と半直線の差集合、例えば $\mathbb{C}$ から負軸を取り除いた領域

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\},$$

は星型である (以下、あちこちで登場する)。また $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq -1 \vee z \geq 1\}$ も星型である。そして (もちろん?) “星の形” ☆ の内部も星型である。

一方、$\mathbb{C}$ から原点を除いた領域 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は星型ではない (どこにライトを置いても、原点の影になる半直線が出来る)。■

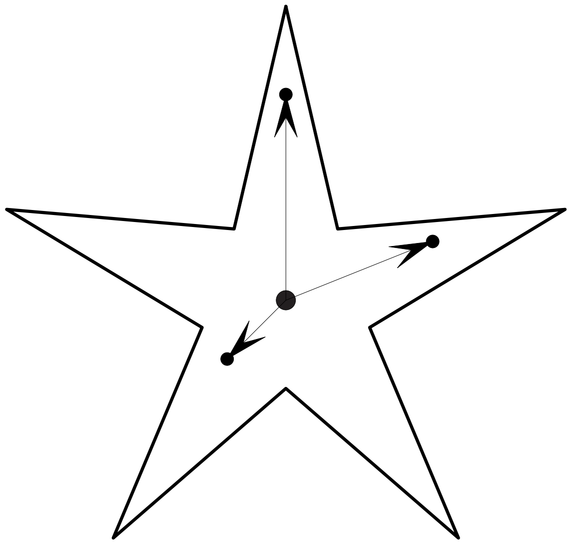


図 9: 星の形は星型領域: ある 1 点からすべての点が見えるから

命題 6.17 Ω は $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}$ の領域で、$\Omega \neq \emptyset$ とする。

(1) Ω が凸ならば、Ω は星型である。

(2) Ω が星型ならば、Ω は単連結である。

証明

(1) Ω が凸と仮定する。$\Omega \neq \emptyset$ であるから $a \in \Omega$ が存在する。任意の $b \in \Omega$ に対して、Ω が凸であることから、$[a,b] \subset \Omega$. ゆえに Ω は星型である。

(2) Ω が星型と仮定する。ある $a \in \Omega$ が存在して、任意の $b \in \Omega$ に対して $[a,b] \subset \Omega$ である。Ω 内の任意の曲線 C: $z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha,\beta])$ に対して、

$$F(t,s) := sa + (1-s)\varphi(t) \quad (t \in [\alpha,\beta],\ s \in [0,1])$$

とおくと、$F(t,s) \in [a, \varphi(t)] \subset \Omega$. ゆえに $F\colon [\alpha,\beta] \times [0,1] \to \Omega$ である。さらに F は連続で、

$$F(t,0) = \varphi(t), \quad F(t,1) = a \quad (t \in [\alpha,\beta]).$$

つまり曲線 C は連続的に定数曲線 a に変形できる。■

問 66. 平面内の三角形の内部、開円盤は凸領域であることを証明せよ (解答は p. 229)。

6.5 星型領域における Cauchy の積分定理

我々の目標は、単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 6.12) であるが、ここではまず星型領域バージョンを証明する。これは単連結領域の場合の証明の基礎にもなる。さらに、この後に控えている、正則関数の性質を調べる議論にも利用される。

定理 6.18 (星型領域における Cauchy の積分定理) Ω は $\mathbb{C}$ の星型領域 (例えば三角形の内部領域や円盤領域などの凸領域)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の原始関数が存在する。

ゆえに Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0.$

また任意の $p, q \in \Omega$ に対して、p, q をそれぞれ始点、終点とする区分的 C^1 級曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値は、p と q のみで定まる (曲線 C の取り方によらない)。

f が Ω で正則という仮定を、$a \in \Omega$ として、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、$\Omega \setminus \{a\}$ で正則、と緩めても同じ結論が成り立つ。

(証明のあらすじを一言でまとめると、線積分で原始関数を作る、ということである。実関数の場合の $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ に相当する事実が成立するのが要点である。)

証明 Ω は星型であるから、ある $a \in \Omega$ が存在して、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して、$[a, z_0] \subset \Omega$ が成り立つ。そこで

$$F(z_0) := \int_{[a,z_0]} f(z)\,dz \quad (\text{$[a,z_0]$ は a を始点、z_0 を終点とする線分})$$

とおくことにより、$F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が定義できるが、実は $F' = f$ が成り立つことを以下に示す。

Ω は開集合であるから、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して、ある正数 ε が存在して $D(z_0;\varepsilon) \subset \Omega$.

ゆえに $0 < |h| < \varepsilon$ を満たす任意の h に対して、$z_0 + h \in \Omega$. このとき

$$\int_{[a,z_0]} f(z)\,dz + \int_{[z_0,z_0+h]} f(z)\,dz - \int_{[a,z_0+h]} f(z)\,dz = 0 \tag{41}$$

が成り立つ。3 点 a, z_0, $z_0 + h$ が一直線上にある場合の証明は簡単である。3 点 a, z_0, $z_0 + h$ が、一直線上にない場合は、それらを頂点とする三角形 (周を含む) を Δ とすると、$\Delta \subset \Omega$ (このことの証明は読者に任せる) が成り立ち、(曲線としての) $[a, z_0] + [z_0, z_0 + h] - [a, z_0 + h]$ は、三角形 Δ の周を一周する閉曲線であるから (向きは正である場合もあるし、そうでない場合もあるが、いずれにしても) 補題 6.1 によって $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$ いずれの場合も (41) が成り立つことが分かる。

ゆえに

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_{[z_0,z_0+h]} f(z)\,dz.$$

(ここから後は、命題 6.10 の証明と同じである。一応書いておく。) これから

$$\begin{aligned}\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) &= \frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} f(z)\,dz - \frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} dz \cdot f(z_0)\\ &= \frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} \left(f(z) - f(z_0)\right)\,dz.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0)\right| &\le \frac{1}{|h|}\max_{z\in[z_0,z_0+h]} |f(z) - f(z_0)| \int_{[z_0,z_0+h]} |dz|\\ &= \max_{z\in[z_0,z_0+h]} |f(z) - f(z_0)|.\end{aligned}$$

f が z_0 で連続であるから、$h \to 0$ のとき右辺は 0 に収束する。ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = f(z_0).$$

すなわち F は z_0 で微分できて $F'(z_0)=f(z_0)$. ■

問 67. 上の証明の中に現れた a, z_0, z_0+h を頂点とする三角形 Δ (三角形がつぶれている場合も考える) が Ω に含まれることを証明せよ。

問 68. (自分でそらで書けるようにしておくと良い。) $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ が連続ならば、$z\in\Omega$ に対して、$h\to 0$ のとき $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta\to f(z)$ であることを示せ。

(大きさを 0 に近付けるとき、平均が密度に収束する、という関数論に限らず良く出て来る話である。)

系 6.19 (円盤領域に対する Cauchy の積分定理) D は $\mathbb{C}$ の円盤領域、$f\colon D\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、D 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

が成り立つ。
(f は D で連続で、D 内の 1 点を除き正則、と仮定を弱めても同じ結論が成り立つ。)

証明 円盤領域は星型領域であるから。■

例 6.20 ($1/z$ の原始関数) (もう Log は知っているわけだけど) 関数 $f\colon\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は原始関数を持たない (復習: $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0$ だから)。領域 $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}\mid z\le 0\}$ は、点 1 について星型であるので、f を Ω に制限した関数 $f|_\Omega$ は原始関数

$$F(z)=\int_{[1,z]} f(\zeta)\,d\zeta=\int_{[1,z]}\frac{d\zeta}{\zeta}\quad(z\in\Omega)$$

を持つ (これは実は対数関数の主値 $\operatorname{Log} z$ に等しい — 導関数と、$z=1$ での値がそれぞれ一致するから)。また、C が Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線ならば $\displaystyle\int_C f(z)dz=0$. ■

次の例はとても重要である。慣れると結果は簡単に分かる[72]のだが、最初に証明するのは一仕事である。

例 6.21 ($\dfrac{1}{z-a}$ の円周に沿う積分) $a,c\in\mathbb{C}$ とするとき、

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\begin{cases}2\pi i & (|c-a|<r)\\ 0 & (|c-a|>r).\end{cases}\tag{42}$$

が成り立つ。

まず、$|a-c|>r$ の場合、$R:=\dfrac{r+|a-c|}{2}$ とおくと、$r<R<|a-c|$ で、さらに

- $\dfrac{1}{z-a}$ は $D(c;R)$ で正則

[72]例えば留数定理を使うようになれば、ほぼ自明である。また、関数 $\dfrac{1}{z-a}$ が正則な範囲内で、曲線 $|z-c|=r$ を連続的に変形して曲線 $|z-a|=\delta$ に出来るから、$\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}$. あるいは Cauchy の積分公式 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ を $f\equiv 1$ に対して用いる。

- $|z-c|=r$ は円盤 $D(c;R)$ 内の閉曲線

が成り立つ。円盤領域における Cauchy の積分定理により、

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=0.$$

以下、$|a-c|<r$ の場合を考える。現時点で使える道具は限られているので、証明はそれほど易しくない。複数の方法を示す。授業では、(方法 a), (方法 b) を紹介する。

(方法 a) 図 10 のような曲線 C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, Γ_1, Γ_2 を導入する。$C_{11}+C_{12}$, $C_{21}+C_{22}$ はそれぞれ $|z-c|=r$, $|z-a|=\delta$ であるから、

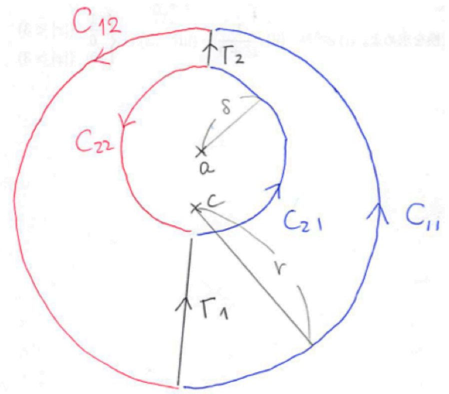


図 10: 切り込みを入れて二つの閉曲線の和として表す

$$\int_{C_{11}+C_{12}}\frac{dz}{z-a}=\int_{C_{21}+C_{22}}\frac{dz}{z-a} \tag{43}$$

を証明すれば良い。

$C_{11}-\Gamma_2-C_{21}-\Gamma_1$ は、$\dfrac{1}{z-a}$ が正則なある星型領域内の閉曲線であるから、

$$\int_{C_{11}-\Gamma_2-C_{21}-\Gamma_1}\frac{dz}{z-a}=0.$$

$C_{12}+\Gamma_1-C_{22}+\Gamma_2$ は、$\dfrac{1}{z-a}$ が正則なある星型領域内の閉曲線であるから、

$$\int_{C_{12}+\Gamma_1-C_{22}+\Gamma_2}\frac{dz}{z-a}=0.$$

辺々加えると Γ_1, Γ_2 上の積分がキャンセルされて

$$\int_{C_{11}+C_{12}-C_{21}-C_{22}}\frac{dz}{z-a}=0.$$

これは (43) を示している。

(方法 b) (高橋 [22] で知った。) $|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して、

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で $\left|\text{公比}\right| = \left|\dfrac{a-c}{z-c}\right| = \dfrac{|a-c|}{r} < 1$ (z によらない！) であるから、Weierstrass の M-test より $|z-c|=r$ 上で一様収束する[73]。ゆえに項別積分が可能で

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z-c|=r}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(a-c)^n 2\pi i\delta_{n0}=2\pi i.$$

(無限個の項 (積分) の和になるが、$n=0$ の項を除き 0 であり、$n=0$ の項は $(a-c)^0 2\pi i=2\pi i$ である。)

(方法 c) 教科書 (神保 [1]) は、Green の公式から次の形の Cauchy の積分定理を導いている[74]。

> D は $\mathbb{C}$ の領域で、その境界は有限個の互いに交わらない滑らかな単純閉曲線からなり、∂D は進行方向の左手に領域を見るように向きがつけられている。f は $\overline{D}=D\cup\partial D$ を含む領域上で正則とするとき、$\displaystyle\int_{\partial D}f(z)\,dz=0.$

$\dfrac{1}{z-a}$ は $D:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|>\delta,\ |z-c|<r\}$ の閉包を含む領域で正則で、D の境界は C_1: $|z-c|=r$ と C_2: $|z-a|=\delta$ の像からなり、C_1-C_2 は、進行方向の左手に D を見る向きになっているので

$$0=\int_{\partial D}\frac{dz}{z-c}=\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}-\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}.\blacksquare$$

問 69. (43) を示せ。(上に一応書いてあるが、「ある星型領域」は何か、きちんと示すこと。)

6.5.1 余談: 定理 6.18 により $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$ を証明することを考える

(しばらく工事中)

閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C f(z)\ dz=0$ を示したい場合、上で紹介した単連結領域に対する Cauchy の積分定理 (定理 6.12) は便利であるが、講義で証明する時間は取れないので、星型領域に対する Cauchy の積分定理 (定理 6.18) で工夫することを考えてみよう。

領域 Ω 上定義された正則関数 f と、Ω 内の閉曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\ dz=0$ を証明したいとき、$C^*\subset\Omega'\subset\Omega$ を満たす星型領域 Ω' が見つかれば、$\displaystyle\int_\Omega f(z)\ dz=0$ が結論できる。

簡単な場合には、Ω' として三角形の内部や円盤領域などの凸領域 (それは星型である) が見つかることがある。これは割と考えやすい。

凸領域が見つからなくても、星型領域が存在する場合があるが、これを見つけるのは慣れないと意外と難しい。

Ω' が星型であるとは、ある $a\in\Omega'$ が存在して

$$(\forall z\in\Omega')\quad [a,z]\subset\Omega'$$

[73] この段階で、講義では Weierstrass の M-test や、「一様収束ならば項別積分可能である」ことを説明していないかもしれないが、次節の定理の証明に必要になるので、必ず説明する。

[74] 細かいことを言うと、Green の公式を用いるため、[1] では正則関数の定義に導関数の連続性を仮定しているが、$\dfrac{1}{z-a}$ の導関数は連続であるから、問題は生じない。

が成り立つことであるが、先に a を選んでみて、a から "見えない" Ω の点をすべて除いたものを Ω' とする、もし $C^* \subset \Omega'$ ならば $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が示せる、というのが 1 つのやり方である。

例えば、 $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a = 1$ とするとき、a から見えない点 (負の実数) を Ω からすべて除くと、$\Omega' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ となる。これは (Log などの定義域として使われる) よく知られた星型領域である。

同様に、平面から閉円盤を除いた領域 $\Omega := \mathbb{C} \setminus \overline{D}(c; R)$ は星型ではないが、任意の $a \in \Omega$ に対して、a から見えない部分を除くと、星型領域 Ω' ができる。実際、L から円 $|z - c| = R$ に接線 (2 本ある) を引いて、2 つの接線ではさまれる、円の影になる部分を除けば良い。(図を用意しよう。)

あるいは、$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$, $a = 0$ とするとき、a から見えない点を Ω からすべて除くと、$\Omega' = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ となる。

関数論では、円弧と線分で出来た "バウムクーヘン扇" 型の領域がしばしば登場する[75]。$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $\phi_2 < \phi_1 + 2\pi$ とするとき、$B(c; R_1, R_2, \phi_1, \phi_2)$ を次式で定義する。

(44) $$B(c; R_1, R_2, \phi_1, \phi_2) := \left\{ c + re^{i\theta} \;\middle|\; R_1 < r < R_2 \land \phi_1 < \theta < \phi_2 \right\}.$$

これがどのような場合に星型となるか、検討してみよう。

補題 6.22 (角領域から中心付近 $|z - c| \le R$ を除いた領域の星型性) $c \in \mathbb{C}$, $R \ge 0$, $\Delta\varphi \in (0, \pi/2)$ とするとき、

$$\Omega = \left\{ c + re^{i\theta} \;\middle|\; r > R \land \theta \in (\varphi - \Delta\varphi, \varphi + \Delta\varphi) \right\}$$

は星型である。実際 $R = 0$ のときは $\rho = 1$, $R > 0$ のときは $\rho = \dfrac{R}{\cos\Delta\varphi}$ として $L := \rho e^{i\varphi}$ とおけば

$$(\forall z \in \Omega) \quad [L, z] \subset \Omega.$$

すなわち Ω の任意の点は L から見える。

証明 (工事中) $R > 0$ の場合を考える。$L = \rho e^{i\varphi}$ から円 $|z - c| = R$ に接線を引く。L と接点を見込む角 Φ は、$\rho\cos\Phi = R$ を満たす。接点が $\partial\Omega$ 上にあるとき $\Phi = \Delta\varphi$ であり、このとき $\rho\cos\Delta\varphi = R$. ■

補題 6.22 から、次の定理が得られる。

定理 6.23 (バウムクーヘン扇型領域の星型性) $c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $\Delta\varphi \in (0, \pi/2)$ とする。$\cos\Delta\varphi > \frac{R_1}{R_2}$ ならば (つまり $0 < \Delta\varphi < \cos^{-1}\frac{R_1}{R_2}$ ならば)

$$B(c; R_1, R_2, \varphi - \Delta\varphi, \varphi + \Delta\varphi) = \left\{ c + re^{i\theta} \;\middle|\; R_1 < r < R_2 \land \theta \in (\varphi - \Delta\varphi, \varphi + \Delta\varphi) \right\}$$

は星型領域である。「丸い道 (バウムクーヘン扇型領域) は長いと見通せないが、十分短ければ星型になる。」

証明 $\rho := \frac{R_1}{\cos\Delta\varphi}$, $L := \rho e^{i\varphi}$ とする。仮定より $R_1 < \rho < R_2$. ゆえに $L \in \Omega$ であり、L から $\left\{ re^{i\theta} \;\middle|\; R_1 < r \land \theta \in (\varphi - \Delta\varphi, \varphi + \Delta\varphi) \right\}$ は見通せる。■

[75] 「バウムクーヘン扇型の領域」は半分おふざけで言っています。

系 6.24 (バウムクーヘン扇型領域の閉包の近傍で正則な関数についての Cauchy 積分定理) $c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $\phi_1 \in \mathbb{R}$, $\phi_2 < \phi_1 + 2\pi$ に対して $B := B(c; R_1, R_2, \phi_1, \phi_2)$ とする。$\overline{B}$ を含む開集合で正則な f に対して

$$\int_{\partial B} f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ。

証明 同心円弧の中心を通る直線で切って、複数の短いバウムクーヘン扇領域 B_i $(i = 1, \cdots, n)$ に等分割するとき、次式が成り立つ。

$$\int_{\partial B} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B_i} f(z)\,dz.$$

n が十分大きければ、$B_i = B(c; R_1, R_2, \phi_{1,i}, \phi_{2,i})$ を膨らませた $B(c; R_1 - \varepsilon, R_2 + \varepsilon, \phi_1 - \varepsilon, \phi_2 + \varepsilon)$ (ε は小さな正数) が星型領域になるので、定理 6.18 より $\displaystyle\int_{\partial B_i} f(z)\,dz = 0$. ゆえに $\displaystyle\int_{\partial B} f(z)\,dz = 0$.
■

6.6 積分路の変形 (1), 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

正則関数 f の線積分において、f が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても線積分の値は変わらない、という定理が成り立つ。

積分路の変形

f が正則な範囲で C_1 が C_2 に「変形出来る」ならば、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$

詳しく言うと、次の 2 つの場合がある。

(a) 積分路の始点と終点は変えずに (固定して)、被積分関数が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。

(b) 積分路が閉曲線の場合は (始点、終点は気にせず)、被積分関数が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。

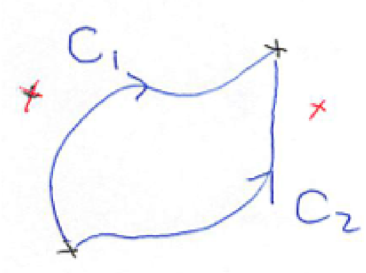


図 11: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

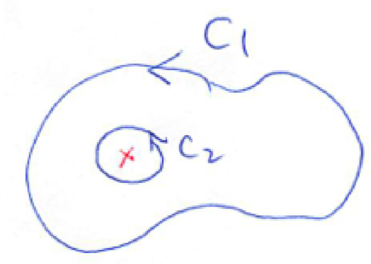


図 12: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

簡単な場合は、定理 6.18 を用いて積分路の変形が正当化できる。

(b) を一般的に認めると、単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 6.12) が得られる。単連結領域では、閉曲線 C は定数曲線 ($z=\varphi(t)=c$ ($t\in[\alpha,\beta]$, 幾何学的には像が 1 点ということ) に連続的に変形でき、定数曲線に沿う線積分は 0 であるから。詳しい説明は、付録 **E** 節を見よ。

7 円盤における Cauchy の積分公式と正則関数の冪級数展開可能性

(2020 年度の講義で、このあたり変更を行った。こちらにフィードバックすべきであるが、少し遅れるかも。受講生は講義のスライドを読んで下さい。)

この節は短いけれど、非常に重要な山場である。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

定理 7.1 (円盤における Cauchy の積分公式) $c\in\mathbb{C}$, $R>0$ に対して、$D:=D(c;R)$ とおく。Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$\overline{D}\subset\Omega$ を満たし、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、任意の $z\in D$ に対して、

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{45}$$

(状況を図に描くこと。)

証明 曲線 $|\zeta-c|=R$ を C と表すことにする。

$$g(\zeta):=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & (\zeta\in\Omega\setminus\{z\})\\ f'(z) & (\zeta=z)\end{cases}$$

とおくと、$g\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は連続で、$\Omega\setminus\{z\}$ で正則である。

十分小さい正の数 ε を取ると、$D(c;R+\varepsilon)\subset\Omega$ となる。円盤領域 $D(c;R+\varepsilon)$ は星型領域であるから、星型領域における Cauchy の積分定理により、

$$\int_C g(\zeta)\,d\zeta=0.$$

ゆえに

$$\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_C\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)\int_C\frac{d\zeta}{\zeta-z}=2\pi i f(z).$$

(最後の等号は、例 6.21 を用いた。) 割り算して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z).\blacksquare$$

7.2 正則関数の冪級数展開可能性

この項で、この講義の 1 つの大きな目標を達成する。おっと「一様収束するならば項別積分可能」を忘れていた。

命題 7.2 (一様収束するならば項別積分可能) C は $\mathbb{C}$ 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}$ は C^* 上の連続関数からなる関数列で、C^* 上 f に一様収束するならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

証明 $n\to\infty$ のとき、

$$\left|\int_C f_n(z)dz - \int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f_n(z)-f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in C^*}|f_n(z)-f(z)|\int_C |dz| \to 0.\blacksquare$$

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** (**analytic**) であるといい、解析的な関数のことを**解析関数** (**analytic function**) と呼ぶ。

注意 7.3 (解析的、解析関数の言葉づかい) 解析的という言葉は、つねにここに書いた意味で用いられるが、解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、解析接続 (後で定義する) により定まる関数、という意味で用いられることもある。 ■

定理 7.4 (正則関数は解析的, 正則関数は冪級数展開可能) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $R>0$, $\overline{D(c;R)}\subset\Omega$ とするとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta \tag{46}$$

とおくと、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D(c;R)).$$

次の形にしておけばよかったか？「Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $0<R\le\infty$, $D(c;R)\subset\Omega$ が成り立つとする。このとき、$0<r<R$ を満たす任意の r に対して

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta \tag{47}$$

とおくと、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D(c;R))$$

が成り立つ。」 — 来年度はどうするか考えよう。

証明 $D:=D(c;R)$, $C:=\partial D$ とおく (C はパラメーター曲線 $\zeta=c+Re^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$, あるいはその像 $C^*=\{\zeta\in\mathbb{C}\mid|\zeta-c|=R\}$ を表す)。任意の $z\in D$ に対して、Cauchy の積分公式から

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

$r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと、$0 \le r < 1$ で、任意の $\zeta \in C$ に対して、$\left|\dfrac{z-c}{\zeta - c}\right| = r$ であるから、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) + (c - z)} = \frac{1}{\zeta - c} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-c}{\zeta - c}} = \frac{1}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{\zeta - c}\right)^n.$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \left(\frac{z-c}{\zeta - c}\right)^n d\zeta.$$

f は C^* で連続であるから、$M := \max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|$ が存在する。

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \left(\frac{z-c}{\zeta - c}\right)^n\right| \le \frac{M}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{M}{R} r^n$ とおくとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ は収束するので、Weierstrass の M-test により、級数は円周 C^* 上一様収束する。ゆえに項別積分が出来て、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \left(\frac{z-c}{\zeta - c}\right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta\right) (z-c)^n.$$

すなわち

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n. \blacksquare$$

(46) の右辺の積分は、一見 R に依存するようだが、そうではないことに注意しよう。つまり、c を定めたとき、$R > 0$, $\overline{D(c; R)} \subset \Omega$ を満たす R は無数に存在するが、a_n の値そのものは R によらず定まる。そのことは、実は

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

が成り立つことから分かるが、次のようにしても分かる (この後者の考え方が後で重要になる)。$0 < R_1 < R_2$, $\overline{D(c; R_2)} \subset \Omega$ とするとき、被積分関数が $D = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid R_1 < |\zeta - c| < R_2\}$ の閉包を含むある開集合で正則なことから、

$$(\star) \qquad \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta - \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta = 0.$$

問 70. $(\star)$ を確かめよ。

系 7.5 正則関数は何回でも微分可能である。

証明 収束冪級数の定める関数は、収束円の内部で何回でも微分可能であるから。 ■

系 7.6 複素関数が原始関数を持つならば、実は正則関数である。

証明 複素関数 f に対して $F' = f$ を満たす F が存在したとする。F は正則であるから、無限回微分可能で、特に 2 回微分可能であるから、$f = F'$ は 1 回微分可能、すなわち正則である。 ■

§6.3 で次の 3 条件をあげ、(i)⇔(ii) を証明してあった。

(i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)

(ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ

(iii) f は Ω で正則である

予告した (i)⇒(iii) (これが系 7.6) がやっと証明できた。ゆえに **Morera の定理** ((ii)⇒ (iii) という内容) も証明できた。

注意 7.7 ((46) の覚え方) 公式 (46) は、以下のように覚えると良いかもしれない。
Cauchy の積分公式には、積分記号下の微分を何回でも施すことが出来る。つまり任意の $z \in D$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \tag{48}$$

が成り立つ。この事実を **Goursat の定理**と呼ぶことがある。

これから、f の c のまわりの冪級数展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の係数は

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

これは上で紹介した証明とは、別の証明ということになる。
冪級数展開の係数を線積分で表す公式は、覚えにくいと感じるかもしれないが

Cauchy の積分公式を n 回微分して、$z = c$ を代入して、$n!$ で割った式

ということを知っておくと、思い出しやすいかもしれない。■

余談 7.8 (実関数の場合の解析的 vs 無限回微分可能 (違いを虫眼鏡で見る)) 解析関数という言葉は実関数に対しても用いられる。その場合実解析的と言ったりする。
複素関数について「解析的=微分可能」を見たばかりであるが、実関数について、解析的と微分可能の間に大きな違いがあることは明らかである。それでは、解析的と無限回微分可能の間の違いはどうだろう？
まず解析的ならば無限回微分可能である (収束冪級数が無限回微分可能なことは実関数でも成り立つことが容易に分かるから)。
その逆、つまり「無限回微分可能ならば解析的」は成り立つだろうか？答えは No である。次の例が有名である (微積分のテキストに載っている)。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0). \end{cases}$$

この f は $\mathbb{R}$ 全体で C^∞ で

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

を満たす (そうであることを証明するのは、微積分のちょっとした演習問題)。もしも f が解析的ならば、0 のある近傍で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0$$

が成り立つが、これは $x>0$ で $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}>0$ であることに矛盾する。ゆえに f は解析的ではない。

ここまでは常識的な話であるが、以下は完全な余談というか雑談である (ある人の趣味とつきあった結果)。

上の例は、C^∞ 級であり、Taylor 級数の収束半径が無限大であり、その和 (0) がもとの関数 f と等しくない、というものであるが、C^∞ 級であり、Taylor 級数の収束半径が 0 である関数の例として

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^n x}{n!}$$

がある (ハイラー・ワナー [33])。

一松 [34] (あれ？もしかすると下巻？) によると「数列 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\cdots$ をまったく任意に与えるとき、$(-\infty,\infty)$ で、 C^∞ 級で、定められた一点 a において

$$f^{(n)}(a)=\alpha_n \quad (n=0,1,2,\cdots;\ f^{(0)}(a)\equiv f(a))$$

をみたすような函数 $f(x)$ を作ることができる。」(証明は、岩村聯, C^∞ 級函数の extension, 数学 (日本数学会編), 5 巻 2 号 (1953), p. 91–92 の III 節にある。)

さらに、定義域の各点で無限回微分可能なのに、いたるところで解析的でないような関数も存在する (Kabaya(Imai)-Iri [35])。 ■

7.3 冪級数展開の収束半径

冪級数の収束半径については、係数を用いた公式 (ratio test (d'Alembert の公式) や Cauchy-Hadamard の公式) を説明した。

任意の正則関数は、定義域に属する任意の点の周りに冪級数展開できることが分かった (定理 7.4) 。

すでに紹介した公式を適用するには、冪級数展開の係数が具体的に得られていないと使いにくい。元の関数の性質を元にした特徴づけが出来ると良い。

一般的な定理を紹介する前に、実例で考えよう。例えば

$$\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{i,-i\},\quad f(z)=\frac{1}{z^2+1}\quad (z\in\Omega),\quad c=0.$$

(もちろん、$f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}$ が冪級数展開で、収束半径 $\rho=1$ と分かるが、具体的に冪級数展開しないで、そのことを示してみよう、ということである。)

$0<R<1$ を満たす任意の R について、f は $D(0;R)$ で正則で、$\overline{D(0;R)}\subset\Omega$ が成り立つので、定理?? より、f は $D(0;R)$ で冪級数展開できる。すなわち、ある $\{a_n\}_{n\ge 0}$ が存在して

$$(\forall z\in D(0;R))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n. \tag{49}$$

R の取り方には自由度があるが、$\{a_n\}_{n\ge 0}$ 自体は R によらずに定まる (繰り返しになるが $a_n=f^{(n)}(0)/n!$ でこれは共通である)。

任意の $R\in(0,1)$ に対して、(49) が成り立つので、次式が成り立つ。

$$(\forall z\in D(0;1))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n. \tag{50}$$

この右辺の冪級数の収束半径 ρ は何だろう。$D(0;1)$ で収束するので、収束半径の定義から $\rho \geq 1$ が導けるが、実は $\rho = 1$ である。直観的には、円周 $|z-0|=1$ の上に f の特異点 $\pm i$ があるからであるが、きちんと示そう。

$\rho > 1$ と仮定して矛盾を導く。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束円 $D(0;\rho)$ で正則で、背理法の仮定 $\rho > 1$ から $i \in D(0;\rho)$ であるから、$z \to i$ のとき有限な複素数に収束する。特に

$$\lim_{\substack{z\to i\\ z\in D(0;1)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

ところが $z \to i$ のとき $f(z) = \frac{1}{z^2+1} \to \infty$. 特に

$$\lim_{\substack{z\to i\\ z\in D(0;1)}} f(z) = \infty.$$

これは (50) に矛盾する。

以上の議論は一般化できて次の定理が得られる。

定理 7.9 (冪級数展開の収束半径) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$ で $D(c;R) \subset \Omega$、円周 $|z-c| = R$ 上に f の特異点 z_0 (ここでは $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z)$ が存在しない、と言う意味) が存在するならば、f の c における冪級数展開の収束半径は R である。

もう一つ定理を紹介しておく。

定理 7.10 (冪級数展開の収束半径その 2) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$ とする。

$$A = \left\{ R \in (0,+\infty) \;\middle|\; \begin{array}{l} D(c;R) \text{ で正則な関数 } F \text{ と } \varepsilon \in (0,R] \text{ が存在して、} \\ D(c;\varepsilon) \text{ で } f = F \end{array} \right\}$$

とおくとき、f の c の周りの冪級数展開の収束半径 ρ は $\sup A$ に等しい。

例えば $g(z) = \mathrm{Li}_2(z)$ (二重対数関数) は、通常 $[1,+\infty)$ を分岐截線として、$\mathbb{C} \setminus [1,+\infty)$ で正則と定義される。0 での冪級数展開は

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (z \in D(0;1)).$$

この冪級数の収束半径は 1 であるから、ある $R > 1$ が存在して、g は $D(0;R)$ で正則ということはあり得ない (そのこと自身は二重対数関数を知らなくても分かる)。

一方、この冪級数は $\overline{D}(0;1)$ で一様収束するので、g は $\overline{D}(0;1)$ に制限すると、(1 も含めて) 連続であることも分かる。$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ の収束半径が 1 であることを、定理 7.9 に基づいて示したが、同じ論法でこの冪級数の収束半径が 1 であることは示せない。

Li_2 について、Mathematica で可視化してみると

```
Plot3D[Re[PolyLog[2, x + y I]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
Plot3D[Im[PolyLog[2, x + y I]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```

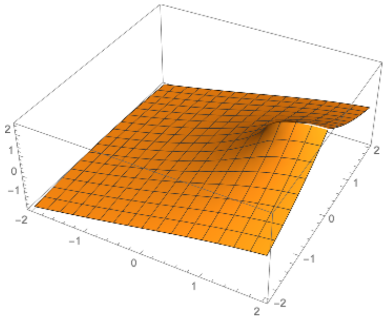


図 13: 実部

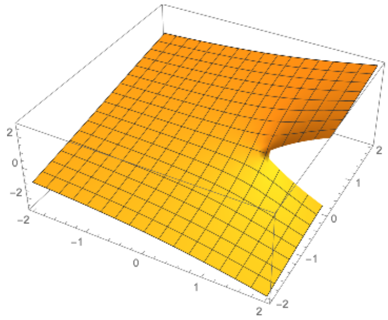


図 14: 虚部

例 7.11 (有理関数の冪級数展開の収束半径) $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ ($P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $P(z)$ と $Q(z)$ は互いに素) とするとき、$P(z)$ のすべての根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を除いた $\Omega := \mathbb{C}\setminus\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ で f は定義されて正則である。

一方、各 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して、$\displaystyle\lim_{z\to\alpha_j} |f(z)| = \infty$ であるので、$z = \alpha_j$ を含めて正則に拡張することは出来ない (α_j は後で定義する言葉を使うと、f の極である)。

ゆえに、$\forall c \in \Omega$ に対して、f の c の回りの 冪級数展開の収束半径は $\displaystyle\min_{1\le j\le n} |\alpha_j - c|$ である (最寄りの赤点までの距離に等しい)。■

例 7.12 (教科書 p. 81) 実関数

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

は $\mathbb{R}$ 全体で実解析的である。すなわち、$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対して、f は x_0 で冪級数展開できる:

$$(\exists r > 0)(\exists\{a_n\}_{n\ge0})(\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

しかし $x = 0$ での冪級数展開

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

は $-1 < x < 1$ でしか収束しない (理由は各自チェックせよ)。それは $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ の $c = 0$ のまわりの冪級数展開の収束半径が、上の例から $\min\{|i-0|, |-i-0|\} = 1$ となるから、$D(0;1)$ では収束し、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ では発散することから分かる。■

問 71. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ を $c = 2$ のまわりで冪級数展開したときの収束半径を (実際に冪級数展開せずに) 求めよ。

例 7.13 (Bernoulli 数の母関数の収束半径) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ とおく。

(孤立特異点の分類を知っていれば、0 は f の除去可能特異点、$2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$) は f の 1 位の極であることがすぐ分かり、f は $D(0;2\pi)$ で正則であるから、0 の周りの冪級数展開を…と見通しよく議論できる。)

まず分母と分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。

$$\text{分母 } e^z - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\exists n \in \mathbb{Z})z = 2n\pi i$$

であるから、f は $D_0 := \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{2n\pi i\}$ で正則な関数を定める。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$e^z - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

であるから、$z \neq 0$ に対して

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

右辺の冪級数の収束半径は ∞ であるので、

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

とおくと、整関数 g が定まる。$g(0) = 1 \neq 0$ に注意すると、

$$g(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 0 \wedge e^z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad z = 2n\pi i.$$

そこで

$$D := \mathbb{C} \setminus \{2n\pi i \mid n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\} = D_0 \cup \{0\},$$
$$\widetilde{f}(z) := \frac{1}{g(z)} \quad (z \in D)$$

とおくと、$\widetilde{f}\colon D \to \mathbb{C}$ は正則になり、f の拡張になる (0 でも定義できた)。

特に $|z| < 2\pi$ で正則であるから、$\exists \{B_n\}$ s.t.

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (|z| < 2\pi). \tag{51}$$

なお、$\lim_{z\to\pm 2\pi i} \left|\widetilde{f}(z)\right| = \infty$ であるから、$z = \pm 2\pi i$ での値を ($z = 0$ のときと同様に) 適当に定義することによって、より大きい半径の円盤で正則になるようには出来ない。ゆえに (51) の収束半径は 2π である。

以上が、定理 7.9 の適用例の話で、この後は余談である。

B_n は **Bernoulli数**(ベルヌーイ)と呼ばれ、多くの重要な応用がある (冪乗和 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ の公式[76], tan と cot の冪級数展開、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ の和, Euler-Maclaurin の公式, etc.)。

最初の数項を書いておく。

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \cdots$$

B_n の一般項を表す簡単な式は知られていない (そのため、この冪級数の収束半径を、Cauchy-Hadamard の定理を使って求めることは難しい)。Bernoulli 数の定義の仕方はいくつかあるが、上の議論はそのうちの一つである。

[76] $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ などの公式を高校で学ぶが、それを一般化した公式が Bernoulli 数を用いて得られる。

手短な定義 (まとめ)

$f(z) := \dfrac{z}{e^z-1}$ とおくとき、$B_n := f^{(n)}(0)$ を Bernoulli 数という (0 は f の除去可能特異点である)。

Mathmematica で試す

$f(z)$ を 0 のまわりに 10 次の項まで Taylor 展開してみる。

```
Series[z/(Exp[z]-1),{z,0,10}]
```

これから B_n が分かる。

もっとも、そもそも Mathematica には、Bernoulli 数, Bernoulli 多項式を計算する関数 `BernoulliB[`n`]`, `BernoulliB[`n`,` x`]` が用意されているので、実際に値が必要な場合に Taylor 展開する必要はない。

```
Table[BernoulliB[n],{n,0,10}]
```

$f(z)+\dfrac{z}{2}$ は偶関数なので、B_1 を除き、奇数次の項の係数 B_{2n-1} $(n\ge 2)$ は 0 であることが分かる (正則な偶関数は z^2 の冪級数に展開できることに注意)。

実は Bernoulli 数の定義には色々な流儀がある。一応、上で定義したものがメジャーだと考えているが[77]、それ以外で比較的多いのは、$f(z)$ の代わりに $f(z)+z$ を用いた場合に得られるもので、そうすると、B_1 だけが上の定義と異なり、$B_1=\dfrac{1}{2}$ となる。オリジナルの Jacob Bernoulli (1655–1705) や関孝和(たかかず) (1642–1708) はこちらを用いたそうである (Bernoulli も関も冪乗和を考える過程で導いたのであるが、その場合は $B_1=1/2$ の方が都合が良い)。

その他にも、偶数番目しか考えないとか (それで B_{2n} を B_n と書いてみたり)、符号を変えたり、細かな流儀の違いがある。たとえば教科書 (神保 [1]) は、偶数番目の項 B_{2n} のみ

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n} \tag{52}$$

によって定義している。$(-1)^{n-1}$ という因数をつけたため、$B_{2n}>0$ が成り立つ。■

問 72. 0 の近傍で正則な偶関数は z^2 の冪級数に展開されることを示せ。

余談 7.14 (Bernoulli 数の応用) Bernoulli 数は色々な基本的な問題の解を表すために使われる。いくつか紹介しよう。

cot, tan, coth などの冪級数展開:

$$\cot z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1},$$

$$z\coth z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}2^{2n}z^{2n},$$

$$\tan z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1}.$$

(教科書の流儀で Bernoulli 数を定義すると、$\tan z=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1}$ となる。)

[77]だから上でそのように紹介した。Mathematica を使う場合にも便利であろう。

冪乗和の公式 (関・Bernoulli の公式): この公式では $B_1=1/2$ とする。

$$\sum_{i=1}^n i^k=\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}B_j\frac{n^{k+1-j}}{k+1-j}\quad (n,k\in\mathbb{N}).$$

ゼータ関数 ζ の正の偶数における関数値[78]:

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k}\quad (k\in\mathbb{N}).$$

Euler-Maclaurin の公式: f が $[0,n]$ で C^k 級とするとき

$$\sum_{i=1}^n f(i)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}\left(f(n)-f(0)\right)+\sum_{j=2}^k\frac{B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(n)-f^{(j-1)}(0)\right)$$
$$+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^n\widetilde{B}_k(x)f^{(k)}(x)dx.$$

ただし $\widetilde{B}_k(x)$ は、Bernoulli 多項式 (おっと、紹介し忘れた) $B_k(x)$ を周期 1 で拡張したものである。和を積分で評価したり、定積分を台形公式で近似するときの誤差評価をしたり (周期関数の 1 周期積分を台形公式で近似すると高精度である、と云う話がどこかであったけれど、それはなぜだろう…) 色々な使い道のある公式である。

Bernoulli 数については、荒川・伊吹山・金子 [37] が詳しい。■

命題 7.15 (cot, tan の 0 のまわりの Taylor 展開) (51) で Bernoulli 数 $\{B_n\}$ を定めるとき、

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^\infty(-1)^k2^{2k}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}\quad (0<|z|<2\pi),\tag{53}$$

$$\tan z=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}\quad (|z|<2\pi).\tag{54}$$

証明

$$g(z):=\frac{z}{2}+f(z)=\frac{z}{2}+\frac{z}{e^z-1}$$

とおくと、g は偶関数である。(実際、通分して、分母・分子を $e^{z/2}$ で割ると $g(z)=\dfrac{z}{2}\cdot\dfrac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$ が得られる。) ゆえに g の冪級数展開の奇数次の項の係数は 0 であり、特に

$$B_1=-\frac{1}{2},\quad B_{2k+1}=0\quad (k=1,2,\cdots).$$

これから

$$g(z)=1+\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}.$$

$$z\cot z=z\cdot i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=iz\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}=iz\left(1+\frac{2}{e^{2iz}-1}\right)=iz+\frac{2iz}{e^{2iz}-1}$$
$$=g\left(2iz\right)=1+\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k}=1+\sum_{k=1}^\infty(-1)^k2^{2k}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}.$$

[78] 桂田「応用複素関数講義ノート」[36] の §5.4 「余接関数の部分分数展開」に解説を書いた。

$\tan z = \cot z - 2\cot 2z$ であるから、

$$\tan z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1} - 2\left(\frac{1}{2z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2z)^{2k-1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(1-2^{2k})z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}. \blacksquare$$

問 73. $z\coth z$ の $z=0$ のまわりの Taylor 展開を求めよ。

例 7.16 2 つの関数

$$f(z) := \frac{1}{z-1}, \quad g(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

はそれぞれ $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$ で正則である。f も g も $|z|<1$ で正則であるから、$h := f+g$ も $|z|<1$ で正則であるが、実は h は $|z|<2$ まで正則に拡張可能である。これは $g(z)$ の部分分数分解

$$g(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

を見れば $\left(h(z) = \dfrac{1}{z-2}\right.$ が分かるので$\left.\right)$ 明らかである。 $\blacksquare$

7.4 Cauchy の積分公式 (定理 7.1) を積分路の変形で証明する

(ここは更新したバージョンが別にある。それをこちらに持ってくること。)

複素関数のテキストを見てみると、Cauchy の積分公式の証明には色々なものがあることが分かる。それらを見るのは良い勉強になる。

以下のような "積分路の変形" を用いる証明が多い。

$0<\varepsilon<R-|c-a|$ を満たす任意の ε に対して ($|c-a|<R$ であるから $R-|c-a|>0$ である)、

$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{55}$$

が成り立つことを導く。つまり、積分路を $|z-c|=R$ から $|z-a|=\varepsilon$ に変形するわけである。

そうすると、$z = a+\varepsilon e^{i\theta}$ ($\theta\in[0,2\pi]$) とおくと

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

と変形できる。$\varepsilon\to 0$ とすると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,d\theta = f(a).$$

となることは容易に分かる[79]。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).$$

(55) を示すために、色々なやり方がある。代表的なものを見てみよう。

[79]念のため: $\left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)d\theta\right| \le \dfrac{1}{2\pi}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta = \sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|$. この右辺は、$f$ が a で連続であることから、$\varepsilon\to 0$ のとき 0 に収束する。

7.4.1 往復の橋を渡す

以下に説明する方法は、古い本に採用されていることが多い。

ϕ を $c-a$ の偏角とする。$c-a=|c-a|e^{i\phi}$ が成り立つ。

点 p を中心とする半径 r の円周を一周する曲線 $z=p+re^{i\theta}$ $(\theta\in[\phi,\phi+2\pi])$ を $C_{p,r}$ と表す。

$\overline{D}(a;\varepsilon)\subset D(c;R)$ となるような $\varepsilon>0$ を1つ取って固定する (例えば $\varepsilon:=(R-|a-c|)/2$)。

点 $a+\varepsilon e^{i\phi}$ から $a+(R-|a-c|)e^{i\phi}$ にまっすぐ進む曲線 $z=a+te^{i\phi}$ $(t\in[\varepsilon,R-|a-c|)$ を L と表す。

これらの記号を用いて

$$C:=C_{c,R}+L-C_{a,\varepsilon}-L$$

とおく (図 15 を見よ)。

C の周上と囲む範囲では、被積分関数は正則であるから

$$\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz=0$$

が成り立つ。一方、L と $-L$ に沿う積分は打ち消し合うので、

$$\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{C_{c,R}}\frac{f(z)}{z-a}dz-\int_{C_{a,\varepsilon}}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz-\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

少し批判的モードになってみると、この曲線 C は単純閉曲線ではないので、なぜ $\displaystyle\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz=0$ であるのか、すっきりしないきらいがある。この点を改良した証明を次に紹介する。

7.4.2 開いてから閉じる

(工事中…)

上の C は単純閉曲線でなかったが、正の角度 δ 開いた曲線 C_δ を作る:

$$C_\delta:=C_{c,R,\delta}+L_\delta-C_{a,\varepsilon,\delta}-L_\delta.$$

(個々の曲線 $C_{c,R,\delta}$, L_δ, $C_{a,\varepsilon,\delta}$ の定義は書かないが、図 16 を見れば何となく想像出来るであろう。)

この曲線 C_δ は単純閉曲線であり、

$$\int_{C_\delta}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=0$$

となることは説明しやすい。それから $\delta\to 0$ とすることにより

$$\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz=0$$

が示せるであろう。この後は、前項の証明をたどれば良い。

このように曲線の極限移行をする証明を学生に見せる価値はある、という気もするが、きちんとやるのは[80]、複素関数を受講している平均的な学生 (学部の2年生が多い) にとっては難しそうだ。教師の自己満足になりそうで気が引ける。

[80]適当なコンパクト集合 K をとって、被積分関数が K で一様連続であることから、積分の収束を示すのだろうか?

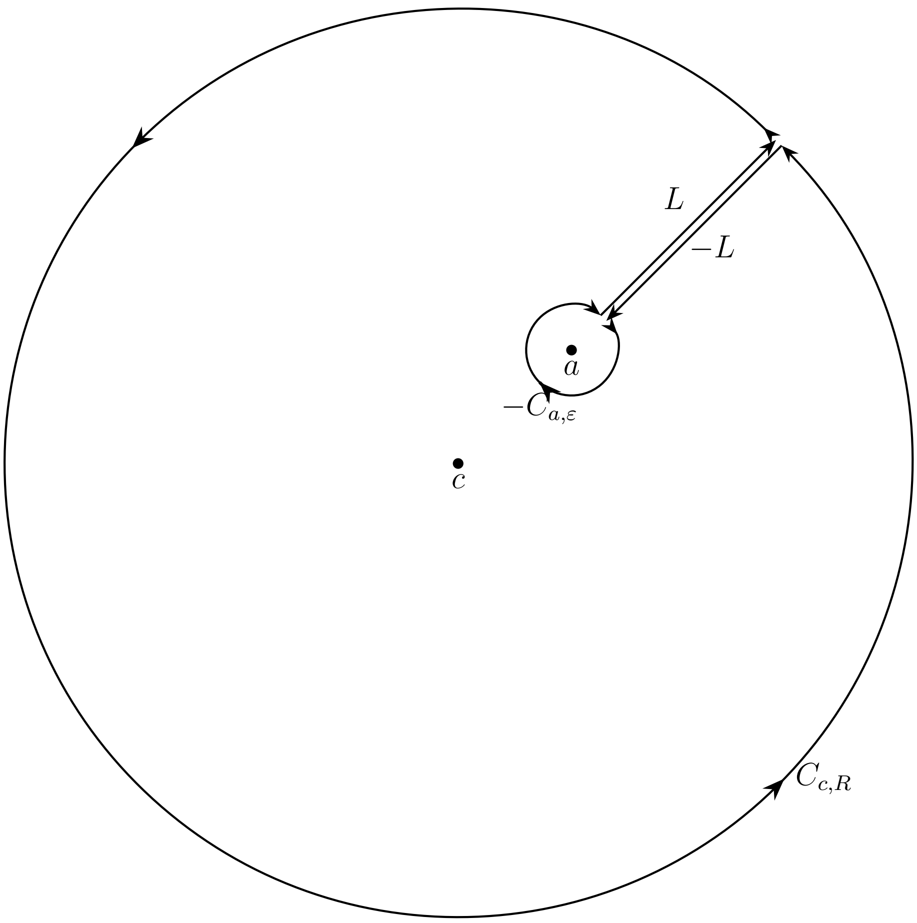


図 15: 証明 1: 1 本の橋 L_ε を渡して a の周りを回って戻る

7.4.3 うまいやり方

C_1, C_2 を図 17 のように定めると、どちらも区分的 C^1 級の単純閉曲線であり、

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0, \quad \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

が成り立つことは説明しやすい。

例えば次のような説明で納得してもらえるのではないだろうか。

- (直観に訴える説明) C_j 上にも、C_j の囲む領域の内部にも、$\dfrac{f(z)}{z-a}$ が微分可能でない点はない ($j=1,2$)。
- (すでに学んだ定理を使う説明 — 細部を詰めて証明に出来そう) $\dfrac{f(z)}{z-a}$ が正則な領域 $\Omega \setminus \{a\}$ において、適当に星型の部分領域を取り、その中で C_j を変形して定数曲線に出来る。

そうすると

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_1+C_2} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0+0=0.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

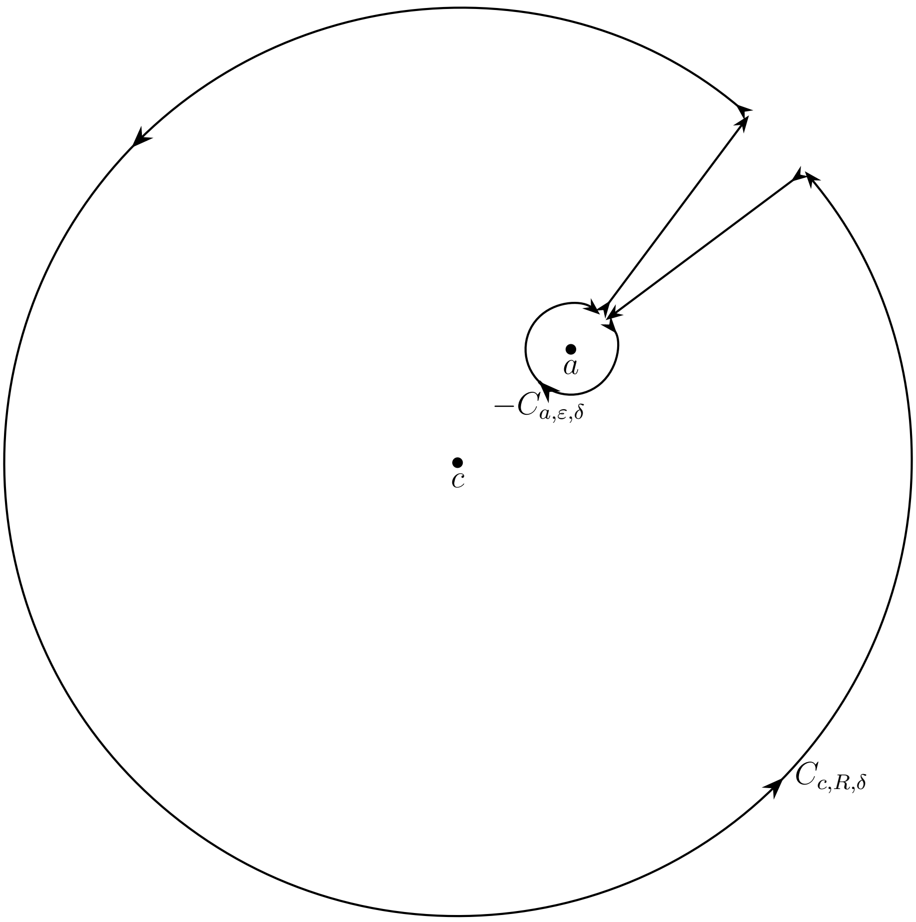


図 16: 証明 2: 角度 δ 開くことで単純閉曲線にしてから $\delta \to 0$ とする (閉じる)

7.4.4 Green の定理を使う

Green の定理 (次の節で説明する) を使う、以下のような証明も考えられる。

$0 < \varepsilon < R - |c - a|$ を満たす任意の ε に対して、

$$D := D(c; R) \setminus \overline{D(a; \varepsilon)}$$

とおく。D の境界 ∂D は、二つの円周 $|z - c| = R$, $|z - a| = \varepsilon$ からなる。∂D を正の向きにするには、$|z - a| = \varepsilon$ の方は通常と逆向き (時計回り) に取る。

Green の定理 (あまり難しいバージョンは必要はない。D を分割して、個々の領域が縦線領域であるように出来る。) によって

$$0 = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

一方

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z - a} dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

であるから

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

このやり方は見通しが良いが、Cauchy の積分公式を証明する前に f' の連続性が示せていないので、最初から f' が連続という仮定をする必要がありそうである。

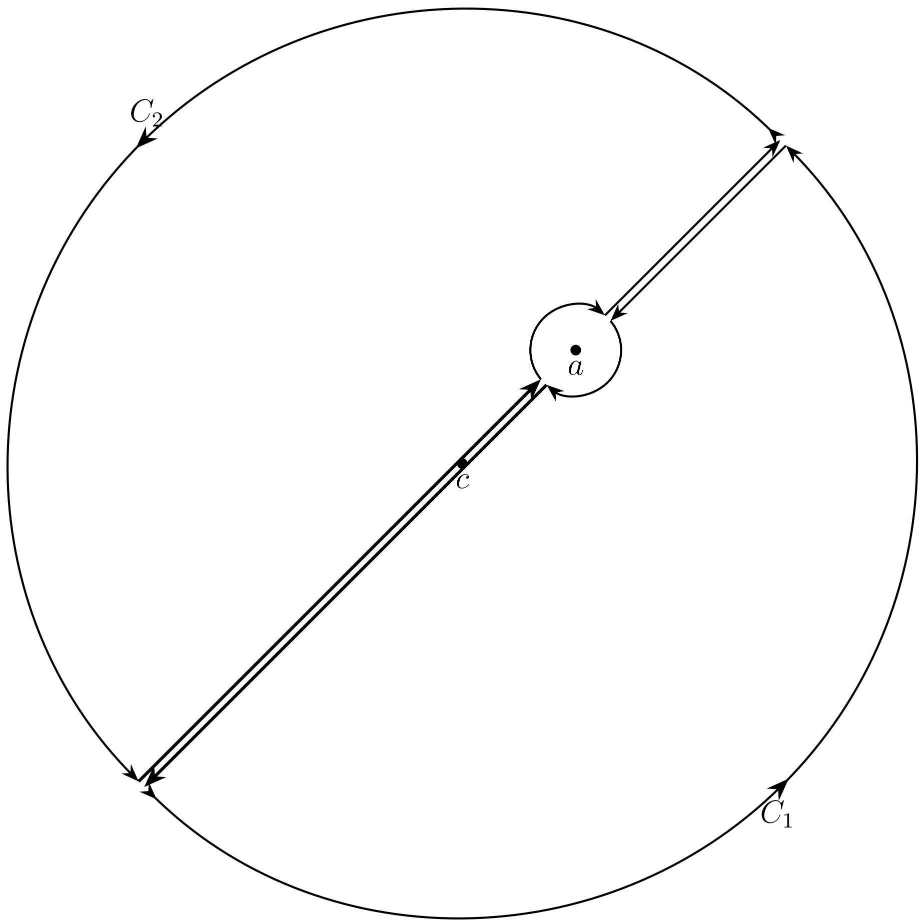


図 17: 証明 3: 2 本の橋を渡して、2 つの閉曲線を作る

関数論のテキストの中には、関数の正則性の仮定に、微分可能性だけでなく、導関数の連続性を要求して、この証明法を採用するものがある。

7.4.5　本文のやり方の長所の説明

積分路の変形は、完全に具体的な曲線についてやる場合は、それほど難しくはないが、ある程度の任意性がある場合に、すっきりかつきちんとした説明をするのは、意外に難しいものである。

この講義では、Cauchy の積分公式を円盤領域に限定することによって、積分路の変形を使わない議論で証明した (定理 7.1)。この論法は、有名な Ahlfors [27] (や、高橋 [22], 杉浦 [31]) を大筋で踏襲したものである。f' の連続性を仮定せず、また幾何学的直観に頼らないで、明快な証明が出来ている。また、そうして証明した円盤領域における積分公式だけを使って、多くの重要な結果が導けることも強調しておきたい。

途中で、星型や単連結などの用語が出て来て、消化するのに手間がかかった。それを面倒に感じて省略できないかと考えるかもしれないが、Cauchy の積分定理・積分公式では、幾何学的な条件を考えることは本質的であり、どこかで何らかの形でその種のことに直面するのを避けることは出来ない。要するに、上の作業は枝葉ではなく本質的なことである、と考えられる。

個人的には、星型領域におけるコーシーの積分定理は、定理の仮定の確認がしやすく確信を持ちやすいという意味でとても使いやすく (切れ味の鋭いナイフのようだ、と) 感じている。その証明が明快に出来たのは素晴らしいことだと思う。

それを用いて、正則関数の解析性が示せた後は、Green の定理を用いた Cauchy の積分定理・積分公式も気兼ねなく使うことが出来る。

独白: 関数論のテキストの多くは、このあたりを直観的な説明で乗り切るものが多い。しかし、いざ証明しようとすると、霧がかかったようになったりするのは困りものである。関数論の講義を担当するようになってから、直観的にもわかりやすく、疑問の余地なく証明することも出来るような説明をしたいと思って、色々なやり方を試して来た。ようやく、ある程度自信を持って講義が出来るようになった。結局は定評ある本に書かれていることであり、自分が工夫したというよりも、このやり方は1つの真っ当なやり方であると (やっと) 納得できた、というだけのことかもしれない。

8 参考: Green の定理, 積分路の変形 (2)

8.1 Green の定理

Green の定理 (Green の積分公式) は、2次元のベクトル解析で、もっとも基本的かつ重要な定理であると言える。前節では、それを用いた Cauchy の積分定理・積分公式の証明について言及した。教科書 ([1]) はその方針で説明されている。Green の定理を知ることは有益だと考えられるので、その概略を説明する。

Green の定理 (Green の積分公式) とは、とりあえず仮定を省略して、結果の等式だけを書くと、

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy \tag{56}$$

というものである。ふつうは多変数関数の微積分あるいはベクトル解析の講義で説明される。ここで D は $\mathbb{R}^2$ の領域で、∂D はその境界に (以下に説明するような) 「正の向き」をつけた曲線である。

余談 8.1 (周回積分) ∂D は D の縁を (ある意味で) 一周する。閉曲線や、閉曲線の和で表される曲線に沿っての線積分は、**周回積分** (a contour integral) と呼ばれ、そのことを強調するために $\oint$ と書くことがある。$\oint$ は LaTeX では `\oint` で組版できる。■

Green の公式は、仮定の部分をどうするかで色々なバージョンがある。仮定は弱い方が、定理としてはより一般的になり、強い定理と言えるけれど、それだけ証明は難しくなり、逆に仮定を強くすると証明は簡単になるけれど、定理としては一般性が低くなり弱い定理になる。どの辺を選択するか考えどころである。ここでは、2種類の Green の定理を紹介する。

定理 8.2 (かなり一般的な Green の公式) $\mathbb{R}^2$ の領域 D の境界は、有限個の区分的 C^1 級正則単純閉曲線 $C_1, \ldots, C_m$ の像の合併になっていて、各 C_j $(j = 1, \ldots, m)$ の進行方向の「左手」に D を見るようになっているとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で C^1 級の関数 P, Q に対して、

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

証明　ここには書けない。かなり手間がかかり、載っている本は少ない。例えば杉浦 [31], 笠原 [38] にある。■

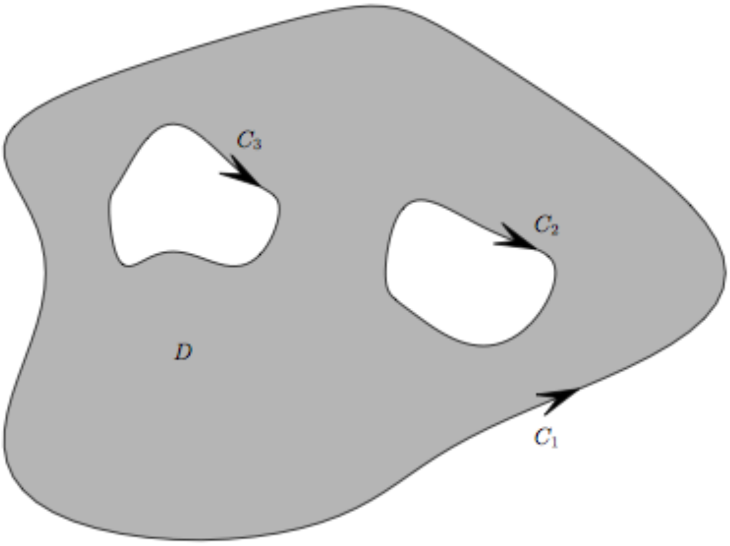


図 18: 領域 D の境界 ∂D は $C_1 + C_2 + C_3$ に等しい

定理 8.3 (縦線領域における Green の公式) $\mathbb{R}^2$ の領域 D は、(x 軸方向または y 軸方向に) 縦線領域であり、その境界 ∂D は、区分的 C^1 級曲線 C の像になっていて、C の進行方向の左手に D が見えるようになっているとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で C^1 級の関数 P, Q に対して、

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

証明 比較的簡単で、多くの微積分の教科書に載っている (「縦線領域」の定義などもそういうのを見て下さい)。例えば桂田 [39] (これは微積分の講義ノート) を見よ。■

定理 8.3 そのものは適用範囲がやや狭い。例えば後で頻出する円環領域 D は縦線領域でないので、定理の仮定を満たさない。しかし、そういう場合も、D を適当に “分割する” ことで、各小領域が定理 8.3 の仮定を満たすようにすることは難しくないことが多い (円環領域の場合は 2 つに分割すれば「片方向に縦線領域」となり、4 つに分割すれば「2 つの方向に縦線領域」となる)。そのような場合は、(56) が成り立つ[81]。

以下、$\overline{D}$ を含む開集合上で C^1 級の任意の関数 P, Q に対して (56) が成り立つような D を、Green の公式が成り立つ領域ということにする。

8.2 Green の公式に基づく Cauchy の積分定理, Cauchy の積分公式

定理 8.4 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分定理) D は $\mathbb{C}$ の領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域と同一視したとき、Green の公式が成り立つ領域であるとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で正則な関数 f に対して、

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

[81] $\displaystyle\int_{\partial D_j} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_j} (Q_x - P_y)dx\,dy$ を加えると (56) が得られる。

この定理は、線積分を考える曲線として、領域 D の境界になっているものしか対象にしていないので、以前に紹介した定理 6.12 と比べて強いわけではないが、弱いわけでもなく、この定理が便利に使える場合も多いので、レパートリーに加えておくと良い。

証明 f の実部、虚部をそれぞれ u, v とおくと、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)\,dz &= \int_{\partial D} (u+iv)\,(dx+i\,dy) = \int_{\partial D} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial D} (v\,dx + u\,dy)\\ &= \iint_D (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_D (u_x - v_y)\,dx\,dy\\ &= \iint_D 0\,dx\,dy + i\iint_D 0\,dx\,dy = 0.\end{aligned}$$

最初と二番目の等号について、もう少し説明しよう。∂D が、$\mathbb{C}$ 内の区分的 C^1 級の曲線 $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とするとき、

$$\xi(t) := \operatorname{Re}\varphi(t),\quad \eta(t) := \operatorname{Im}\varphi(t),\quad \boldsymbol{\varphi}(t) := \begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_\alpha^\beta u\left(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})\right) + iv\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right)\cdot\left(\xi'(t)+i\eta'(t)\right)dt\\ &= \int_\alpha^\beta \left(u\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right)\xi'(t) - v\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right)\eta'(t)\right)dt + i\int_\alpha^\beta \left(v\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right)\xi'(t) + u\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right)\eta'(t)\right)dt\\ &= \int_{\partial D}(u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial D}(v\,dx + u\,dy)\,.\blacksquare\end{aligned}$$

定理 8.5 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分公式) D は $\mathbb{C}$ の領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域と同一視したとき、Green の公式が成り立つ領域であるとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で正則な関数 f に対して、

$$(\forall a\in D)\quad f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

証明 任意の $a\in D$ に対して、十分小さな正の数 r を取ると、$\overline{D}(a;r)\subset D$ が成り立つ。$0<\varepsilon<r$ を満たす任意の ε について、$D_\varepsilon := D\setminus\overline{D}(a;\varepsilon)$ とおくと、D_ε も Green の公式が成り立つ領域となる (本当かな？？)。

$\partial D_\varepsilon = \partial D - C$, $C : |z-a| = \varepsilon$ であるから、定理 8.4 によって

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

ここで

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz-f(a)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta - f(a)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\,d\theta\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right)\,d\theta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|\int_0^{2\pi}d\theta \\ &= \max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|.\end{aligned}$$

$\varepsilon \to 0$ とすると右辺は 0 に収束する。
ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).\blacksquare$$

8.3 積分路の変形 (2)

積分路の変形 (曲線に沿う正則関数の線積分は、関数が正則な範囲で曲線を連続的に変形しても、線積分の値は変わらない) については、既に 6 節でも現れた (もっとも、詳しいことは付録 (E) に回してある)。
ここでは、いくつか例を追加する。

8.3.1 ある年度の講義の宿題から

例 8.6 円盤における Cauchy の積分公式 $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$ (仮定をここに書くのは省略) に当てはめることによって、以下の線積分の値を求めよ (部分分数分解などはしないでやること)。
(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z+2)^2}$ (2) $\displaystyle\int_{|z+3|=2}\frac{dz}{z(z+4)}$ (3) $\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{dz}{z(z+2)^2}$ (Γ は $\pm 1 \pm i$ を頂点とする正方形の周)

(1) $c=0$, $r=1$, $a=0$, $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)^2}$ とすると、円盤領域に置ける Cauchy の積分公式の条件 ($a\in D(c;r)$, かつ f は $\overline{D}(c;r)$ を含むある開集合 ($D(0;1.5)$ とか $\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$) で正則である) が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) = 2\pi i\cdot\frac{1}{(0+2)^2} = 2\pi i\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}.$$

(2) $c=-3$, $r=2$, $a=-4$, $f(z)=\dfrac{1}{z}$ とすると、円盤領域に置ける Cauchy の積分公式の条件 ($a\in D(c;r)$, かつ f は $\overline{D}(c;r)$ を含むある開集合 ($D(-3;3)$ とか $\mathbb{C}\setminus\{0,-3\}$) で正則) が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z+3|=2}\frac{dz}{z(z+4)} = \int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\cdot f(a) = 2\pi i\cdot\frac{1}{-4} = -\frac{\pi i}{2}.$$

(3) 被積分関数 $\dfrac{1}{z(z+2)^2}$ は、領域 $\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$ で正則である。その範囲で積分路 Γ は円周 $|z|=1$ に変形できる。ゆえに (1) の結果を用いて

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2} = \frac{\pi i}{2}.$$

この積分路の変形ができることをどのように証明する、実は色々なやり方がある。代表的なものを 3 つ示す。

1. 授業できちんと証明したのは、星型領域内では、始点と終点が変わらないならば曲線を置き替えて良い、という定理だけですね。これを使って、正方形の周を円周に替えるためには、次の 4 つの段階を踏めば良い。

   例えば第 1 象限の部分は、$1+i$ を中心として、半径が 1.1 (1 より大きく、$1+i$ と 0 との距離 $\sqrt{2}$ よりは小さい) の円盤領域 (これは星型) Ω_1 を考えます。Ω_1 で被積分関数は正則です (0, -2 は含まないから)。そして、正方形の周 Γ の右上部分 Γ_1 と、円周 C の右上部分 C_1 が Ω_1 に含まれます。ですから、Γ_1 を C_1 に置き換えられます。

   第 2 象限でも同様に $-1+i$ 中心の円を考えます。$-1+i$ と 0, -2 との距離は $\sqrt{2}$ なので、第 1 象限のときと同じ半径 1.1 で大丈夫。正方形の周 Γ の左上部分 Γ_2 は、円周 C の左上部分 C_2 に置き換えられます。

   第 3 象限 (Γ_3 を C_3), 第 4 象限 (Γ_4 を C_4) でも同様。

2. 各 j に対して、Γ_j と C_j は縦線領域 (D_j とする) を囲むので、縦線領域版の Green の定理を用いて、

   $$\int_{\Gamma_j} f(z)dz - \int_{C_j} f(z)dz = \int_{\partial D_j} f(z)dz = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\Gamma_j} f(z)dz = \int_{C_j} f(z)dz$$

   とする手があります。Green の定理ちゃんと分かっているという人には、これはアリかもしれない。

3. 普通の数学の本では「連続的変形」というのをすることが多い。$\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$ の中で、正方形を連続的に円周に変形する写像 (ホモトピー写像と呼ぶ) を作る。その写像は割と簡単に作れますが (原点に向かって縮める感じ— 図 3)。ホモトピー写像があれば、積分路を置き換えられる、という定理は授業ではお話に出しただけで、証明はしていません (講義ノートの付録にはある (E.4 の今だと p. 288, 定理 E.4))。これはちょっと背伸びが必要かな。

8.3.2 熱方程式の Green 関数 (熱核) の導出に現れる積分路の変形

例 8.7 (Fourier 解析で有名な例) 熱方程式 $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ の基本解 $U(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ を Fourier 変換を用いて求める計算に使われる、非常に有名な例である。

$h\in\mathbb{R}$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ih)^2} dx = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

(実軸 $\mathbb{R}$ に沿う積分が、h だけ浮かせた直線 $\{x+ih \mid x\in\mathbb{R}\}$ に沿う積分と等しい。Fourier 解析で、ガウシアンの Fourier 変換を計算するときに良く利用される式である。)

証明 $f(z) = e^{-z^2}$ ($z\in\mathbb{C}$) とおくと、f は $\mathbb{C}$ で正則である。

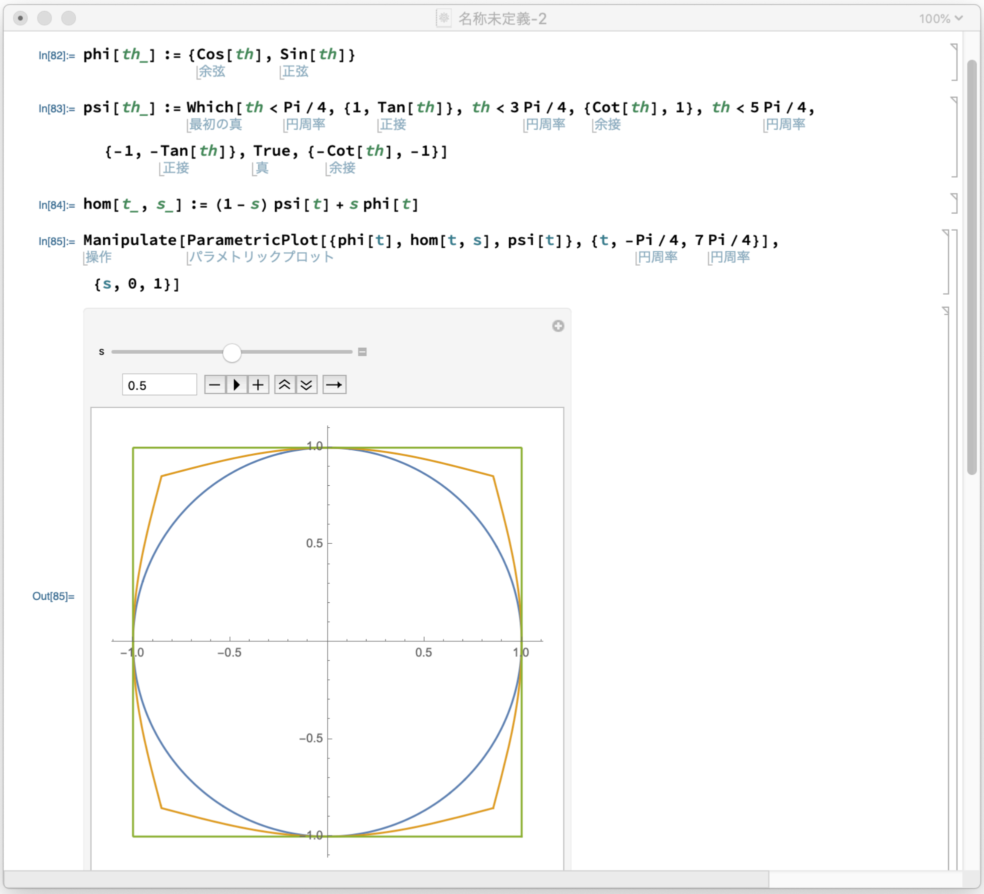


図 19: 正方形の周 Γ を円周 C に連続的に変形する

任意の $R>0$ に対して、

$$\Gamma_{1,R} := [-R,R],\quad \Gamma_{2,R} := [R,R+ih],\quad \Gamma_{3,R} := [-R+ih,R+ih],\quad \Gamma_{4,R} := [-R,-R+ih],$$

$$\Gamma_R := \Gamma_{1,R}+\Gamma_{2,R}-\Gamma_{3,R}-\Gamma_{4,R}$$

とおく。Γ_R は星型領域 $\mathbb{C}$ における閉曲線であり、f は $\mathbb{C}$ で正則であるから、Cauchy の積分定理によって、

$$(57)\qquad 0=\int_{\Gamma_R} f(z)dz=\int_{\Gamma_{1,R}} f(z)dz+\int_{\Gamma_{2,R}} f(z)dz-\int_{\Gamma_{3,R}} f(z)dz-\int_{\Gamma_{4,R}} f(z)dz.$$

$\Gamma_{1,R}$ は $z=x$ $(x\in[-R,R])$ とパラメーター付けできるので、$dz=dx$ より

$$\int_{\Gamma_{1,R}} f(z)dz=\int_{-R}^{R} f(x)\,dx=\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx.$$

この積分については、$R\to\infty$ のとき、$\sqrt{\pi}$ に収束することが知られている:

$$(58)\qquad \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

同様に $\Gamma_{3,R}$ は $z=x+ih$ $(x\in[-R,R])$ とパラメーター付けできるので、$dz=dx$ より

$$\int_{\Gamma_{3,R}} f(z)dz=\int_{-R}^{R} f(x+ih)\,dx=\int_{-R}^{R} e^{-(x+ih)^2}\,dx.$$

$\Gamma_{2,R}$ は $z = R + ith$ $(t \in [0,1])$ とパラメーター付けできるので[82]、

$$|f(z)| = \left|e^{z^2}\right| = e^{\mathrm{Re}\left(-z^2\right)} = e^{\mathrm{Re}\left(-(R+ith)^2\right)} = e^{-R^2+t^2h^2} \le e^{-R^2+h^2}.$$

ゆえに

$$\left|\int_{\Gamma_{2,R}} f(z)dz\right| \le \max_{z\in\Gamma_{2,R}^*} |f(z)| \int_{\Gamma_{2,R}} |dz| \le e^{-R^2+h^2} |h|.$$

ゆえに

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{2,R}} f(z)dz = 0. \tag{59}$$

同様に $\Gamma_{4,R}$ は $z = -R + ith$ $(t \in [0,1])$ とパラメーター付けできるので、

$$|f(z)| = \left|e^{z^2}\right| = e^{\mathrm{Re}\left(-z^2\right)} = e^{\mathrm{Re}\left(-(-R+ith)^2\right)} = e^{-R^2+t^2h^2} \le e^{-R^2+h^2},$$

$$\left|\int_{\Gamma_{4,R}} f(z)dz\right| \le \max_{z\in\Gamma_{4,R}^*} |f(z)| \int_{\Gamma_{4,R}} |dz| \le e^{-R^2+h^2} |h|.$$

ゆえに

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{4,R}} f(z)dz = 0. \tag{60}$$

(57) から

$$\int_{\Gamma_{3,R}} f(z)dz = \int_{\Gamma_{1,R}} f(z)dz + \int_{\Gamma_{2,R}} f(z)dz - \int_{\Gamma_{4,R}} f(z)dz$$

であるから、

$$\begin{aligned}\left|\int_{-R}^{R} e^{-(x+ih)^2}dx - \sqrt{\pi}\right| &= \left|\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx - \sqrt{\pi} + \int_{\Gamma_{2,R}} f(z)dz - \int_{\Gamma_{4,R}} f(z)dz\right| \\ &\le \left|\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx - \sqrt{\pi}\right| + \left|\int_{\Gamma_{2,R}} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Gamma_{4,R}} f(z)dz\right|.\end{aligned}$$

(58), (59), (60) から、$R \to \infty$ のとき、右辺は 0 に収束することが分かる。以上から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ih)^2}dx = \sqrt{\pi}. \blacksquare$$

8.3.3 教科書 ([1]) 例題 3.24

次の例は教科書に載っているものである (例題 3.24 に、$2\pi i$ をかけたもの)。楕円に沿う線積分は、定義に従って計算しようとすると難しいが、この例では、被積分関数が正則な範囲で積分路を変形することで、2 つの円周に沿う線積分の和に帰着している。これは、後で説明する留数定理を用いて計算するのにピッタリの問題であるが、以下の計算はその内容を先取りしたものになっている。

---

[82] $h > 0$ であれば $z = R + iy$ $(y \in [0,h])$ とすれば良いけれど、$h < 0$ のときは不適当なので、$z = R + ith$ とした。

例 8.8 (後でもっと簡単に解くけれど) C を楕円 $z=2\cos\theta+i\sin\theta$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とするとき

$$I=\int_C \frac{2z}{z^2-1}dz$$

を求めよ。

被積分関数を $f(z)$ とおき、部分分数分解しておく:

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-1}=\frac{2z}{(z+1)(z-1)}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}.$$

正数 ε に対して、$z=1+\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ を $C_{1,\varepsilon}$, $z=-1+\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ を $C_{-1,\varepsilon}$ とおくと、ε が十分小さければ、C, $C_{1,\varepsilon}$, $C_{-1,\varepsilon}$ は互いに交わらない。

このとき

$$D:=\left\{z=x+iy\;\middle|\;\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}<1\wedge|z+1|>\varepsilon\wedge|z-1|>\varepsilon\right\}$$

とおくと、D は領域で

$$\partial D=C-C_{1,\varepsilon}-C_{-1,\varepsilon}.$$

$\overline{D}$ は 1, -1 を含まないので、f は $\overline{D}$ を含むある開集合で正則である。ゆえに Cauchy の積分定理 (定理 8.4) から、

$$0=\int_{\partial D}f(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz-\int_{1,\varepsilon}f(z)\,dz-\int_{-1,\varepsilon}f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$\int_{C_{1,\varepsilon}}f(z)dz=\int_{C_{1,\varepsilon}}\frac{dz}{z+1}+\int_{C_{1,\varepsilon}}\frac{dz}{z-1}=0+2\pi i=2\pi i.$$

(第 1 項は、$C_{1,\varepsilon}$ が $\{z\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Re}z>0\}$ に含まれ、$\dfrac{1}{z+1}$ はそこで正則であることから、Cauchy の積分定理より 0 である。第 2 項は例の積分である。)

同様にして

$$\int_{C_{-1,\varepsilon}}f(z)dz=\int_{C_{-1,\varepsilon}}\frac{dz}{z+1}+\int_{C_{-1,\varepsilon}}\frac{dz}{z-1}=2\pi i+0=2\pi i.$$

ゆえに

$$I=\int_C f(z)\,dz=\int_{C_{1,\varepsilon}}f(z)dz+\int_{C_{-1,\varepsilon}}f(z)dz=4\pi i.\blacksquare$$

今後の方針説明 (二つ目のイントロ)

これまでは、正則関数が冪級数展開可能であることを示すことが大きな目標である、と言ってきて、それが果たされたし、Cauchy の積分定理も、まあまあ一般的な形で紹介できたし、ほっと一段落、というところ。それで今後の話の流れをおおまかに説明する。

(i) (冪級数展開を利用した) 正則関数の性質の詳しい分析

(ii) **孤立特異点**に注目し Cauchy の積分公式を利用して、孤立特異点の周りの **Laurent**(ローラン) **展開** (the Laurent expansion) を導く。孤立特異点の**留数**(りゅうすう) (residue) を定義して、定積分の計算への応用を説明する。

9 正則関数の性質

9.1 正則関数の零点とその位数

多項式に対して、根とその重複度というものが定義されているが、正則関数に対してもそれに相当する (一般化になっている) **零点**(れいてん)とその**位数**というものがある。

定義 9.1 (正則関数の零点, 零点の位数) $c \in \mathbb{C}$, f は c の近傍で正則な関数とする。

(1) c が f の**零点** (**zero**) であるとは、$f(c) = 0$ を満たすことをいう。

(2) c が f の零点で、$k \in \mathbb{N}$ が

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \quad \text{かつ} \quad f^{(k)}(c) \neq 0$$

を満たすとき、k を f の零点 c の**位数** (order) と呼ぶ。また、c は f の k **位の零点**であるという。

例 9.2 (a) $f(z) = \sin z$ で、$m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ は 1 位の零点である。実際、

$$f(m\pi) = \sin m\pi = 0, \quad f'(m\pi) = \cos m\pi = (-1)^m \neq 0$$

であるから、$m\pi$ は f の 1 位の零点である。あるいは Taylor 展開

$$\sin z = (-1)^m \sin(z - m\pi) = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z - m\pi)^{2n+1}$$

を利用して、

$$\sin z = (z - m\pi)g(z), \quad g(z) := (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z - m\pi)^{2n}$$

と変形して、$g(m\pi) = (-1)^m \neq 0$ を確めても良い。

(b) $f(z) = \cos z - 1$ で、$2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ は 2 位の零点である。実際、

$$\begin{aligned}
&f(2m\pi) = \cos 2m\pi - 1 = 1 - 1 = 0,\\
&f'(z) = -\sin z, \quad f'(2m\pi) = -\sin 2m\pi = 0,\\
&f''(z) = -\cos z, \quad f''(2m\pi) = -\cos 2m\pi = -1 \neq 0
\end{aligned}$$

であるから、$2m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ は 2 位の零点である。あるいは、Taylor 展開

$$\cos z=\cos(z-2m\pi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-2m\pi)^{2n}$$

を利用して、

$$\cos z-1=(z-m\pi)^2g(z),\quad g(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-2m\pi)^{2(n-1)}$$

と表し、$g(2m\pi)=-\dfrac{1}{2}\neq 0$ を確めても良い。■

命題 9.3 (k 位の零点の条件) $c\in\mathbb{C}$, f は c の開近傍 U で正則、$k\in\mathbb{N}$ とするとき、次の 2 条件は互いに同値である。

(i) U で正則な関数 g が存在して、$f(z)=(z-c)^kg(z)$ $(z\in U)$ かつ $g(c)\neq 0$.

(ii) $f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0$ かつ $f^{(k)}(c)\neq 0$.

証明 k に関する帰納法で (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示す、というのも可能である。以下では一気に証明する。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明。f は c の近傍で正則なので、c の回りで Taylor 展開できる。すなわち $\exists R>0$, $\exists\{a_n\}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

一般に $a_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ であるから、仮定より、$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, $a_k\neq 0$. ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^{n-k}=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n.$$

ここで

$$g(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n$$

とおくと、これは $|z-c|<R$ で正則な関数で、

$$f(z)=(z-c)^kg(z),\quad g(c)=a_k\neq 0.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明。$f(z)=(z-c)^kg(z)$, $g(c)\neq 0$ とする。$h(z):=(z-c)^k$ とおくと、$f(z)=g(z)h(z)$. $0\le m\le k$ に対して、Leibniz の法則により

$$f^{(m)}(z)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}h^{(r)}(z)g^{(m-r)}(z).$$

明らかに $r\le k-1$ であれば、$h^{(r)}(c)=0$ であることに注意すると、$0\le m\le k-1$ ならば $h^{(r)}(c)=0$ $(0\le r\le m)$ であること、それと $h^{(k)}(z)\equiv k!$ から、

$$f^{(m)}(c)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\cdot 0\cdot g^{(m-r)}(c)=0\quad(0\le m\le k-1),$$

$$f^{(k)}(c)=\binom{k}{k}k!g(c)=k!g(c)\neq 0.\blacksquare$$

(この Prop. の証明は文章が少し粗雑かも。)

多項式の場合に、同様の命題が因数定理と帰納法で導かれる。

命題 9.4 (k 重根の条件) $f(z) \in \mathbb{C}[z]$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の 3 条件は同値である。

(i) c は $f(z)$ の根で、重複度は k である。
(すなわち、$f(z)$ を 1 次因数の積に因数分解したとき、$(z-c)$ はちょうど k 個現れる — $k=1$ の場合、重根ではないわけだが、重複度 1 の根ということにしておく)

(ii) $\exists g(z) \in \mathbb{C}[z]$ s.t. $f(z) = (z-c)^k g(z)$ かつ $g(c) \neq 0$.

(iii) $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.

証明 (実質的に高校数学であるので、省略させてもらう。) ■

(最近の高校数学では、重解という言葉を使っているが、もともとは重根という言葉を使うのが普通であった。因数分解を使わずに「重なっていること」を表すのは面倒で、重根と呼ぶ方が筋が通っていると私は思う。)

0 でない多項式は、関数として $\mathbb{C}$ 全体で正則であり、根と零点は一致する (c が $f(z)$ の根 $\Leftrightarrow$ c が f の零点)。また根 c の重複度 (単根の時は 1 とする) は、零点 c の位数と一致する。

c の近傍で正則な関数 f が $f(c) = 0$ を満たすとき、次の 2 つのいずれか一方が成り立つことが容易に分かる。

(i) $(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ $f^{(n)}(c) = 0$. (このとき f が c のまわりの冪級数展開の収束円で 0 になることは明らかだが、実はいたるところ 0 に等しいことが後述の一致の定理で分かる。)

(ii) $(\exists k \in \mathbb{N})$ $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$, $f^{(k)}(c) \neq 0$.

9.2 一致の定理

0 でない多項式は有限個の根 (零点) しか持たないが、0 でない正則関数は無限個の零点を持ち得る ($\sin z$ が分かり易い例である)。しかし、次の非常に重要な定理 (「零点が集積すれば実は恒等的に零」という内容) が成り立つ。

定理 9.5 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理) D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D \to \mathbb{C}$ と $g\colon D \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in D$ かつ $z_n \neq c$ かつ $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f = g$.

(例えば D 内の線分や正則曲線の上で $f = g$ が成り立っていれば、二条件 (i), (ii) を満たす複素数列の存在は明らかであるので、$f = g$ が成り立つ。)

証明 $f - g$ を新たに f と置いて考えることで、$g = 0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

D は開集合であるから、$(\exists \varepsilon > 0)$ $D(c;\varepsilon) \subset D$. 定理 7.4 より、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;\varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c;\varepsilon)$ で $f=0$ であることを示す。

実は任意の n に対して $a_n=0$ である。実際、もしそうでないと仮定すると、$\exists n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ s.t. $a_n\neq 0$. そのような n のうち、最小のものを k とおくと、

$$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0,\quad a_k\neq 0.$$

すると

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n\,(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n\quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

$g(z):=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n$ は $z\in D(c;\varepsilon)$ で収束し、

$$g(z_n)=\frac{f(z_n)}{(z_n-c)^k}=\frac{0}{(z_n-c)^k}=0.$$

ゆえに

$$a_k=g(c)=\lim_{n\to\infty}g(z_n)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n=0$. ゆえに

$$f(z)=0\quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

(後半)

$$D_0:=\left\{z\in D\;\middle|\;(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})f^{(n)}(z)=0\right\},\quad D_1:=\left\{z\in D\;\middle|\;(\exists n\in\mathbb{N}\cup\{0\})f^{(n)}(z)\neq 0\right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0\cup D_1=D,\quad D_0\cap D_1=\emptyset.$$

$f^{(n)}$ が連続関数であることから、D_1 は開集合であることが分かる[83]。

一方，D_0 も開集合である。実際、$z_0\in D_0$ とするとき、$(\exists R>0)$ $(\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}\cup\{0\}})$ $(\forall z\in D(z_0;R))$ $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. ところが $z_0\in D_0$ より、任意の n に対して $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=0$ であるから、$f(z)=0$ $(z\in D(z_0;R))$. これから容易に $D(z_0;R)\subset D_0$ が分かる。ゆえに D_0 は開集合である。

また $c\in D_0$ であるから、$D_0\neq\emptyset$.

以下で示す命題 9.6 より、$D_1=\emptyset$, $D_0=D$. ゆえに $f=0$ in D. ■

定理の途中で使った命題を片付けておく。

命題 9.6 (弧連結な開集合は連結) D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0\cup D_1=D$, $D_0\cap D_1=\emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

独白: この授業では、一般の連結性 (二つの共通部分のない開集合に分割したとき、一方が必ず空集合になること) を使わずに済ませるつもりだったが、結局は使うことになってしまった。

[83] 実際、$z_0\in D_1$ とするとき、まず D が開集合であることから、$(\exists\delta_1>0)$ $D(z_0;\delta_1)\subset D$. また $(\exists n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ $f^{(n)}(z_0)\neq 0$. $\varepsilon:=\left|f^{(n)}(z_0)\right|$ とおくと、$\varepsilon>0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、$(\exists\delta_2>0)$ $(\forall z\in D: |z-z_0|<\delta_2)$ $\left|f^{(n)}(z)-f^{(n)}(z_0)\right|<\varepsilon$. このとき、$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|f^{(n)}(z_0)-f^{(n)}(z_0)+f^{(n)}(z)\right|\geq\left|f^{(n)}(z_0)\right|-\left|f^{(n)}(z_0)-f^{(n)}(z)\right|>\varepsilon-\varepsilon=0$. ゆえに $f^{(n)}(z)\neq 0$. 従って $z\in D_1$. $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおくと、$\delta>0$ かつ $D(z;\delta)\subset D_1$. ゆえに D_1 は開集合である。

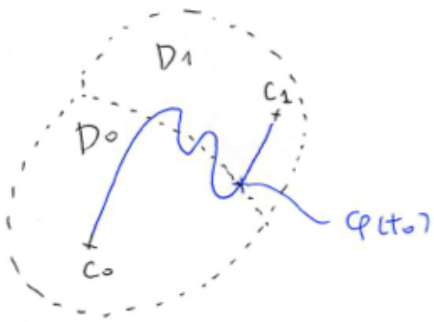


図 20: c_0 から c_1 に至る道、最後に D_0 を出るところ $\varphi(t_0)$

$\varphi(t_0)$ は D_0, D_1 のどちらに属しても矛盾が生じる。

使わなくても定理 9.5 は証明出来るけれど (そういう証明も書いてみたけれど)、それにある程度手間をかけるよりは、通常路線に戻る方が教育的だと判断した。

証明　背理法を用いる。$D_0 \neq \emptyset$ かつ $D_1 \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。$c_0 \in D_0$, $c_1 \in D_1$ を取る。$\exists\varphi\colon [0,1] \to \Omega$, $\varphi(0) = c_0$, $\varphi(1) = c_1$ となる連続関数 φ が取れる。

$$I_0 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0,1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

D_0, D_1 が開集合で、φ が連続であるから、$\exists\delta_0 > 0$, $\exists\delta_1 > 0$ s.t. $[0, \delta_0] \subset I_0$, $[1-\delta_1, 1] \subset I_1$.

$$t_0 := \sup I_0$$

とおくと、$0 < t_0 < 1$. t_0 と $0, 1$ との距離は $d := \min\{t_0, 1-t_0\} > 0$ である。

$t_0 \in I_0$ の場合、$\exists\varepsilon_1 \in (0,d)$ s.t. $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \subset I_0$. すると $t_0 = \sup I_0 \geq t_0 + \varepsilon_1$ となり、矛盾が生じる。

$t_0 \in I_1$ の場合、$\exists\varepsilon_2 \in (0,d)$ s.t. $(t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2) \subset I_1$. I_1 と共通部分のない I_0 の上限が I_1 の内部にあるのは矛盾である。■

系 9.7 (領域における) 正則関数は定数関数に等しくない限り、その零点は互いに孤立している。すなわち c が定数でない正則関数の零点 ($f(c) = 0$ を満たす) ならば、

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall z \in D \cap D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) \neq 0.$$

証明　背理法を用いる。結論を否定すると、

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists z \in D \cap D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) = 0.$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$0 < |z_n - c| < \dfrac{1}{n}$, $f(z_n) = 0$ を満たす $z_n \in D$ が取れる。一致の定理から $f = 0$ in D が導かれる。これは矛盾である。■

一致の定理の特別な場合として、次の命題が成立する。

系 9.8 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則で、

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = 0$$

を満たすならば、

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = 0$$

が成り立つ。

例 9.9 (実関数を正則に拡張する仕方は 1 つしかない) この講義では、初等関数について、微積分で得られた Taylor 展開の式を用いて、正則関数に拡張した。例えば

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

から

$$(☆) \qquad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

系 9.8 から、正則な $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で、$f(x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ を満たすものは、存在するならば一意である。言い換えると、$\cos x$ の拡張に、正則性を要求する限り、(☆) とする以外の選択肢はない。■

例 9.10 (関数関係不変の原理 (英語では言わない？)) 例えば実指数関数の指数法則

$$(61) \qquad e^{x+y} = e^x e^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

が成り立つことは既知として、

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを示そう。

実指数関数と複素指数関数を混同すると議論が分かりにくくなるので、しばらく複素指数関数 e^z は $E(z)$, 実指数関数は e^x と書き分けることにする。複素指数関数は実指数関数の拡張である。つまり

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) = e^x$$

が成り立つことを認めて議論する[84]。

任意の $y \in \mathbb{R}$ を固定して、関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) := E(z+y) - E(z)E(y) \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定める。関数 E は正則であるから、f は $\mathbb{C}$ で正則である。また、$z = x \in \mathbb{R}$ のとき、(61) より

$$f(z) = f(x) = E(x+y) - E(x)E(y) = e^{x+y} - e^x e^y = e^x e^y - e^x e^y = 0.$$

ゆえに一致の定理により

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = 0.$$

すなわち

$$(62) \qquad (\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

次に任意の $z \in \mathbb{C}$ を固定して、関数 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$g(w) := E(z+w) - E(z)E(w) \quad (w \in \mathbb{C})$$

で定める。この g は $\mathbb{C}$ で正則である。また、$w = y \in \mathbb{R}$ のとき、(62) より

$$g(w) = g(y) = E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

[84] この講義では、任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$E(x+yi) := e^x(\cos y + i \sin y)$ と定めた。その場合は、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $E(x) = e^x$ が成り立つことは明らかである。

ゆえに一致の定理により

$$(\forall w \in \mathbb{C}) \quad g(w) = 0.$$

すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C}) \quad E(z+w) - E(z)E(w) = 0.$$

ゆえに指数法則 $E(z+w) = E(z)E(w)$ が成り立つ。 ■

問 74. 三角関数の加法定理を証明せよ。

問 75. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$ とするとき

$$z_1 \in \Omega \wedge z_2 \in \Omega \wedge z_1 z_2 \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$$

が成り立つことを示せ。

9.3 平均値の定理と最大値原理

命題 9.11 (平均値の性質 (the mean-value property)) Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$ とするとき、$\overline{D}(c;r) \subset \Omega$ を満たす任意の $r > 0$ に対して、

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(c + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

(右辺は、円 $|z-c| = r$ での f の平均値であることに注意)

証明 Cauchy の積分公式を $z = c$ で適用して、

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta.$$

$\zeta = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とパラメーターづけすると、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c-| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(c + re^{i\theta}\right) d\theta. \blacksquare$$

余談 9.12 (実関数では) 実関数 $u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ については、

$$u \text{ が平均値の性質を持つ} \Leftrightarrow \triangle u = 0 \quad (u \text{ は調和関数})$$

が成り立つ (Gauss の**球面平均の定理**[85]とその逆)。

正則関数 f の実部・虚部 u, v $(u(x,y) := \mathrm{Re}\, f(x+iy),\ v(x,y) := \mathrm{Im}\, f(x+iy))$ については、$\triangle u = \triangle v = 0$ が成り立つので、実調和関数の平均値の性質から、正則関数の平均値の性質を導くことも可能である。

次の最大値原理に相当する命題も調和関数版があり、非常に重要である。 ■

[85] 偏微分方程式のテキスト、あるいは桂田 [40] の 3 章 5 節などを参照せよ。

命題 9.13 (最大値原理 (the maximum principle, maximum-modulus theorem)) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$z_0 \in \Omega$,

$$(\forall z \in \Omega) \quad |f(z)| \le |f(z_0)| \qquad (|f(z_0)| \text{ は } |f| \text{ の最大値である、ということ})$$

が成り立つならば、

$$(\exists C \in \mathbb{C})(\forall z \in \Omega) \quad f(z) = C.$$

(正則関数の絶対値が、ある内点で最大値を取れば、その関数は実は定数関数である。)

証明 $M := |f(z_0)|$ とおく。

Ω は開集合であるから、$(\exists \varepsilon > 0)$ $D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$. $\rho := \varepsilon/2$ とおくと、$\overline{D}(z_0; \rho) \subset \Omega$.

$0 < r \le \rho$ なる任意の r に対して、平均値の性質から、

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

ゆえに

$$M = |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, d\theta = M.$$

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である[86]。特に

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, d\theta.$$

$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| \le M$ で、$\theta \mapsto \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|$ は連続であるから、

$$\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]) \qquad \text{i.e.} \qquad |f(z)| = M \quad (|z - z_0| = r).$$

r の任意性から、

$$|f(z)| = M \quad (|z - z_0| \le \rho).$$

命題 2.23 から、f は $D(z_0; \rho)$ で定数関数に等しい: $(\exists C \in \mathbb{C})$ $f = C$ on $D(z_0; \rho)$.

一致の定理より、Ω 全体で $f = C$. ■

注意 9.14 (最小値について) 定数でない正則関数 f に対して、$|f|$ は内点で最大値を取らない、ということだが、$|f|$ が内点で最小値 0 をもつことはありうる (零点を持つ正則関数はたくさんある)。ただし「定数でない正則関数 f に対して、$|f|$ は内点で 0 でない最小値を持たない」は真である ($1/f$ を考えることで容易に証明できる)。 ■

余談 9.15 (調和関数の最大値定理) 調和関数については、やはり平均値の定理が成立し (2 変数の場合は正則関数の平均値の定理の等式の実部を取ればすぐ導出できる)、それから「定数でない調和関数 u は、内点で最大値、最小値を取らない。」が得られる。 ■

---

[86] $f \le g$ on $[a, b]$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$. もしも、さらに f と g が連続で、$\exists x_0 \in [a, b]$ $f(x_0) < g(x_0)$ (どこか一点で真不等号) が成り立つならば、$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx < \int_a^b g(x)\, dx$. 対偶を取ると、$f$ と g が連続で $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$ ならば $f \equiv g$.

9.4 Liouville の定理

定義 9.16 (整関数) $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (an **entire function**) という。

例 9.17 (整関数の例) 多項式関数、指数関数 e^z, 三角関数 $\cos z$, $\sin z$ は整関数である。$\tan z$, $\operatorname{Log} z$, $\dfrac{1}{1+z^2}$ は整関数ではない。■

定理 9.18 (Liouville の定理 (リウヴィユの定理, Liouville's theorem)) 有界な整関数は定数関数に限る。

証明 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は正則で、$(\exists M\in\mathbb{R})$ $(\forall z\in\mathbb{C})$ $|f(z)|\le M$ が成り立つと仮定する。

任意の正数 R に対して、ある $\{a_{n,R}\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,R}z^n \quad (z\in D(0;R)).$$

冪級数展開の係数の一意性から、$\{a_{n,R}\}_{n=0}^{\infty}$ は R に依存しないことが分かる。ゆえに $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \quad (z\in\mathbb{C}).$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n=0$ を示そう。$\forall R>0$ に対して、Cauchy の積分公式から

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

であるから、

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}}|d\zeta|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{M}{R^{n+1}}|d\zeta|.$$

$\displaystyle\int_{|\zeta|=R}|d\zeta|=2\pi R$ であるから、**Cauchy の評価式**と呼ばれる次の不等式を得る。

$$|a_n|\le\frac{M}{R^n}. \tag{63}$$

ゆえに $R\to\infty$ として $a_n=0$ $(n\in\mathbb{N})$. ゆえに $(\forall z\in\mathbb{C})$ $f(z)=a_0$. ■

代数学の基本定理の証明を与えよう。準備として、多項式の $z\to\infty$ での挙動を調べておく。簡単にまとめると、$|z|$ が大きいところでは、最高次の項が支配的である。

補題 9.19 (多項式の遠方での挙動) $n\in\mathbb{N}$, $\{a_j\}_{j=0}^{n}\in\mathbb{C}^{n+1}$, $a_0\ne 0$, $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ とするとき、

$$(\forall\varepsilon: 0<\varepsilon<1)(\exists R\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C}: |z|\ge R)\quad (1-\varepsilon)|a_0|\,|z|^n\le|f(z)|\le(1+\varepsilon)|a_0|\,|z|^n.$$

特に $(\forall z\in\mathbb{C}\colon |z|\ge R)$ $f(z)\ne 0$ が成り立つ。また、もしも $n\ge 1$ ならば $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=\infty$.

証明 $z \neq 0$ とするとき、

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \frac{a_2}{a_0 z^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n}.$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して $\dfrac{1}{z^m} \to 0$ $(|z| \to \infty)$ であるから、$\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1$. ゆえに

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|a_0|\ |z|^n} = 1.$$

これから、$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists R \in \mathbb{R})$ $(\forall z \in \mathbb{C}\colon |z| \geq R)$

$$\left| \frac{|f(z)|}{|a_0|\ |z|^n} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \text{i.e.} \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{|f(z)|}{|a_0|\ |z|^n} \leq 1 + \varepsilon.$$

分母を払えば目的の不等式が得られる。■

系 9.20 $n \in \mathbb{N}$, $\{a_j\}_{j=0}^n \in \mathbb{C}^{n+1}$, $a_0 \neq 0$, $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ とするとき、

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\exists M' \in \mathbb{R})(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \qquad M|z|^n \leq |f(z)| \leq M'|z|^n.$$

証明 補題 9.19 を $\varepsilon = 1/2$ に対して適用すると、

$$\frac{1}{2}|a_0||z|^n \leq |f(z)| \leq \frac{3}{2}|a_0||z|^n \quad (|z| \geq R).$$

$M := |a_0|/2$, $M' := 3|a_0|/2$ とおけば良い。■

命題 9.21 (代数学の基本定理 (the fundamental theorem of algebra)) $P(z)$ を複素係数の多項式で、その次数 n は 1 以上とするとき、$P(z)$ は少なくとも一つの根を持つ。

証明を二つ与えておく。

証明 (良く本に載っている証明) 背理法を用いる。$(\forall z \in \mathbb{C})$ $P(z) \neq 0$ と仮定する。このとき、$f(z) := \dfrac{1}{P(z)}$ は整関数である。補題 9.19 より、$\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$ であるから、

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |P(z)| \geq 1.$$

ゆえに

$$|f(z)| \leq 1 \quad (|z| \geq R).$$

一方 $\overline{D}(0;R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合であり、$|f|$ は連続関数であるから、Weierstrass の最大値定理によって、$|f|$ は最大値を持つ：

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall z \in \overline{D}(0;R)) \quad |f(z)| \leq M.$$

ゆえに $(\forall z \in \mathbb{C})$ $|f(z)| \leq \max\{1, M\}$. Liouville の定理から、f は定数関数である。ゆえに P も定数関数であるが、これは n の次数が 1 以上であることと矛盾する[87]。■

証明 (教科書の証明を少し修正してある。) 背理法を用いる。$(\forall z \in \mathbb{C})$ $P(z) \neq 0$ と仮定する。このとき $f(z) := \dfrac{1}{P(z)}$ は整関数である。

[87] もし $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0 \neq 0, n \geq 1)$ が定数であれば、$a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \equiv 0$ である。「0 の代入と微分 (あるいは割り算)」によって、$a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ が得られ、$a_0 \neq 0$ に矛盾する。

補題 9.19 より、

$$(\exists M>0)(\exists R^*\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\ge R^*)\quad |P(z)|\ge M|z|^n.$$

$\forall R\ge R^*$ に対して、

$$(\heartsuit)\qquad (\forall z\in\mathbb{C}:|z|\ge R)\quad |f(z)|\le\frac{1}{M|z|^n}\le\frac{1}{MR^n}.$$

$|f|$ は $\overline{D}(0;R)$ で最大値を持つが、最大値の原理から、それは $|z|=R$ での最大値と一致する。それは ($\heartsuit$) により $\dfrac{1}{MR^n}$ で押えられる。結局、$|f(z)|\le\dfrac{1}{MR^n}$ $(z\in\mathbb{C})$. $R\to\infty$ とすると、$|f(z)|=0$. ゆえに $f(z)\equiv 0$. これは矛盾である。■

余談 9.22 (四元数体では) 上の定理は、$f(z)=0$ に対して、少なくとも 1 つの解 (α とおく) が存在することを主張しているだけだが、因数定理 (複素係数多項式でも成り立つ) を用いると、$f(z)$ は $z-\alpha$ で割り切れることが導かれ、次数についての帰納法により、$f(z)$ は n 個の 1 次因数の積に分解されることが分かる。つまり

$$(\exists\{\alpha_j\}_{j=1}^n\in\mathbb{C}^n)\quad f(z)=(z-\alpha_1)\cdots(a-\alpha_n).$$

$\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ が順番を入れ替えることで、「一意的」であることを示すのは難しくない。

…当たり前のようなことをくどくど書いたように思われるかもしれないが、実は私は昔以下のような疑問がなかなか解けずに困っていたことがある。

四元数体

$$\mathbb{H}=\{a+bi+cj+dk\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

においては、

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

が成り立つということだから、方程式 $z^2+1=0$ は $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ という 6 個の解を持つ。2 次方程式が (少なくとも) 相異なる 6 個の解を持つのはなぜか？ $z^2+1=(z-i)(z+i)$ であれば、$z=j$ を代入して $0=(j-i)(j+i)$ であるから、逆元を考えることで (これは $\mathbb{H}$ が体であることから保証されるはずだ)、$j=i$ または $j=-i$ が導かれるのではないか？これは明らかにおかしそうだけれど、どこが間違っているのだろうか？

ヒントになりそうなことは書いたので、クイズとしてお楽しみ下さい。■

9.5 Schwarz の補題

(これはカットしよう。1 次分数変換とか、等角写像を説明するときにやればいいや。桂田 [36] に書いてあります。)

10 Laurent 展開, 孤立特異点, 留数

(ただいま工事中。新旧 2 つの章をマージして、最近の授業資料の内容を用いての更新もしています。しばらく、粗いところが残っていると思われます。)

冪級数と「負冪級数」の和

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

の形に書ける級数を **Laurent 級数**と呼ぶ。2 つの級数がともに収束するとき、その Laurent 級数は収束し、その和は 2 つの級数の和であると定義する。2 つの級数の少なくとも一方が発散するときは、その Laurent 級数は発散する、と定義する。

それぞれの和が収束するための条件を考えると、ある円環領域で収束し、その外部では発散することが分かる。

例えば $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ という有理関数は、$\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$ で正則であり、$z=1,2$ では定義されていない。$1,2$ は良くない点であるが、実はその点 $c=1,2$ のまわりで Laurent 級数展開

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

が出来る。これはある意味で Taylor 展開 (冪級数展開) の一般化であり、色々なことに役立つ。

10.1 Laurent 展開

この項の内容を一言でまとめると「円環領域で正則な関数は Laurent 展開できる。特に、点 c の除外近傍 $D(c;\varepsilon)\setminus\{c\}$ で正則な関数は Laurent 展開できる。」

定義 10.1 (円環領域) $c\in\mathbb{C}$, $0\le R_1<R_2\le+\infty$ に対して、

$$A(c;R_1,R_2):=\{z\in\mathbb{C}\mid R_1<|z-c|<R_2\}$$

とおき、これを c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain, annular region) と呼ぶ。

また

$$\overline{A}(c;r_1,r_2):=\{z\in\mathbb{C}\mid r_1\le|z-c|\le r_2\}$$

とおく。

「円環」という言葉にふさわしいのは、$0<R_1<R_2<+\infty$ の場合だけだろう。しかし、Laurent 級数の収束・発散を扱うときは、収束円のときと同様に $R_1=0$ や $R_2=+\infty$ の場合も考えるのが有効である。

実は $R_1=0$ の場合が頻出する。これは円盤 $D(c;R_2)$ から c を除いたものである。すなわち

$$A(c;0,R_2)=D(c;R_2)\setminus\{c\}.$$

特に $A(c;0,R_2)\subset D(c;R_2)$ である。

円盤領域 $D(c;R)$ で正則な関数は冪級数展開出来たが、円環領域 $A(c;R_1,R_2)$ で正則な関数は Laurent 級数展開出来る。

定理 10.2 (円環領域で正則な関数は Laurent 展開出来る) $c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$. f は $A(c; R_1, R_2)$ で定義されていて正則とするとき[a]、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c; R_1, R_2)) \tag{64}$$

が成り立つ。

右辺の級数は $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c; r_1, r_2)$ で一様に絶対収束する。

(64) が成り立つとき、$R_1 < r < R_2$ を満たす任意の r に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\, dz \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{65}$$

が成り立つ。(この式だけ見ると a_n は r に依存しそうだが、実はどの $r \in (R_1, R_2)$ に対しても同じ値になる。)

[a] 正確にいうと: $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ かつ、$A(c; R_1, R_2) \subset \Omega$, かつ $f|_{A(c;R_1,R_2)}$ は正則。

係数を表す公式 (65) は、$D(c; R)$ で正則な関数の Taylor 展開の係数の式と同じ形をしている。「覚えられない」とギブアップしないように。

この定理の中の「一様に絶対収束」の部分の証明は、冪級数についての定理 3.21 と、次の補題 (証明は付録に回す, p. 257) から得られる。

補題 10.3 (負の指数の "冪級数" の収束) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ について、次の 3 つのいずれか 1 つだけが必ず成立する。

(i) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して収束する。$\forall R^* \in (0, \infty)$ に対して、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \ge R^*\}$ で一様に絶対収束する。

(ii) $\exists R \in (0, \infty)$ s.t. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > R\}$ で収束し、$D(c; R)$ で発散する。$\forall R^* \in (R, \infty)$ に対して、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \ge R^*\}$ で一様に絶対収束する。

(iii) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して発散する。

定理 10.2 の証明　最初に係数についての等式 (65) を証明する。m を任意の整数とする。(64) の両辺を $(z-c)^{m+1}$ で割って

$$\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^{n-m-1} \quad (z \in A(c; R_1, R_2)). \tag{66}$$

$R_1 < r < R_2$ を満たす任意の r に対して、(補題 10.3 直前の注意から) 円周 $|z-c| = r$ 上で Laurent 級数が一様収束するので、有界な $\dfrac{1}{(z-c)^{m+1}}$ をかけた (66) も一様収束する。ゆえに、項別積分が可能であり、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} a_n (z-c)^{n-m-1}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{nm} = a_m.$$

これから (64) を満たす $\{a_n\}$ の一意性 (存在すればただ一つしかない) と、(65) の積分が r に依らないことも分かる。

以下、(64) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。r_1, r_2 を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の数とする。$D := A(c; r_1, r_2)$ とおくと、f が $\overline{D}$ を含む開集合 $A(c; R_1, R_2)$ で正則であるからことから、

$$(67) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (例えば、定理 8.5 を用いて証明できる。また、星型領域における Cauchy の積分定理を用いた証明を §10.1.1 で説明する。)。

ゆえに

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad J := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

とおくと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = I + J.$$

I は円盤における正則関数の Taylor 展開と同じで、

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n, \quad a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

J については、$|\zeta - c| = r_1$ のとき $\left|\dfrac{\zeta - c}{z - c}\right| = \dfrac{r_1}{|z-c|} < 1$ であるから (等比級数の和の公式より)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{-1}{z-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - c}{z - c}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z-c)^n}$$

が導かれるので

$$(68) \qquad J = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z-c)^n} f(\zeta) d\zeta.$$

$M := \max\limits_{|\zeta - c| = r_1} |f(\zeta)|$ とおくと $|\zeta - c| = r_1$ ならば

$$\left|\frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z-c)^n} f(\zeta)\right| \le \frac{M}{r_1}\left(\frac{r_1}{|z-c|}\right)^n$$

が成り立つので、Weierstrass M-test が適用できて、(68) の右辺に現れる級数は、円周 $|\zeta - c| = r_1$ 上で一様収束する。ゆえに項別積分が可能で

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{-n+1}}\, d\zeta \frac{1}{(z-c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}.$$

まとめると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (r_1 < |z-c| < r_2).$$

r_1, r_2 が任意であることから、この級数は $A(c; R_1, R_2)$ で収束する。 ■

注意 10.4 任意の $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ について、次の 3 つのうち、どれか 1 つ (だけ) が成り立つ。

(i) 任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して収束する。

(ii) ある $R\in(0,+\infty)$ が存在して、$|z-c|>R$ ならば収束、$|z-c|<R$ ならば発散する。

(iii) 任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して発散する。

(i) のとき $R=0$, (iii) のとき $R=+\infty$ とすると、いずれの場合も

$$|z-c|>R \quad\Rightarrow\quad \text{収束},\quad |z-c|<R \quad\Rightarrow\quad \text{発散}.$$

さらに $r>R$ を満たす任意の r に対して、$\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|\ge r\}$ で一様に絶対収束する。

実際、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して、$\zeta:=\dfrac{1}{z-c}$ とおくと、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\zeta^n,$$
$$|z-c|>r \quad\Leftrightarrow\quad |\zeta|<\frac{1}{r},$$
$$|z-c|<r \quad\Leftrightarrow\quad |\zeta|>\frac{1}{r},$$
$$|z-c|=r \quad\Leftrightarrow\quad |\zeta|=\frac{1}{r}$$

が成り立つことから、原点中心の冪級数の収束・発散に帰着されるので、ほぼ自明である。 ■

Laurent 展開を孤立特異点のまわりのものに限るテキストもあるが、ここでは円環領域で正則な関数に対して定義しておく。特に正則点のまわりの Laurent 展開、留数も定義されることになり、Laurent 展開は Taylor 展開の一般化であることになる。

定義 10.5 (円環領域における Laurent 展開, 点のまわりの Laurent 展開と主部・留数) $c\in\mathbb{C}$, $0\le R_1<R_2\le+\infty$, f は $A(c;R_1,R_2)$ で定義されていて正則とするとき、

$$(*)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\qquad (z\in A(c;R_1,R_2))$$

を満たす $\{a_n\}$ が一意的に存在する。

この $(*)$ を f の $A(c;R_1,R_2)$ **における Laurent (級数) 展開**と呼ぶ。

特に $R_1=0$ のとき、f の c **のまわりの (c における) Laurent (級数) 展開**とも呼ぶ。さらに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ を Laurent (級数) 展開の**主部** (主要部、**the principal part**)、a_{-1} を f の c における**留数 (residue)** と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ で表す:

$$\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}.$$

(注意: $R_1>0$ の場合は、主部、留数という言葉は使わない。)

以下この講義に現れる Laurent 展開の 9 割以上が、点のまわりの Laurent 展開で、そうでない ($R_1>0$ である) 円環領域における Laurent 展開は、あまり登場しない。これは (以下に導入する) 孤立特異点の話が長くなるせいであるが、他のテキストを読んでいる人には注意が必要かもしれない (テキストによっては、円環領域における Laurent 展開を定義していないものもある)。

注意 10.6 (細かい注意) $R_1 = 0$ の場合を「c が孤立特異点である場合」と言ってないことに注意しよう。c が正則点である場合も込めている。そうしておくと、例えば「c が f の正則点ならば $\mathrm{Res}(f; c) = 0$」と言えて便利である。■

後でおいおい分かることであるが、実は Laurent 展開が出来ることは重要であるが、Laurent 展開の具体形が必要になることはあまりない (後で紹介する留数が分かれば十分であることが多い)。以下、Laurent 展開を具体的に求めるための方法をいくつか紹介するが、“便利な方法” は存在しない、いう感想を持つかもしれない。それでもあまり困らないわけである。

まず Taylor 展開の場合の

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

の直接の拡張であるような便利な公式は存在しない。また、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z})$$

という公式は、a_n の一意性を示すのに役立ったが (重要)、a_n を具体的に求める目的には役立たないことが多い (線積分を計算するのはしばしば難しい)。

とにかく何らかの手段で

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (R_1 < |z-c| < R_2)$$

を満たす $\{a_n\}$ が得られれば、これが f の $A(c; R_1, R_2)$ における Laurent 展開である (一意性による)、という事実を利用する場合が多い。

任意の有理関数 f は、部分分数分解することによって、多項式または $\dfrac{1}{(z-a)^n}$ の形の項の線型結合で書ける。それらは、例 A.33 で見たように等比級数の和の公式を利用したり、微分を考えることで Laurent 級数展開が求まる。そうして求めた部分分数分解の各項の Laurent 展開を寄せ集めることで、f の Laurent 展開が得られる。

例 10.7 ($\dfrac{1}{z-a}$ の Laurent 展開) $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ の Laurent 展開は以下のように求まる。

(1) f は $A(a; 0, \infty)$ で正則であるから、f は a のまわりで Laurent 展開出来て、それは $f(z)$ の定義式の右辺そのものである。つまり

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \quad (0 < |z-a| < \infty)$$

が f の a のまわりの ($A(a; 0, \infty)$ における) Laurent 展開である。

(2) $c \neq a$ とすると、f は c の近傍 $D(c; |a-c|)$ で正則であるから、f は c のまわりで Taylor 展開できるが、それが f の c のまわりの (円環領域 $A(c; 0, |a-c|)$ における) Laurent 展開である。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-c)-(a-c)} = -\frac{1}{a-c} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-c}{a-c}} \\
&= -\frac{1}{a-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{a-c}\right)^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |(z-c)/(a-c)| < 1) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(a-c)^{n+1}} \quad (0 < |z-c| < |a-c|).
\end{aligned}$$

例 10.8 (部分分数分解の Laurent 展開を寄せ集めて Laurent 展開する)

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}$$

とする。f は $\mathbb{C}\setminus\{0,1,2\}$ で正則である。f を 0 を中心とする円環領域で Laurent 展開してみよう。

(1) f は $A(0;0,1)$ で正則であるから、そこで Laurent 展開出来るはずである。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\quad(0<|z|<\infty),\\
&\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n\quad(|z|<1),\\
&\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad(|z|<2).
\end{aligned}$$

であるから

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)z^n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}\quad(0<|z|<1).$$

(2) f は $A(0;1,2)$ でも正則であるから、そこでも Laurent 展開できる。

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\quad(1<|z|<\infty).$$

ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}\quad(1<|z|<2).$$

(3) f は $A(0;2,\infty)$ でも正則であるから、そこでも Laurent 展開できる。

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}\quad(2<|z|<\infty).$$

ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}=\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}-1}{z^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}-1}{z^n}\quad(2<|z|<\infty).$$

これが $A(0;2,\infty)$ における f の Laurent 展開である。■

10.1.1 (67) の証明について

(しばらく工事中。)

講義の後に (67) がなぜ成り立つのか、分かるように説明してほしい、と言われたので、説明してみる。

私自身は、Green の定理は重要で、(67) を証明するのにうってつけであると感じているのだが、現実には、関数論を学習する人にとって、Green の定理はとても常識とは言えない (その説明に十分な時間を割けない、そもそも必修科目の範囲に入っていない、そういうのがありがちと思われる)。以下では、講義科目内の self-contained を目指し、Green の定理は使わずに、定理 6.18 と、定理 6.23 を使った証明を説明する。

$\varepsilon > 0$, $\overline{D}(a;\varepsilon) \subset A(c;r_1,r_2)$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r_2} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{|z-c|=r_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{69}$$

を示そう。右辺は円盤領域における Cauchy の積分公式により、$2\pi i f(a)$ に等しいことが分かる。ゆえに (67) が成り立つ (z を ζ, a を z に置き換える)。

$a = c + \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ とする。

$$\begin{aligned}
&C_{11}\colon z = r_1 e^{i\theta} \quad (\theta \in [\varphi, \varphi+\pi]),\\
&C_{12}\colon z = r_1 e^{i\theta} \quad (\theta \in [\varphi+\pi, \varphi+2\pi]),\\
&C_{21}\colon z = r_2 e^{i\theta} \quad (\theta \in [\varphi, \varphi+\pi]),\\
&C_{22}\colon z = r_2 e^{i\theta} \quad (\theta \in [\varphi+\pi, \varphi+2\pi]),\\
&\gamma_1\colon z = a + \varepsilon e^{i\theta} \quad \theta \in [\varphi, \varphi+\pi],\\
&\gamma_2\colon z = a + \varepsilon e^{i\theta} \quad \theta \in [\varphi+\pi, \varphi+2\pi],\\
&L_1\colon z = t e^{i(\varphi+\pi)} (t \in [r_1, r_2]),\\
&L_2\colon z = t e^{i\varphi} \quad (t \in [r_1, \rho-\varepsilon]),\\
&L_3\colon z = t e^{i\varphi} \quad (t \in [\rho+\varepsilon, r_2]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &:= C_{21} - L_1 - C_{11} + L_2 - \gamma_1 + L_3,\\
\Gamma_2 &:= -L_3 - \gamma_2 - L_2 - C_{12} + L_1 + C_{22}
\end{aligned}$$

と Γ_1, Γ_2 を定義すると、どちらも閉曲線であり、$\Gamma_1+\Gamma_2$ に沿った線積分で、往復する経路 ($\pm L_1$, $\pm L_2$, $\pm L_3$) に沿う線積分が打ち消しあって 0 になるので、

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{f(z)}{z-a}\,dz &= \int_{C_{21}-C_{11}-\gamma_1-\gamma_2-C_{12}+C_{22}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\\
&= \int_{C_{21}+C_{22}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{C_{11}+C_{12}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\\
&= \int_{|z-c|=r_2} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{|z-c|=r_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz
\end{aligned}$$

が得られる。以下

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$$

を示す。それができれば

$$0 = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-c|=r_2} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{|z-c|=r_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

から、移項により (69) が得られる。

以下、積分路 Γ_1 を、積分の値を変えずに、像が星型領域に含まれるような Γ_1' に変形できることを示す。

R_1, R_2 より、角度 $2\Delta\varphi$ 以下の任意のバウムクーヘン扇領域が星型となるような $\Delta\varphi > 0$ が定まる (定理 6.23)。

c から γ_1 へ接線を引き、その偏角を $\varphi + \delta$ とする (接線が $z = c + te^{i(\varphi+\delta)}$ という意味である)。

中心角が小さなバウムクーヘン扇領域 B で $\displaystyle\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$ が成り立つので、L_1, C_{11} の定義式にある $\varphi + \pi$ を少し ($\Delta\varphi$ 以下) 減少させても積分 $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}dz$ の値は変わらない。その変形を繰り返すことで、積分の値を変えずに、$\varphi + \pi$ のところを $\varphi + \delta + \frac{\Delta\varphi}{3}$ に変えることができる。

L_2, L_3 の像は、直線 $z = c + te^{i\varphi}$ $(t > 0)$ の像に含まれるが、積分路を変形して、半直線 $z = c + te^{i(\varphi+\delta-\frac{\Delta\varphi}{3})}$ $(t \geq 0)$ の像に含まれるようにできる。もちろん同時に C_{11} と γ_1 の部分も変形する (C_{11} はまだしも、γ_1 の変形を式で書くと複雑になるので、それはあきらめる)。— 以上は a を避けた、ということである。

こうして得られた閉曲線 Γ_1' は、その像が $B(c; R_1, R_2, \varphi + \delta - \frac{\Delta\varphi}{2}, \varphi + \delta + \frac{\Delta\varphi}{2})$ に含まれる。この領域は星型であるので、

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{\Gamma_1'} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0.$$

同様にして $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$ が証明できる。

(個人的な感想: 定理??さえ理解してしまえば、後は図を眺めるだけで積分路の変形が納得できるのだが、こうして言葉で説明を書くのは面倒で、また出来上がった説明が読む人にかなり分かりにくくなっている、と思われる。)

10.2 孤立特異点

この項の内容を手短にまとめると、「正則点と、孤立特異点を定義し、孤立特異点を除去可能特異点、極、真性特異点に分類する。点 c の除外近傍で正則な関数 f に対して、c は f の正則点または孤立特異点である。」

定義 10.9 (孤立特異点の分類: 除去可能特異点, 極, 真性特異点) Ω が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (**an isolated singularity**) であるとは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり (つまり $A(c;0,\varepsilon) \subset \Omega$ かつ $A(c;0,\varepsilon)$ の各点で f は微分可能)、$D(c;\varepsilon)$ では正則でない (f は c で定義されていないか、f は c で定義されていても、c で微分可能でない) ことを言う。

このとき、ある $\{a_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;0,\varepsilon))$$

が成り立つ。この $\{a_n\}$ を用いて孤立特異点を以下のように3つに分類する。

(i) c が f の**除去可能特異点** (**removable singularity**) であるとは、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{-n} = 0$$

が成り立つことをいう。

(ii) c が f の**極** (**pole**) であるとは、

$$(\exists k \in \mathbb{N}) a_{-k} \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0$$

が成り立つことをいう。またこのとき、k を f の極 c の**位数** (order) と呼び、c は f の**位数 k の極**であるという。

(iii) c が f の**(孤立) 真性特異点** (**an essential singularity**) であるとは、

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} \neq 0$$

が成り立つことをいう。

ついでに「正則点」という言葉も定義しておこう。

定義 10.10 (正則点) $c \in \Omega$ が複素関数 f の正則点であるとは、ある正の数 ε が存在して、$D(c;\varepsilon)$ は f の定義域に含まれ、f は $D(c;\varepsilon)$ で正則である (すなわち任意の $z \in D(c;\varepsilon)$ で f は微分可能である) ことをいう。

$z \in A(c;0,\varepsilon)$ と書くのは面倒な割に案外分かりにくいので、講義の板書では、$0 < |z-c| < \varepsilon$ という同値な条件で置き換えることが多い。

余談 10.11 (孤立特異点でない特異点) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、f が $D(c;\varepsilon)$ で収束冪級数に展開できないとき、c は f の特異点と呼ぶ。

孤立特異点は特異点であるが、孤立特異点ではない特異点も存在する。例えば、孤立特異点が集積している点 ($f(z) := \dfrac{1}{\sin(1/z)}$ の $z=0$ がそういう点)。

また、多価関数 (multifunction, multi-valued function) の分岐点というのもある。これはさらに、代数分岐点、対数分岐点、超越分岐点 (transcendental branch point) の3つに分類される。$f(z) = \operatorname{Log} z$ とするとき、$z=0$ は f の対数分岐点である。■

注意 10.12 (1) この孤立特異点の定義は、教科書の定義とは異なる。教科書では、「ある正の数 ε が存在して、f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であること」となっていて、c が f の正則点である

場合を、孤立特異点から除外していない (正則点は除去可能特異点ということになる)。このあたりは、教科書の流儀が少数派と思われる。この講義では多数派に従うことにした。

(2) (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合

$$\lim_{\substack{z \to c \\ z \neq c}} f(z) = \infty$$

が成り立つ。実際、収束冪級数は正則なので、

$$\lim_{z \to c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = a_0, \quad \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \sim \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} \to \infty \quad (z \to c)$$

となる。実は

(a) c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ 極限 $\lim_{z \to c} f(z)$ が存在する。

(b) c が f の極 $\Leftrightarrow \lim_{z \to c} f(z) = \infty$.

(c) c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow \lim_{z \to c} f(z)$ は確定しない (発散し、$= \infty$ でもない)。

が成り立つ ($\Rightarrow$ だけでなく、逆向き $\Leftarrow$ も言えることが重要である)。

(a), (b) の $\Rightarrow$ の証明は簡単である。(3) の $\Rightarrow$ の証明には、少し準備 (定理??(Riemann の除去可能特異点定理)) が必要である。(それはこの講義の最後にやる。それが出来れば、$\Leftarrow$ は一斉に証明できる。)

(3) 真性特異点という言葉は、孤立特異点でない場合にも使われる (例 10.24)。ここで現れた真性特異点は、「孤立真性特異点」と呼ぶ方が紛れがないかもしれない。■

余談 10.13 (a), (b), (c) は、いわゆる分類になっていることに注意しよう。そういう場合に (a)$\Rightarrow$ (A), (b)$\Rightarrow$ (B), (c) $\Rightarrow$ (C) が成り立てば、逆 (A)$\Rightarrow$ (a), (B)$\Rightarrow$ (b), (C) $\Rightarrow$ (c) がすぐに導かれる (例えば、(A) が成り立つと仮定するとき、もし (a) でなければ、(b) または (c) であるが、(b) ならば (B), (c) ならば (C) で、(A) であることに矛盾する。ゆえに (a) が成り立つ)。

高校数学で、実係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ と判別式 $D = b^2 - 4ac$ について、

(a) $D > 0 \Leftrightarrow$ この 2 次方程式は 2 つの相異なる実数解を持つ。

(b) $D > 0 \Leftrightarrow$ この 2 次方程式は 1 つの重解 (これは実数) を持つ。

(c) $D < 0 \Leftrightarrow$ この 2 次方程式は 2 つの相異なる虚数解を持つ。

が成り立つが、この証明にも同じ論法が使える。■

10.3 Laurent 展開、孤立特異点、留数の例

10.3.1 正則点において Taylor 展開は Laurent 展開である

注意 10.14 (Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である) f が c の近傍 $D(c;R)$ で正則であるとき、ある $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R))$$

と Taylor 展開 (冪級数展開) 出来る。このとき、$a_{-n}=0$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくと、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(z\in A(c;0,R))$$

が成り立つ ($A(c;0,R)\subset D(c;R)$ に注意する)。つまり、Taylor 展開は実質的に Laurent 展開でもある ($z\in D(c;R)$ を $A(c;0,R)$ に置き換えるだけだ)。この場合は、Laurent 展開の主部は 0 で、f の c における留数も 0 である。

(逆の言い方をすると) Laurent 展開は Taylor 展開の一般化であるとも言える。 ■

例 10.15 (Taylor 展開が Laurent 展開となる, 正則点)

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad(z\in\mathbb{C})$$

であるから、$f(z)=e^z$ の 0 のまわりの Laurent 級数展開は

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad(z\in A(0;0,+\infty))$$

である。 ■

10.3.2 除去可能特異点

c が f の除去可能特異点であるとき、ある正数 ε と、$\{a_n\}_{n\ge 0}$ が存在して

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(0<|z-c|<\varepsilon),$$

このとき、$z\in D(c;\varepsilon)$ に対して

$$\widetilde{f}(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$$

は収束するので、$\widetilde{f}$ は $D(c;\varepsilon)$ で正則で、

$$f(z)=\widetilde{f}(z)\quad(z\in A(c;0,\varepsilon)).$$

ゆえに

$$\widetilde{f}(z)=\begin{cases}f(z) & (z\in A(c;0,+\varepsilon))\\ a_0 & (z=c)\end{cases}$$

であることが分かる。つまり、$z=c$ で f の値を a_0 であるように定義を修正した $\widetilde{f}$ は、$D(c;\varepsilon)$ で正則である。

「除去可能」という言葉のニュアンスが分かる。

なお、$a_0=\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\ne c}}f(z)$ であることに注意する。また $\mathrm{Res}(f;c)=0$.

例 10.16 (除去可能特異点, 有名な例) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ $(z\in\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0\})$. 0 は f の孤立特異点である。

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\sin z=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}\quad(z\in\Omega).$$

これは f の 0 における Laurent 展開である。その主部は 0. ゆえに 0 は f の除去可能特異点である。

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}\Bigg|_{z=0} = 1.$$

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z) &= \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}) \\ 1 & (z=0)\end{cases} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \quad (z\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

この $\widetilde{f}$ は $\mathbb{C}$ で正則である (冪級数の収束円は $D(0;+\infty)=\mathbb{C}$)。■

例 10.17 (除去可能特異点)

$$f(z) = \begin{cases} z^2+1 & (z\neq 0) \\ 2 & (z=0)\end{cases}$$

とするとき、0 は f の孤立特異点であり (実際 f は $0<|z-0|<+\infty$ で正則であり、$z=0$ では微分可能でない)、除去可能特異点である。

0 での値 2 を 1 に変更した関数

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} z^2+1 & (z\neq 0) \\ 1 & (z=0)\end{cases}$$

は 0 を正則点とする (すべての $z\in\mathbb{C}$ に対して $\widetilde{f}(z)=z^2+1$ であることに注意せよ)。■

このように、除去可能特異点での値を変更して、その点が正則点であるように出来る。このことを断りなく行う場合が多い。

10.3.3 極

例 10.18 (そのまま Laurent 展開) $f(z)=\dfrac{2}{z-3}$ $(z\in\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{3\})$. f は Ω で正則である。ゆえに 3 は f の孤立特異点で、それ以外に f の孤立特異点は存在しない。

$\mathbb{C}\setminus\{3\}$ は円環領域 $A(3;0,+\infty)$ である。f の 3 のまわり Laurent 展開は、$f(z)=\dfrac{2}{z-3}$ 自身である。実際、

$$a_{-1}:=2,\quad a_n:=0\quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$$

とおくと

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-3)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-3)^n}\quad (z\in A(3;0,+\infty))$$

が成り立つから。

この Laurent 展開の主部は $\dfrac{2}{z-3}$ である。3 は f の 1 位の極であり、f の 3 における留数は $\operatorname{Res}(f;3)=a_{-1}=2$.

$$\lim_{z\to 3} f(z)=\infty\quad (\lim_{z\to 3}|f(z)|=+\infty \text{ ということ}).■$$

例 10.19 (そのまま Laurent 展開 その 2) $f(z)=\dfrac{2}{(z-3)^4}$ $(z\in\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{3\})$. f は Ω で正則である。ゆえに 3 は f の孤立特異点で、それ以外に f の孤立特異点は存在しない。

$\mathbb{C}\setminus\{3\}$ は円環領域 $A(3;0,+\infty)$ である。f の 3 のまわりの Laurent 展開は、$f(z)=\dfrac{2}{(z-3)^4}$ 自身である。実際、

$$a_{-4}:=2,\quad a_n:=0\quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{-4\})$$

とおくと

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-3)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-3)^n}\quad (z\in A(3;0,+\infty))$$

が成り立つから。

この Laurent 展開の主部は $\dfrac{2}{(z-3)^4}$ である。3 は f の 4 位の極であり、f の 3 における留数は $\operatorname{Res}(f;3)=a_{-1}=0$. やはり $\lim_{z\to 3}f(z)=\infty$. ■

例 10.20 (有理関数) 有理関数 $f(z)=\dfrac{z^3-7z^2+26z-30}{z^3-5z^2+3z+9}$ は、次のように部分分数分解できる。

$$f(z)=\frac{z^3-7z^2+26z-30}{z^3-5z^2+3z+9}=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}-\frac{4}{z+1}.$$

f は $\mathbb{C}\setminus\{3,-1\}$ で正則である (分母・分子は多項式なので $\mathbb{C}$ 全体で正則で、$z\neq 3,-1$ のとき分母は 0 でない)。

3 と -1 が f の孤立特異点である。

3 に注目しよう。3 の周りの Laurent 展開とは

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-3)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (0<|z-3|<\varepsilon)$$

の形をした式である。

$\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}$ はすでに 3 のまわりの Laurent 展開の形をしている。

それ以外の部分 $1-\dfrac{4}{z+1}$ を考えよう。これは $D(3;4)$ で正則である ($4=3$ と -1 の距離)。ゆえに 3 のまわりに冪級数展開できる。

$$1-\frac{4}{z+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-3)^n\quad (z\in D(3;4)).$$

ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-b3)^n+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}\quad (0<|z-3|<4,\ \text{i.e. } z\in A(3;0,4)).$$

これが f の 3 のまわりの Laurent 展開である。ゆえに 3 は f の 2 位の極である。そして $\operatorname{Res}(f;2)=2$.

この最後の結論は、Laurent 展開を具体的に求めなくても、最初の部分分数分解の段階で見えていることに注意しよう。

-1 も f の孤立特異点である。-1 の周りの Laurent 展開は求めなくても、1 位の極であると分かる。実際、

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z),\quad f_1(z):=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2},\quad f_2(z):=-\frac{4}{z+1}$$

と分解すると、f_1 は $D(-1;4)$ で正則であるから、-1 の周りに冪級数展開できる: $(\exists\{a'_n\})$ $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(z+1)^n$ $(z\in D(-1;4))$. ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(z+1)^n+\frac{-4}{z+1}\quad(z\in A(-1;0,4))$$

が成り立つが、これは f の -1 の周りの Laurent 展開である。主部は $\dfrac{-4}{z+1}$ であるから、-1 は f の極で、その位数は 1. $\operatorname{Res}(f;-1)=-4$. ($\{a_n\}$ を具体的に求める必要がないこ p とに注意。) ■

例 10.21 (一般の有理関数) 有理関数の Laurent 展開、孤立特異点を調べよう。

$P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $P(z)$ と $Q(z)$ は互いに素、$P(z)\neq 0$ とする。$P(z)$ の相異なる根を $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, それぞれの重複度を $m_1,\ldots,m_r$, $P(z)$ の最高次係数を a_0 とすると、

$$P(z)=a_0\prod_{k=1}^{r}(z-\alpha_k)^{m_k}.$$

このとき、

$$\frac{Q(z)}{P(z)}=\text{多項式}+\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{m_k}\frac{A_{k,m}}{(z-\alpha_k)^m},\quad A_{k,m}\in\mathbb{C}$$

という形に部分分数分解出来る。

これから、$\dfrac{Q}{P}$ は $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ で正則であり、α_k は高々 m_k 位の極であることが分かる。その他の点は $\dfrac{Q}{P}$ の正則点である。以上は、$P(z)$ と $Q(z)$ が互いに素と仮定したからで、もしも $P(z)$ と $Q(z)$ が次数 1 以上の共通因数を持つならば、(正則点でない) 除去可能特異点が現れる (例: $f(z)=\dfrac{z^3-1}{z-1}$ は 1 が正則点でない除去可能特異点である)。

以上から、有理関数の c のまわりの Laurent 展開を求めるには、$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m}$ の点 c のまわりの Laurent 展開が求まれば良い。

(1) $m=1$ の場合は以前示したように

(i) $c=a$ のとき、$f(z)=\dfrac{1}{z-a}=\dfrac{1}{z-c}$ $(0<|z-c|<+\infty)$. これ自身が c のまわりの Laurent 展開である。

(ii) $c\neq a$ のとき。$f(z)=\dfrac{1}{z-a}$ は $D(c;|a-c|)$ で正則であるから、c は正則点であり、除去可能得点である。

$$f(z)=\frac{1}{z-a}=\cdots(\text{中略})\cdots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(a-c)^{n+1}}\quad(0<|z-c|<|a-c|)$$

が c のまわりの Laurent 展開である。

(2) $m>1$ の場合は、$m=1$ の場合の Laurent 展開を微分すれば求まる。

例えば、$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ とする。

(i) $c=1$ のとき、c は f の 2 位の極であり、$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ $(0<|z-1|<+\infty)$ 自身が f の c のまわりの Laurent 展開である。

(ii) $c=2$ のとき、f は $D(2;1)$ で正則であるから、c は f の正則点であり、除去可能特異点である。

$$\frac{1}{z-1}=\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \quad (|z-2|<1).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}&=-\left(\frac{1}{z-1}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n(z-2)^{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n(z-2)^n \quad (|z-2|<1).\end{aligned}$$

これが f の c のまわりの Laurent 展開である ($|z-2|<1$ で成り立つならば、当然 $0<|z-2|<1$ で成り立つ。)。

これで、任意の有理関数を Laurent 展開する方法が分かった。

脱線になるが、$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}$ の、$A(2;1,+\infty)$ における Laurent 展開も求めてみよう。

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}&=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-2}\right)^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-2)^n} \quad (1<|z-2|<+\infty)\end{aligned}$$

であるから

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)(-1)^{n-1}}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(-1)^n}{(z-2)^n} \quad (1<|z-2|<+\infty).\blacksquare$$

有理関数以外の関数の極の例をあげよう。

例 10.22 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。sin の 0 のまわりの冪級数展開

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} \quad (z\in\mathbb{C})$$

から

$$(\star)\qquad f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}+\frac{1}{z} \quad (z\in A(0;0,+\infty)).$$

($\sum$ でなく $\cdots$ で書き換えると良いかも。) これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である。実際

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n\ge 0,\ n \text{ は奇数のとき。} k=\frac{n+1}{2} \text{ とおくと } k \text{ は整数で } n=2k-1)\\ 1 & (n=-1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

とおくと、$(\star)$ の右辺は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ の形をしている。

また、この Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{z}$ であり、0 は f の 1 位の極、$\mathrm{Res}(f;0)=1$. ■

10.3.4 真性特異点

例 10.23 (孤立真性特異点) $f(z)=\exp\dfrac{1}{z}$ は $\Omega := \mathbb{C}\setminus\{0\} = A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 は f の孤立特異点である。

$$\exp\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^n \quad (\zeta\in\mathbb{C})$$

であるから

$$f(z)=\exp\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \quad (0<|z|<+\infty).$$

これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である (実際、$a_n=0$ $(n\in\mathbb{N})$, $a_0=1$, $a_{-n}=\dfrac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$ とすると、$f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/n!}{z^n}$)。

この Laurent 展開の主部は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$ であり、(0 でない項が無限個あるので) 0 は f の真性特異点である。また $\mathrm{Res}(f;1)=\dfrac{1}{1!}=1$.

$\displaystyle\lim_{z\to0}f(z)$ が存在しない。これは、高校数学の知識でも分かる:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty,$$
$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0. \blacksquare$$

問 76. (教科書 [1] p. 85 の問を改題) 以下の (1), (2), (3) を証明せよ。

(1) $\forall a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists z\in A(0;0,\varepsilon)$ s.t. $\exp\dfrac{1}{z}=a$.

(2) $\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.t. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{z_n}=\infty$.

(3) $\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.t. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=0$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{z_n}=0$.

例 10.24 (孤立特異点でない真性特異点)

$$f(z)=\frac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}.$$

f は $z=0$ で定義されないことは明らかであるが、それ以外に $\sin\dfrac{1}{z}=0$ となる z に対しても定義されない。この f は、$\{0\}\cup\left\{\dfrac{1}{n\pi}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$ に属する点では定義されない。0 は f の特異点であるが、孤立特異点ではない。これも真性特異点と呼ばれる。■

例 10.25 $a \in \mathbb{C}$ として、$f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{a\})$ とする。

(i) $c = a$ とすると、f は $A(c; 0, +\infty)$ で正則で、f の c のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \quad (z \in A(c; 0, +\infty)).$$

(ii) $c \neq a$ とする。f は $D(c; |a-c|)$ で正則であるので、c のまわりで Taylor 展開でき、それが f の c のまわりの Laurent 展開である。この計算は以前もやってあるので結果だけ書くと、

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(a-c)^{n+1}} \quad (z \in A(c; 0, |a-c|)).$$

(実際、

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-c)-(a-c)} = -\frac{1}{a-c} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-c}{a-c}} = -\frac{1}{a-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{a-c}\right)^n$$

であるから。)

一方、f は $A(c; |a-c|, +\infty)$ でも正則である。$z \in A(c; |a-c|, +\infty)$ のとき、$|z-c| > |a-c|$ であるから、$\dfrac{|a-c|}{|z-c|} < 1$ が成り立つので、等比級数の和の公式を用いて

$$f(z) = \frac{1}{(z-c)-(a-c)} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{a-c}{z-c}} = \frac{1}{z-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-c}{z-c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

すなわち

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-c)^{n-1}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c; |a-c|, +\infty)).$$

これが f の $A(c; |a-c|, +\infty)$ における Laurent 展開である。 ■

問 77. (教科書 [1] p. 84) 次の関数のそれぞれの孤立特異点における主要部は何か。

(1) $\dfrac{\cos z}{z^2 \sin z}$ $(z = 0)$ (2) $\dfrac{z^2}{(z^2-1)^3}$ $(z = 1)$

問 78. (1) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$ に対して、0 はどういう種類の孤立特異点か。(2) $f(z) = \dfrac{\sin(z^3)}{z(1-\cos z)}$ に対して、0 はどういう種類の孤立特異点か。(3) $r > 0$ がどんなに小さくても、$A(c; 0; r)$ において f は 0 以外のすべての複素数値を取ることを示せ。

10.4 極とその位数の特徴づけ

我々は、極とその位数を Laurent 展開を用いて定義したが、Laurent 展開を求めるのはしばしば面倒なので、もっと簡単な判定法があると便利である。ここではそれを追求しよう。

次の命題を、零点に関する命題 9.3 と比較してみると良い。この命題の (ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明を見ると、極のまわりの Laurent 展開を求める問題は、Taylor 展開を求める問題に帰着されることが分かる。残念ながら (孤立) 真性特異点のまわりの Laurent 展開については、似たようなことは出来ない。

命題 10.26 (極の特徴づけ) c が正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ の孤立特異点, $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の (i), (ii) は互いに同値である。

(i) c は f の k 位の極

(ii) c を含むある開集合 U で正則な関数 g が存在して、

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (z \in U \setminus \{c\}), \quad g(c) \neq 0.$$

条件 (ii) は、次の各条件 (U を少し具体的な形にした) と同値であることは比較的簡単に分かる。

$(ii)'$ $(\exists R > 0)$ $(\exists g\colon D(c;R) \to \mathbb{C}$ 正則) $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(0 < |z-c| < R)$ かつ $g(c) \neq 0$.

$(ii)''$ $(\exists g\colon \Omega \cup \{c\} \to \mathbb{C}$ 正則) $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in \Omega \setminus \{c\})$ かつ $g(c) \neq 0$.

(これは $(z-c)^k f(z)$ が c を除去可能特異点とする、という方が良いかも。)

証明 c が f の孤立特異点ということから、c のまわりで Laurent 展開できる。すなわち $\exists R \in (0, +\infty]$, $\exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明。c が f の k 位の極ならば、

$$a_{-k} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \\ &= \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots \quad (0 < |z-c| < R) \end{aligned}$$

であるから、

$$(z-c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-c) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

この右辺は冪級数で、($0 < |z-c| < R$ で収束するのだから) 収束半径は R 以上である。そこで

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-c)^n \quad (|z-c| < R)$$

とおくと、g は $D(c;R)$ で正則で、

$$(z-c)^k f(z) = g(z) \quad (0 < |z-c| < R).$$

ゆえに

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} \quad (0 < |z-c| < R) \quad \text{かつ} \quad g(c) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_{n-k}(c-c)^n = a_{-k} \neq 0.$$

(ii)$\Longrightarrow$(i) の証明。(ii) を仮定すると、$\exists R>0$, $\exists g\colon D(c;R)\to\mathbb{C}$ s.t. g は正則で、

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-c)^k}\quad(0<|z-c|<R),\quad g(c)\neq 0.$$

g は $D(c;R)$ で正則だから、Taylor 展開できる。すなわち

$$\exists\{a_n\}_{n\geq 0}\quad\text{s.t.}\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=a_0+a_1(z-c)+a_2(z-c)^2+\cdots\quad(|z-c|<R).$$

ゆえに $0<|z-c|<R$ を満たす任意の z に対して、

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{g(z)}{(z-c)^k}=\frac{a_0}{(z-c)^k}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{z-c}+a_k+a_{k+1}(z-c)+a_{k+2}(z-c)^2+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n+\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{k-n}}{(z-c)^n}.\end{aligned}$$

そして、$a_0=g(c)\neq 0$ であるから、c は f の k 位の極である。■

注意 10.27 (対比させておく) 命題 9.3 で見たように、c が f の k 位の零点とは、

$$f(z)=(z-c)^k g(z)\quad(|z-c|<R),\quad g(c)\neq 0$$

を満たす正則関数 $g\colon D(c;R)\to\mathbb{C}$ が存在すること。また命題 10.26 で見たように、c が f の k 位の極とは、

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-c)^k}\quad(0<|z-c|<R),\quad g(c)\neq 0$$

を満たす正則関数 $g\colon D(c;R)\to\mathbb{C}$ が存在すること。良く見比べよう。■

Laurent 展開をしなくても、極かどうか、その位数は何か、分かることが重要である。

例 10.28

$$f(z)=\frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

0 は f の 3 位の極。1 は f の 2 位の極。2 は f の 1 位の極。(それぞれ g が何であるか、把握すること。) ついでに、3 は f の 2 位の零点、4 は f の 3 位の零点である。

それでは

$$g(z)=\frac{(z-2)(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

は? 2 は実は除去可能特異点である。実際

$$h(z):=\frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2}$$

は 2 の近傍 $D(22;1)$ で正則であるから、

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n\quad(z\in D(2;1)).$$

$g(z)=h(z)$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{2\})$ であるから

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n\quad(z\in A(2;0,1)).$$

ゆえに 2 は g の除去可能特異点である。■

系 10.29 P と Q は c の近傍で正則で、c は P の k 位の零点、$Q(c) \neq 0$ であるならば、c は $f := \dfrac{Q}{P}$ の k 位の極である。

証明 c が P の k 位の零点であるから、c の近傍で正則な関数 R が存在して、$P(z) = (z-c)^k R(z)$, $R(c) \neq 0$. このとき、$g(z) := \dfrac{Q(z)}{R(z)}$ とおくと、g は c の近傍で正則で、$g(c) = \dfrac{Q(c)}{R(c)} \neq 0$, $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$ (c のある除外近傍で) が成り立つ。命題 10.26 によって、c は f の k 位の極である。■

問 $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, f は c の近傍で正則とするとき、c が f の k 位の零点であるためには、c が $\dfrac{1}{f}$ の極であることが必要十分であることを示せ。

例 10.1 $f(z) := \dfrac{\sinh z}{\sin z}$ のすべての極とその位数を求めよ。

(解) $Q(z) := \sinh z$, $P(z) := \sin z$ はともに $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である ($\sinh z = (\exp z - \exp(-z))/2$, $\sin z = (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i)$ からも分かるし、原点における Taylor 展開の収束半径が ∞ であることを確認しても良い)。$c \in \mathbb{C}$ が極であるためには、$P(c) = 0$ であることが必要である。$\sin c = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. $c = n\pi$. $P'(c) = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$ であるから、$c = n\pi$ は P の 1 位の零点である。

(i) $n \neq 0$ のとき、$Q(n\pi) = \sinh n\pi \neq 0$ ($\sinh n\pi > 0$ に注意) であるから、上の Cor. によって、$n\pi$ は $f = Q/P$ の 1 位の極である。

(ii) 0 は P の 1 位の零点であるから、$\exists P_1$ s.t. P_1 は 0 のある近傍 ($\mathbb{C}$ で OK) で正則で、$P(z) = zP_1(z)$, $P_1(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$. 同様に 0 は Q の 1 位以上の零点であるから、$\exists Q_1$ s.t. Q_1 は 0 の近傍 ($\mathbb{C}$ で OK) で正則で、$Q(z) = zQ_1(z)$. このとき、0 のある除外近傍 $(0 < |z| < 1)$ で
$$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{zQ_1(z)}{zP_1(z)} = \frac{Q_1(z)}{P_1(z)}.$$
この右辺は $|z| < 1$ で正則であるから、0 は f の除去可能特異点である。ゆえに 0 は f の極ではない。■

10.5 孤立特異点の lim による特徴付け, Riemann の除去可能特異点定理, Casorati-Weierstrass の定理

命題 10.30 (除去可能特異点の性質) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ であり、c は f の除去可能特異点であるとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} f(z)$ は有限確定である (有限の極限が存在する)。

(2) $\exists R \in (0, \infty]$, $\exists \widetilde{f}\colon D(c;R) \to \mathbb{C}$ 正則 s.t.
$$f(z) = \widetilde{f}(z) \quad (0 < |z-c| < R).$$
すなわち、f は c までこめて正則に拡張できる。

証明　c が f の孤立特異点であることから、$\exists R > 0$ s.t. f は $0 < |z-c| < R$ で正則である。ゆえに $\exists \{a_n\}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R).$$

c が f の除去可能特異点であるという仮定から、

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{-n} = 0.$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

右辺の級数は $z = c$ でも収束する (値は a_0) ことに注意して、

$$\widetilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (|z-c| < R)$$

とおくと、$\widetilde{f}\colon D(c;R) \to \mathbb{C}$ は (収束冪級数なので) 正則であり、特に $z = c$ で連続であるから、

$$\lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} f(z) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(c) = a_0. \blacksquare$$

注意 10.1 c が f の除去可能特異点であるとき、特に断りなく、f を $D(c;R)$ 上の正則な関数 $\widetilde{f}$ に置き換えて議論することが多い。この $\widetilde{f}$ は、

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & (0 < |z-c| < R) \\ \displaystyle\lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} f(z) & (z = c) \end{cases}$$

と特徴づけることも出来る。 $\blacksquare$

命題 10.31 (極の性質) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ であり、c が f の極であれば、$\displaystyle\lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} f(z) = \infty$.

証明　c が f の孤立特異点であるから、$\exists R > 0$, $\exists \{a_n\}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R).$$

極の位数を k とすると、$a_{-k} \neq 0$ かつ ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n > k$) $a_{-n} = 0$ であるから、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R).$$

前命題と同様に

$$\lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = a_0.$$

$\zeta = \dfrac{1}{z-c}$ とおくと、$z \neq c$, $z \to c$ のとき $\zeta \to \infty$ で、

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} = \sum_{n=1}^{k} a_{-n} \zeta^n.$$

補題 9.19 により、

$$\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_{-n}\zeta^n = \infty.$$

ゆえに

$$\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z) = a_0 + \infty = \infty.\blacksquare$$

補題 10.32 (Riemann の除去可能特異点定理) c は f の孤立特異点とする。ある正数 ε が存在して、$\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<\varepsilon\}$ で f が有界であれば、c は f の除去可能特異点である。特に $\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が有限確定であれば、c は f の除去可能特異点である。

証明 (Liouville の定理 (定理 9.18) の証明と見比べてみると面白い。) f が有界という仮定から、$\exists M\in\mathbb{R}$ s.t. $|f(z)|\le M$ $(0<|z-c|<\varepsilon)$.

f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であることから、$\exists\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(0<|z-c|<\varepsilon).$$

任意の $n\in\mathbb{Z}$, $0<r<\varepsilon$ を満たす任意の r に対して

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-c|=r}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\right||d\zeta|\le\frac{M}{2\pi r^{n+1}}\int_{|\zeta-c|=r}|d\zeta|=\frac{M}{2\pi r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{M}{r^n}.$$

特に、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$|a_{-n}|\le\frac{M}{r^{-n}}=Mr^n\quad(0<r<\varepsilon).$$

$r\downarrow 0$ とすることで $a_{-n}=0$ $(n\in\mathbb{N})$. ゆえに f の c におけるローラン展開の主部は 0 であるので、c は f の除去可能特異点である。 $\blacksquare$

別証 (不等式は嫌いだという人向け[88]) f が $A(c;0,R)$ で正則であるとする。

$$g(z):=\begin{cases}(z-c)^2f(z) & (0<|z-c|<R)\\ 0 & (z=c)\end{cases}$$

とおく。g は明らかに $0<|z-c|<R$ で正則であるが、

$$g'(c)=\lim_{z\to c}\frac{g(z)-g(c)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{(z-c)^2f(z)-0}{z-c}=\lim_{z\to c}(z-c)f(z)=0$$

であるから (ここで f が有界であることを用いた)、g は c でも微分可能で、結局 $|z-c|<R$ で正則である。ゆえにその範囲で収束する冪級数に展開できる:

$$\exists\{a_n\}_{n\ge 0}\quad\text{s.t.}\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

[88] どうもそういう人がいるみたい。個人的には、Riemann の定理の不等式を用いた証明は、Liouville の定理の Cauchy 評価を用いた証明と同じで、面白いと感じるのだけれど、そうでない人もいるらしい。この別証にも、違った面白さは感じられるけれど…

$g(c)=0,\ g'(c)=0$ であるから、$a_0=a_1=0$. ゆえに

$$g(z)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z-c)^{n-2}=(z-c)^2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

これから

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(z-c)^n\quad(0<|z-c|<R).$$

ゆえに c は f の除去可能特異点である。■

命題 10.33 (Casorati-Weierstrass, 真性特異点の性質) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}$ であり、c は f の孤立真性特異点とするとき、

$$(\forall\beta\in\mathbb{C})(\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}})\left((\forall n\in\mathbb{N})\ z_n\neq c\wedge\lim_{n\to\infty}z_n=c\wedge\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\beta\right).$$

(結局 $\beta=\infty$ でも良いことになる。)

この定理の証明は省略してある本が多いが、以下に見るようにそれほど長い証明は必要ない。

証明　f は $0<|z-c|<R$ で正則とする。$\forall\beta\in\mathbb{C}$ に対して次が成り立つ[89]。

主張

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\forall r\in(0,R))\ (\exists z\in A(c;0,r))\ |f(z)-\beta|<\varepsilon.$$

もしこれが証明できれば、$n=1,2,\cdots$ に対して、$\varepsilon=r=\dfrac{1}{n}$ として用いて、$\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.t.

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<|z_n-c|<\frac{1}{n}\quad\wedge\quad|f(z_n)-\beta|<\frac{1}{n}.$$

これから

$$\lim_{n\to\infty}z_n=c,\quad\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\beta.$$

以下、上の主張を背理法[90]を用いて証明する。そのため成り立たないと仮定すると、

$$(\exists\varepsilon>0)(\exists r>0)(\forall z\in A(c;0,r))\quad|f(z)-\beta|\geq\varepsilon.$$

このとき、

$$g(z):=\frac{1}{f(z)-\beta}\quad(z\in A(c;0,r))$$

とおくと (分母が 0 にならないことに注意)、g は除外近傍 $A(c;0,r)$ で正則である。ゆえに c は g の孤立特異点であるが、

$$|g(z)|\leq\frac{1}{\varepsilon}\quad(z\in A(c;0,r))$$

という評価が成り立つので、Riemann の定理 (補題 10.32) によって、c は除去可能な特異点である。すなわち g は $B(c;r)$ で正則な関数に拡張できる。定義から $g(z)\neq0$ $(z\in A(c;0,r))$ である。

$$f(z)=\beta+\frac{1}{g(z)}=\frac{\beta g(z)+1}{g(z)}$$

[89] この主張は、定理の結論と同値と言って良い。つまり、ε-δ で書き換えたものである。
[90] 背理法 (proof by contradiction, reductio ad absurdum)

であるから、c は f の除去可能特異点または極である (c が g の零点でなければ c は f の除去可能特異点, c が g の k 位の零点であれば、c は f の k 位の極)。これは c が f の孤立真性特異点であるという仮定に反する。■

定理 10.34 (孤立特異点の lim **による特徴づけ)** c が f の孤立特異点であるとき、以下の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) c が f の除去可能特異点であるためには、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が有限確定であることが必要十分である。

(2) c が f の極であるためには、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)=\infty$ であることが必要十分である。

(3) c が f の孤立真性特異点であるためには、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)$ が有限確定でもなく、$\displaystyle\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} f(z)=\infty$ でもないことが必要十分である。

証明　必要性は上で示した 3 つの命題 (除去可能特異点の性質、極の性質、真性特異点の性質) で分かる。分類になっていることから、十分性は明らか。■

例 10.35 $f(z):=\exp\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)$ について、0 は f の孤立真性特異点である。一般論から $z\to 0$ のときの $f(z)$ の極限は存在しないが、実際

$$\lim_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ x\to 0}} f(x)=0,$$

$$\lim_{\substack{y\in\mathbb{R}\\ y\to 0}} f(iy)=\infty$$

のように近づけ方によって、0 に収束したり、∞ に近付いたりする。■

実は、Casorati-Weierstrass の定理よりももっと強く、次の定理が成り立つことが知られている。しかし定理 10.34 を得るためには、Casorati-Weierstrass の定理で十分なので、次の定理の証明は省略する (例えば Ahlfors [27] にある)。

命題 10.36 (Picard の大定理) c は f の孤立真性特異点とするとき、$\exists e\in\mathbb{C}$, ($\forall U$: c の除外近傍)、$\forall v\in\mathbb{C}\setminus\{e\}$, $\exists z\in U$ s.t. $f(z)=v$. — 高々一つの除外値を除き、c の任意の除外近傍において、その値を取る。

この Picard の定理については、一松 [41] に色々お話が書いてある。

10.6 おまけ: Laurent 級数の収束範囲

定義 10.37 (Laurent 級数) $c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ を用いて、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

と表される関数項級数を、c を中心とする **Laurent**（ローラン） **級数**と呼ぶ。
2 つの級数がともに収束するとき、その Laurent 級数は収束し、その和は 2 つの級数の和であると定義する。2 つの級数の少なくとも一方が発散するときは、その Laurent 級数は発散する、と定義する。

(参考まで)

円の外部領域で正則で、$z \to \infty$ のとき有界な関数は、“負冪級数” に展開可能である。すなわち、$c \in \mathbb{C}$, $0 \leq R < \infty$, 関数 f が $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z-c|\}$ で正則ならば、$\exists \{a_n\}_{n\leq 0}$ s.t.

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z-c} + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (R < |z-c|).$$

それぞれの和が収束するための条件を考えると、ある円環領域で収束し、その外部では発散することが分かる。

定理 10.38 (Laurent 級数の収束範囲, “収束円環” の存在) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ について、次の 3 つのうちのいずれか一つが成り立つ。

(i) $0 \leq \exists R_1 < \exists R_2 \leq \infty$ s.t. 円環領域 $A(c; R_1, R_2)$ で収束し、その外部では発散する。$R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c; r_1, r_2)$ で一様に絶対収束する。

(ii) $0 \leq \exists R < \infty$ s.t. 円周 $|z-c| = R$ の空でない部分集合上で収束し、その補集合では発散する。

(iii) $\mathbb{C}$ 上いたるところで発散する。

(i) の場合の R_1 と R_2, (ii) の場合の R は一意的に定まる。

証明 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ については、ある $R_2 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ が存在して、$|z-c| < R_2$ で収束し、$|z-c| > R_2$ では発散する。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ については、ある $R_1 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ が存在して、$|z-c| < R_1$ で発散し、$|z-c| > R_1$ では収束する。

$R_1 < R_2$ であれば、Laurent 級数は $A(c; R_1, R_2)$ で収束し、その外部 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < R_1 \text{ or } |z-c| > R_2\}$ で発散する。

$R_1 = R_2$ であれば、Laurent 級数は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \neq R_2\}$ で発散する。$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = R_2\}$ の部分集合上では収束する可能性があるが、部分集合が空集合ということもありうる。

$R_1 > R_2$ であれば、Laurent 級数は $\mathbb{C}$ 上のいたるところで発散する。 ■

問 79. 上の定理の (i) の場合に、R_1, R_2 を a_n を用いて表わせ。

10.7 Laurent 展開と関数の偶奇性

(これも時間の埋め草？常識的なことだけれど、案外書いてある本を目にしないように思う。係数の一意性を強調するための話のタネに適当な話題と考える。)

以下に述べることは手短に

「奇関数の Laurent 展開は奇数次の項だけからなる。偶関数の Laurent 展開は偶数次の項だけからなり特に留数は 0 である。」

とまとめて、大きな誤解は生じないであろう。これと同様のことは、冪級数展開 (Taylor 展開) についても成立する。

原点について対称な集合 Ω を定義域を持つ関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ があるとする。f が奇関数であるとは、

$$f(-z) = -f(z) \quad (z \in \Omega)$$

が成り立つことをいう。また f が偶関数であるとは、

$$f(-z) = f(z) \quad (z \in \Omega)$$

が成り立つことをいう。

Ω が $\mathbb{C}$ の円環領域 $A(0; R_1, R_2)$ であり、f が正則である場合、ある $\{a_n\}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in A(0; R_1, R_2)).$$

f が奇関数であれば

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = f(z) = -f(-z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-z)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n z^n \quad (z \in A(0; R_1, R_2)).\end{aligned}$$

Laurent 展開の係数の一意性から

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad a_n = (-1)^{n+1} a_n.$$

これから n が偶数ならば $a_n = -a_n$ であるから $a_n = 0$, すなわち f の Laurent 展開は奇数次の項だけからなる。

反対に f が偶関数であれば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = f(z) = f(-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-z)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n z^n \quad (z \in A(0; R_1, R_2)).$$

Laurent 展開の係数の一意性から

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad a_n = (-1)^n a_n.$$

これから n が奇数ならば $a_n = -a_n$ であるから $a_n = 0$. すなわち f の Laurent 展開は偶数次の項だけからなる。特に f の 0 における留数は 0 である:

$$\mathrm{Res}(f; 0) = a_{-1} = 0.$$

以上の結果を一般化しよう。$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ として、f は $\Omega = A(c; R_1, R_2)$ で正則な関数とする。このとき、

- f が c に関して奇関数 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall z \in \mathbb{C}\colon\ R_1 < |z| < R_2)\ f(c+z) = -f(c-z)$.
- f が c に関して偶関数 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall z \in \mathbb{C}\colon\ R_1 < |z| < R_2)\ f(c+z) = f(c-z)$.

と定める。

ある $\{a_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (z \in A(c; R_1, R_2))$$

が成り立つ。

f が c について奇関数であれば

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (c+z-c)^n = f(c+z) = -f(c-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n ((c-z)-c)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n z^n \quad (z \in A(0; R_1, R_2)).\end{aligned}$$

Laurent 展開の係数の一意性から

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad a_n = (-1)^{n+1} a_n.$$

これから n が偶数ならば $a_n = -a_n$ であるから $a_n = 0$. すなわち f の Laurent 展開は奇数次の項だけからなる。

同様に、f が c について偶関数であれば

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad a_n = (-1)^n a_n.$$

これから n が奇数ならば $a_n = -a_n$ であるから $a_n = 0$. すなわち f の Laurent 展開は偶数次の項だけからなる。特に f の c における留数は 0 である:

$$\mathrm{Res}(f; c) = a_{-1} = 0.$$

11 留数定理 (residue theorem)

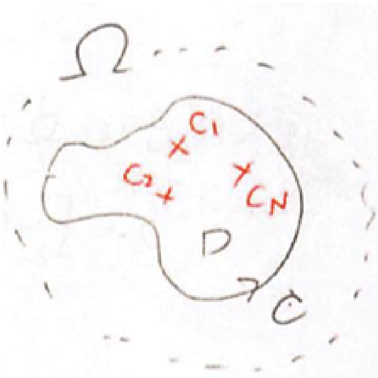
11.1 留数定理

応用上重要な「留数定理」は非常に有名であるが、実は色々なバージョンがある。次に紹介するのは、実際に使う場合に十分便利で、証明も分かりやすい (と私が信じているものである)。

定理 11.1 (留数定理 (the residue theorem)) D は $\mathbb{C}$ の有界領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域とみなしたとき Green の定理が成立するとする (例えば、区分的に C^1 級の関数のグラフで挟まれた縦線領域、または ∂D は有限個の区分的 C^1 級正則単純閉曲線からなる)。$C := \partial D$ (進行方向の左手に D を見る向き) とおく。Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$\overline{D} \subset \Omega$ を満たす。$\{c_j\}_{j=1}^N$ は D 内の相異なる点で、$f\colon \Omega \setminus \{c_1, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f; c_j)$$

が成り立つ。



この定理をマスターすると、関数論はとても見通しが良くなる。これまで出て来た積分の計算のうち、閉曲線に沿うものは、大抵これで分かる。例えば Cauchy の積分公式を導くための重要な積分

$$|a-c|<r \quad\Rightarrow\quad \int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z-a};a\right)=2\pi i. \tag{70}$$

また、Cauchy の積分公式も

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z-a};a\right)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{z-a}=\lim_{z\to a}f(z)=f(a). \tag{71}$$

もちろん、本講義において、これらの等式の**証明に留数定理を用いるのは、循環論法になってしまい反則**であるが、分かりやすいであろう。

Cauchy の積分公式を理解するための練習として、宿題に出題したことのある問題 (a) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z+2)^2}$ (b) $\displaystyle\int_{|z+3|=2}\frac{dz}{z(z+4)}$ などは、留数定理を使うと簡単に解ける (答えはそれぞれ $\frac{\pi i}{2}$, $-\frac{\pi i}{2}$)。

さらに Cauchy の積分公式では解けなかった $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)^2}$ なども計算できるようになる。

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2(z+2)^2}&=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2(z+2)^2};0\right)=2\pi i\lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right)'=2\pi i\left.\frac{-2}{(z+2)^3}\right|_{z=0}\\&=2\pi i\cdot\frac{-2}{2^3}=-\frac{\pi i}{2}.\end{aligned}$$

例 11.2 (Goursat の公式を留数定理で導く) Goursat の公式: $n\in\mathbb{N}$ とするとき

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=f^{(n)}(a).$$

実際 (Goursat の公式を留数定理を使って証明してみよう)

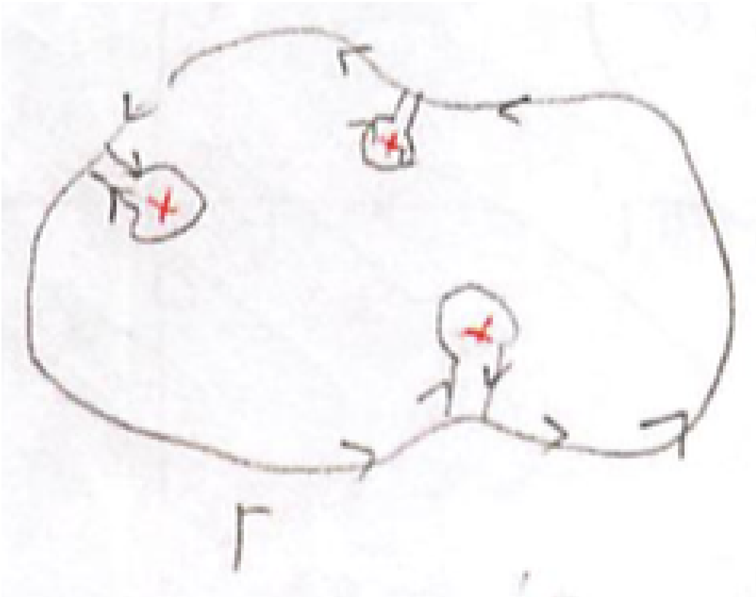
$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{n!}{2\pi i}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}};a\right)\\&=n!\cdot\frac{1}{n!}\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left[(z-a)^{n+1}\cdot\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right]\\&=\lim_{z\to a}f^{(n)}(z)=f^{(n)}(a).\blacksquare\end{aligned}$$

留数定理には、色々な証明がある。

多くの本に次のような議論による証明が載っている。

各 c_j のまわりに円弧を描いて、c_j のまわりを回らない積分路 Γ を作り、それについて Cauchy の積分定理 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz=0$ を適用する。

Γ を次のような曲線とする。



Γ の内部に×はないので

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=0.$$

Γ の各パートに沿う積分に分解する:

$$\int_C f(z)\,dz-\int_{\text{往復通路}} f(z)\,dz-\sum_{j=1}^N\int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz=0.$$

往復するとキャンセルするので

$$\int_C f(z)\,dz-\sum_{j=1}^N\int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz=0.$$

これから

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{j=1}^N\int_{|z-c_j|=\varepsilon} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^N \operatorname{Res}(f;c_j).$$

(最後の等号は Laurent 展開の係数についての公式で、$n=-1$ の場合を用いた。)

この証明は割とわかりやすいが、N が大きくなってもこの証明は通用するだろうか？どうすれば帰納法に乗せられるだろう。一般の場合にその証明をきちんと書くのは、案外難しい(筆者は 2,3 日考えたがギブアップすることになった)。

以下ではこれとは違うやり方で証明する。

証明　十分小さい正の数 ε を取ると、任意の j に対して $\overline{D}(c_j;2\varepsilon)\subset\Omega$ かつ $D(c_j;2\varepsilon)$ 内に c_k $(k\neq j)$ は含まれない。

f は $0<|z-c_j|<\varepsilon$ で正則であるから、c_j の周りで Laurent 展開できる:

$$(\exists\{a_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n^{(j)}(z-c_j)^n+\sum_{n=1}^\infty\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad(0<|z-c_j|<\varepsilon).$$

この主部を f_j とおく:

$$f_j(z):=\sum_{n=1}^\infty\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}\quad(j=1,2,\cdots,N).$$

これは $\mathbb{C}\setminus\{c_j\}$ で正則である。

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{N} f_j(z) \quad (z \in \Omega\setminus\{c_1,\dots,c_N\})$$

とおくと g は正則である。さらに任意の j に対して、c_j は g の除去可能特異点である。実際、任意の j に対して

$$\begin{aligned} g(z) &= (f(z) - f_j(z)) - \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}(z-c_j)^n - \sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z) \end{aligned}$$

で右辺第1項は $D(c_j;\varepsilon)$ で収束する冪級数であり、$\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne j}} f_k(z)$ は$\mathbb{C}\setminus\{c_1,\cdots,c_{j-1},c_{j+1},\cdots,c_N\}$ で正則である。

ゆえに g は Ω で正則として良い。Green の定理に基づく Cauchy の積分定理より

$$0 = \int_C g(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N}\int_C f_j(z)\,dz,$$

$$(\forall j\in\{1,\cdots,N\}) \quad \int_C f_j(z)\,dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C \frac{a_{-n}^{(j)}}{(z-c_j)^n}dz = a_{-1}^{(j)}\int_C\frac{dz}{z-c_j}.$$

($n\ne -1$ のとき、$\dfrac{1}{(z-c_j)^n}$ は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0 である。)

ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} a_{-1}^{(j)}\int_C\frac{dz}{z-c_j} = \sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;c_j)\int_C\frac{dz}{z-c_j}.$$

各 j につき、$\displaystyle\int_C\frac{dz}{z-c_j}$ の積分路 C を、$|z-c_j|=\varepsilon$ で置き換えられるのを認めれば、値は $2\pi i$ であるから、

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;c_j).\blacksquare$$

余談 11.3 (留数定理の一般化) 区分的 C^1 級閉曲線 C の像が、何かある領域 D の境界と一致し、C の向きが正の向きである、という条件が成り立たない場合にも拡張される。

閉曲線あるいは閉曲線鎖 C と、$a\in\mathbb{C}\setminus C^*$ に対して、線積分

$$n(C;a) := \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{z-a}$$

は、C に関する a の指数 (the index of a with respect to C)、あるいは a の周りの C の**回転数** (the winding number of C around a) と呼ばれる。これは直観的には、C が a の周りを何回廻っているかを表す数で、実際、必ず整数であることが知られている。

C が、開集合 Ω に関して 0 **にホモローグ** (homologous to zero) とは、

$$(\forall a\in\mathbb{C}\setminus\Omega)\quad n(C;a)=0$$

が成り立つことをいう (補集合の任意の点を回らない — C は (ある意味で) 補集合の点を囲んでいない)。

Cauchy の積分定理　$\mathbb{C}$ の開集合 Ω 内の区分的 C^1 級のサイクル C が、Ω について 0 にホモローグ (Ω の補集合の元を回らない) とするとき、正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$.

一般化された留数定理　Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$c_1, \cdots, c_N$ は Ω 内の相異なる点、$f\colon \Omega\setminus\{c_1, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則、C は Ω 内のサイクルで、Ω に関して 0 にホモローグで、どの c_j も通らないとすると、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^N n(C, c_j)\,\mathrm{Res}\,(f; c_j)\,.$$

(次は整理途上の置き荷物。)

余談 11.4 (留数定理の証明の仕方) 上の証明で、f の Laurent 展開の主部を除いた関数 g を考えるというアイディアは、田村 [42] から学んだ。

定理 8.4 を認めると、

$$D' := D \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{D}(c_j; \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0 \text{ は十分小さい})$$

について適用することで、容易に証明することが出来るが、証明が面倒な定理 8.4 を用いることは避けたかった。

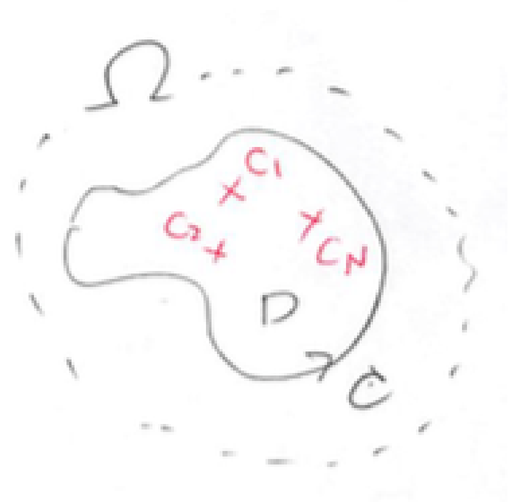


図 21: 特異点 c_j を迂回する積分路 Γ を作る

11.2 留数の計算の仕方

11.2.1 Laurent 展開が求まるならば

Laurent 展開が求まるのならば、定義によって留数は簡単に求められる ($\{a_n\}$ の中から a_{-1} を取り出すだけ)。

例 11.5 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$ とする。この定義式そのものが f の 0 における Laurent 展開となっていて ($a_{-1} = 1$, $a_n = 0$ $(n \neq 0)$ とすると、$f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ $(0 < |z| < \infty)$)、$\mathrm{Res}(f; 0) = 1$. ■

例 11.6 $f(z) := \exp\dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$ とする。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots$$

ゆえに $\operatorname{Res}(f;0) = 1$. $\operatorname{Res}(zf(z);0) = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Res}(z^2 f(z);0) = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$. ■

f が $0 < |z-c| < R$ で正則であるならば、定理 4.16 (円環領域で正則な関数の Laurent 展開) によって

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z},\ 0 < r < R)$$

であるから、

$$(\heartsuit)\qquad \operatorname{Res}(f;c) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - c| = r} f(\zeta)d\zeta \quad (0 < r < R).$$

何で -1 番目の a_{-1} が大事かというと、-1 番目が $(f(\zeta)/(\zeta-c)^{n+1}$ とかでなくて) f 自身の積分に係わるからである。そうなる理由は

$$\int_{|z-c|=R}(z-c)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}) \end{cases}$$

にある。

f の正則点 (その点の近傍で f が正則であるような点のこと)、除去可能特異点における留数は 0 である。そこで極や真性特異点での留数が問題になる。

例 11.7 $\operatorname{Res}(f;c) = a_{-1}$ とするとき、$\operatorname{Res}(3f(z) + \cos z; c)$ を求めよ。
(解答) $f \mapsto \operatorname{Res}(f;c)$ は線型である。すなわち一般に

$$\operatorname{Res}(f+g;c) = \operatorname{Res}(f;c) + \operatorname{Res}(g;c),$$
$$\operatorname{Res}(\lambda f;c) = \lambda\operatorname{Res}(f;c) \quad (\text{ただし } \lambda \in \mathbb{C})$$

が成り立つ (なぜか自分で考えて確認しよう)。ゆえに

$$\operatorname{Res}(3f(z) + \cos z; c) = 3\operatorname{Res}(f;c) + \operatorname{Res}(\cos z;c) = 3a_{-1} + 0 = 3a_{-1}.$$

ここで φ が c の近傍で正則ならば $\operatorname{Res}(\varphi;c) = 0$ であることを用いた。 ■

余談 11.8 (数式処理系 Mathematica の利用) 関数 f の孤立特異点 c の周りの Laurent 展開の、一般項 (第 n 項とする) の係数を求めるには、`SeriesCoefficient[`f`[z],{z,`c`,n}]` とする。例えば

```
SeriesCoefficient[z/(Exp[z] - 1), {z, 0, n}]
```

とすると、$\mathtt{n} \geq 0$ のとき $\dfrac{\mathtt{BernoulliB[n]}}{\mathtt{n!}}$, そうでないとき 0 となる。

一方、具体的な n の値に対して、関数 f の c の周りの n 次の項までの Laurent 展開を求めるには、`Series[`f`[z],{z,`c`,`n`}]` とすれば良い。`Series[1/(z Sin[z]]),{z,0,10}]` とすると

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{7z^2}{360} + \frac{31z^4}{15120} + \frac{127z^6}{604800} + \frac{73z^8}{3421440} + \frac{1414477}{653837184000}z^{10} + O(z^{11})$$

という結果を得る。 ■

しかし、Laurent 展開を求めることはしばしば難しい。Laurent 展開をしないで、留数を求められる場合も多く、その方法をマスターすることが重要になる。

例 11.9 定積分計算のところで

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta$$

を求めよ、という問題が出て来るが、そのためには

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{n+1}}; 0\right)$$

がわかれば良いことになる。二項定理より

$$\left(z^2+1\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2k}$$

であるから

$$\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{n+1}} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2k-n-1} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

$k = n$ のときの項は $\frac{\binom{2n}{n}}{z}$ であり、これから

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{n+1}}; 0\right) = \binom{2n}{n}.\blacksquare$$

11.2.2 極における留数の求め方

この項では、c が f の極である場合に、$\mathrm{Res}(f;c)$ を求める方法を説明する。

次の定理は、後で紹介する命題 11.15 に含まれてしまうので、論理的には不要であるが、分かりやすく、覚えやすいので、独立した形で示すことにする。

命題 11.10 c が f の高々 1 位の極ならば、

(72)
$$\mathrm{Res}(f;c) = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} (z-c)f(z).$$

(c が f の高々 1 位の極というのは、c が f の 1 位の極か、または f の除去可能特異点であることをいう。)

証明 c が f の高々 1 位の極であれば、$\exists R > 0$, $\exists\{a_n\}_{n=-1}^{\infty}$ s.t.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \frac{a_{-1}}{z-c} \quad (0 < |z-c| < R).$$

(c が f の 1 位の極であれば $a_{-1} \neq 0$. c が f の除去可能特異点であれば、$a_{-1} = 0$.)

$(z-c)$ をかけると

$$(z-c)f(z) = a_{-1} + a_0(z-c) + a_1(z-c)^2 + \cdots \quad (0 < |z-c| < R).$$

ゆえに

$$\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}} (z-c)f(z) = a_{-1} = \mathrm{Res}(f;c).\blacksquare$$

例 11.11 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ とするとき、$\mathrm{Res}(f;i)$ を求めよう。$f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ であるから、i は f の 1 位の極である。ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;i) = \lim_{\substack{z\neq i\\ z\to i}}(z-i)f(z) = \lim_{\substack{z\neq i\\ z\to i}}\frac{1}{z+i} = \left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}. \blacksquare$$

実際に計算するには、(命題 11.10 の系である) 次の形の公式が便利である場合が多い。

命題 11.12 $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、c は $P(z)$ の 1 位の零点ならば ($P(c)=0$ かつ $P'(c)\neq 0$ ということ)、c は f の高々 1 位の極であり

$$\mathrm{Res}(f;c) = \frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{73}$$

証明 c が P の 1 位の零点であるから、$\exists g$ s.t. g は c の近傍で正則かつ $P(z)=(z-c)g(z)$, $g(c)\neq 0$. このとき、

$$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{Q(z)}{(z-c)g(z)} = \frac{h(z)}{z-c}, \quad h(z) := \frac{Q(z)}{g(z)}.$$

h は c の近傍で正則であるから、c は f の高々 1 位の極である (もしも $Q(c)\neq 0$ であれば 1 位の極であり、$Q(c)=0$ であれば除去可能特異点である)。命題 11.10 によって、

$$\mathrm{Res}(f;c) = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}(z-c)f(z) = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{(z-c)Q(z)}{P(z)} = \lim_{z\to c}\frac{Q(z)}{\dfrac{P(z)-P(c)}{z-c}} = \frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{74}$$

ただし $P(c)=0$ を用いた。 $\blacksquare$

例 11.13 $f(z) = \dfrac{1}{z^4-1}$ とするとき、$\mathrm{Res}(f;i)$ を求めよ。

(解) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)(z+i)(z-i)}$ であり、i は分母の 1 位の零点である。ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;i) = \left.\frac{1}{(z^4-1)'}\right|_{z=i} = \frac{1}{4i^3} = \frac{i}{4i^4} = \frac{i}{4}. \blacksquare$$

例 11.14 $n\in\mathbb{N}$, $f(z) = \dfrac{1}{z^n-1}$. 極は $z=\omega^k$ ($\omega := \exp\dfrac{2\pi i}{n}$, $k=0,1,\cdots,n-1$) で、すべて分母 z^n-1 の 1 位の零点である。ゆえに ($\left(\omega^k\right)^n = 1$ に注意して)

$$\mathrm{Res}(f;\omega^k) = \left.\frac{1}{(z^n-1)'}\right|_{z=\omega^k} = \left.\frac{z}{nz^n}\right|_{z=\omega^k} = \frac{\omega^k}{n}. \blacksquare$$

f の Taylor 展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ で $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ であることを導くのと同様の方法で、次の定理が得られる。

命題 11.15 c が f の高々 k 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f;c) = \lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

証明　c が f の高々 k 位の極であることから、$\exists R>0$, $\exists\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ s.t.

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-c)^k}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+a_0+a_1(z-c)+\cdots\quad(0<|z-c|<R).$$

分母を払って

$$(z-c)^k f(z)=a_{-k}+a_{-(k-1)}(z-c)+\cdots+a_{-1}(z-c)^{k-1}+a_0(z-c)^k+a_1(z-c)^{k+1}+\cdots$$

a_{-1} が定数項の係数に現れるまで、つまり $k-1$ 回微分すると、

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]=(k-1)!a_{-1}+\frac{k!}{1!}a_0(z-c)+\frac{(k+1)!}{2!}a_1(z-c)^2+\cdots.$$

$z\to c$ としてから両辺を $(k-1)!$ で割れば良い。 ■

この証明を見ると、命題 11.10 は、この命題の特別の場合であることが分かる。

例 11.16

$$f(z)=\frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$$

とするとき、3 は f の 2 位の極であるから、

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;3)&=\lim_{\substack{z\neq 3\\ z\to 3}}\frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-3)^2 f(z)\right]=\lim_{\substack{z\neq 3\\ z\to 3}}\left(\frac{z}{z+1}\right)'=\lim_{\substack{z\neq 3\\ z\to 3}}\frac{(z+1)\cdot 1-1\cdot z}{(z+1)^2}\\&=\lim_{\substack{z\neq 3\\ z\to 3}}\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{(3+1)^2}=\frac{1}{16}.\blacksquare\end{aligned}$$

例 11.17 (ちょっと面倒なものを色々やってみる) $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$ とするとき、$\operatorname{Res}(f;0)$ を求めよう。

$z=0$ は 2 位の極で、0 での Laurent 展開は、例えば冪級数の逆数の求め方 (付録 D) を適用して

$$f(z)=\frac{1}{z^2-\frac{1}{3!}z^4+\frac{1}{5!}z^5-\cdots}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6}+\frac{7z^2}{360}+\cdots\quad(0<|z|<\pi/2).$$

ゆえに $\operatorname{Res}(f;0)=0$.

あるいは命題 11.15 を適用して

$$\operatorname{Res}(f;0)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}.$$

この分子については、

$$\sin z-z\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)(-1)^k z^{2k+1}=\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{30}+\cdots\quad(z\in\mathbb{C})$$

であるから、0 は分子の 3 位の零点である。一方、0 は分母 $\sin^2 z$ の 2 位の零点であるから

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}=0.$$

Laurent 展開をどうやって求めるか、極限をどう計算するか、どちらもちょっと考えてしまうが、実は f は偶関数だから、Laurent 展開に -1 次の項はなく、留数が 0 であることは明らかである。 ■

問 80. f は $0<|z|<\rho$ で正則で、

$$f(-z)=f(z)\quad(0<|z|<\rho)$$

を満たすとするとき、$\operatorname{Res}(f;0)=0$ であることを示せ。

例 11.18 (極の位数ぴったりの k がいいかどうか) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\tan z}{z^4};0\right)$ を求めよ。

(解答) 0 は tan の 1 位の零点であるから、0 は $\dfrac{\tan z}{z^4}$ の 3 位の極である。ゆえに

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[z^3\frac{\tan z}{z^4}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\left(\frac{\tan z}{z}\right)''$$

が成り立つが、0 は $\dfrac{\tan z}{z^4}$ の高々 4 位の極であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{4-1}\left[z^4\frac{\tan z}{z^4}\right]=\frac{1}{3!}\left.(\tan z)'''\right|_{z=0}\tag{75}$$

も成り立つ。どちらで計算しても良いが、後者の方が分かりやすいかもしれない。

これはある年度の期末試験の問題にしたのだが、作題した側としては、次のような Laurent 展開を数項求める解答案を用意していたところ学生の答案は、0 は $\dfrac{\tan z}{z^4}$ の 4 位の極だから、(75) が成り立つ、というのが多かった。「4 位の極」は間違いだが、「高々 4 位の極」であるから (75) は成り立ち、こちらの方が計算簡単だな、となった。

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,\quad f^{(4)}(0)=0,\quad f^5(0)=16$$

より

$$\tan z=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\cdots\quad(|z|<\pi/2).$$

ゆえに

$$\frac{\tan z}{z^4}=\frac{1}{3z}+\frac{2}{15}z+\cdots\quad(0<|z|<\pi/2)$$

であるから $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\tan z}{z^4};0\right)=\dfrac{1}{3}$. これは確かに $\dfrac{1}{3!}f^{(3)}(0)$ に等しい ((75) に納得)。■

命題 11.19 c は f の高々 1 位の極であり、φ は c の近傍で正則とする。このとき c は $f\varphi$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res}(f\varphi;c)=\operatorname{Res}(f;c)\,\varphi(c).$$

証明 c が f の高々 1 位の極であることから、c の近傍で正則な関数 g が存在して、$f(z)=\dfrac{g(z)}{z-c}$ が成り立つ。$f(z)\varphi(z)=\dfrac{g(z)\varphi(z)}{z-c}$ であり、分子 $g(z)\varphi(z)$ は $z=c$ の近傍で正則であるから、$g\varphi$ は c を高々 1 位の極とする。ゆえに命題 11.10 によって

$$\operatorname{Res}(f\varphi;c)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z)\varphi(z)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z)\cdot\lim_{z\to c}\varphi(z)=\operatorname{Res}(f;c)\varphi(c).■$$

例 11.20 (工事中) $f(z)=\pi\cot\pi z$ の極と留数をすべて求めよ。

(方法 1) (命題 11.12 を用いる) $P(z):=\sin\pi z$, $Q(z):=\pi\cos\pi z$ とおくと、$f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$. 比較

的容易に $P(z)=0 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}$ s.t. $z=n$. $P'(z)=Q(z)$ である。$Q(n)=P'(n)=\pi\cos n\pi=\pi(-1)^n\neq 0$. ゆえに n は f の 1 位の極である。そして、

$$\mathrm{Res}(f;n)=\frac{Q(n)}{P'(n)}=1.$$

(方法 2: 教科書 p. 88 — そのうち取り込む) ■

例 11.21 (教科書 pp. 88–89) $f(z)=\dfrac{1}{8z^2-2z-1}$

余談 11.22 (c が極の場合に、留数 $\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}$ だけでなく、a_n を求める) c が f の高々 k 位の極であれば、

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-c)^k}+\frac{a_{-(k-1)}}{(z-c)^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (0<|z-c|<R)$$

と書けるが、(a_{-1} だけでなく) a_n を求める公式も得られる。

$$a_n=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+k}\left[(z-c)^k f(z)\right]. \tag{76}$$

実際、

$$\begin{aligned}(z-c)^k f(z)&=a_{-k}+a_{-(k-1)}(z-c)+a_{-(k-2)}(z-c)^2+\cdots\\ &=\sum_{n=-k}^{\infty}a_n(z-c)^{n+k}=\sum_{m=0}^{\infty}a_{m-k}(z-c)^m \quad (0<|z-c|<R)\end{aligned}$$

を $g(z)$ とおくと、$g(z)$ は ($z=c$ まで拡張できて) 実質的に正則関数であり、Taylor 展開の m 次の項の係数 a_{m-k} は

$$a_{m-k}=\frac{g^{(m)}(c)}{m!}=\lim_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\frac{1}{m!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{m}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

$m-k$ を n とおけば良い。 ■

11.2.3 締めくくり

留数を求める問題は解決したのか？ 孤立特異点には、真性特異点というのがあった、その場合は、同じように処理することはできない。ちょっと難しい。つまり、除去可能特異点と極についてだけ、ほぼ解決できた、という状況にある。

受験数学的まとめ

- c が f の除去可能特異点 or f が c の近傍で正則 (c が f の正則点) $\Longrightarrow$ $\mathrm{Res}(f;c)=0$
- c が f の高々 k 位の極 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{\substack{z\neq c\\ z\to c}}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]$.
  特別な場合として、$f=\dfrac{Q}{P}$, $P(c)=0$, $P'(c)\neq 0$ ならば、$\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{Q(c)}{P'(c)}$
  c が f の高々 1 位の極、φ が c の近傍で正則ならば、$\mathrm{Res}(f\varphi;c)=\mathrm{Res}(f;c)\varphi(c)$.
- c が f の真性特異点 $\Longrightarrow$ このようなウマイ方法はない。

数式処理系 Mathematica の利用　Mathematica では、

- `Residue[式,{ 変数, 孤立特異点 }]` で留数
- `Series[式,{ 変数, 孤立特異点, 次数 }]` でその次数までのローラン展開 (有限級数)
- `SeriesCoefficient[式,{ 変数, 孤立特異点, 次数 }]` でその次数のローラン展開の係数

が求まる。孤立特異点として `Infinity` が指定できる。なお `Apart[式]` で部分分数展開が出来る。

```
Residue[z/((z-2)(z-1)^3),{z,1}]
Series[z/((z-2)(z-1)^3),{z,1,10}]
```

12　定積分計算への留数の応用

12.1　はじめに (この問題を取り上げる意義と広義積分についての注意)

もともと Cauchy が複素関数論を考えだした動機は、定積分の計算を、なるべく統一的な方法を使って行えるようにするためだったそうである。そうして創られた理論は定積分計算という目的を超えて、大発展することになったのであるが、一方でこの節で説明するような (留数計算に基づく) 定積分の計算法は、使いこなすために関数論の堅実な理解が必要で、自己の知識に不十分なところがないかのチェックのための良い演習問題を提供してくれる。

(余談: もちろん、これは学生の理解度を計ろうとする側にとっても良い問題ということで、大学院入試のペーパーテストで結構凝った問題が出題されることがある。そういう試験を受験する場合は、事前に十分な準備をしておくこと。)

ここでは特にシンプルで代表的な場合について、なるべくていねいに説明することを目指した。

余談 12.1 (一松信先生の言葉) 私のお気に入りである一松「留数解析」[15] の「はしがき」に次のくだりがある。

> この本は数学ワンポイント双書の 1 冊として、元来は定積分の計算技術の解説のために企画された。とくに留数解析の応用という面についてである。
>
> しかしとりかかってみると、この話題は実質的に複素解析学の教科書になりかねないことがわかった。留数の定理を既知として、その使い方だけを解説しようと思っても、あまりにも多くの「常識的な」基礎知識が必要であり、しかも普通の教科書ではそれらが必ずしもきちんとおさえられていない場合が多いのである。

私は乏しい関数論の授業経験しか持っていないが、この一松先生の言葉には大いに頷ける。定積分計算にじっくり取り組むことで、幅広い関数論の知識の復習が出来る。■

ところで、以下取り上げる積分の多くが

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

の形をしていて、いわゆる広義積分である。これについて少し注意をしておく。

ここで取り上げる例では、被積分関数 f は連続であるが、積分区間が非有界であるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx, \tag{77}$$

で定義される。(すなわち、広義積分の値 I は

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists R\in\mathbb{R})(\forall R_1\in\mathbb{R}:R_1\ge R)(\forall R_2\in\mathbb{R}:R_2\ge R)\quad \left|I-\int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

を満たす数である。) 積分区間の下端と上端を独立に極限移行することが重要で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \quad (一般には正しくない式) \tag{78}$$

ではないことを理解する必要がある。

(そうでないと、本当は積分が存在しない $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ について、値が 0 という変なことをやってしまう。似た話に $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}\,dx$ がある。$\displaystyle\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{1}{x}\,dx+\int_{\varepsilon_2}^{2}\frac{1}{x}\,dx\right)$ が定義で、「積分が存在しない」が正しいが、$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{1}{x}\,dx\right)$ と計算すると、$\log 2$ という値が出る。)

一方で、ある条件が成り立つ場合は、(78) で計算しても構わない。そのための条件として、次の 2 つを是非とも覚えなくてはいけない。

(a) f が実数値で、符号が変わらない (つねに 0 以上であるか、またはつねに 0 以下)。(積分が発散するのは、$+\infty$ や $-\infty$ になるということで、それは lim として捉えることが出来る。)

(b) 広義積分が収束することがあらかじめ何らかの方法で分かった場合。代表的なのは、広義積分が絶対収束する、すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$$

が成り立つ場合である。

次項 12.2 で取り上げる有理関数の積分については、実は広義積分が絶対収束することが簡単に分かるため (78) を用いているが、次々項 12.3 で取り上げる有理関数 $\times e^{iax}$ の積分については、一般には広義積分は絶対収束しないため、(77) を用いている。

この講義は、広義積分の理論を説明する講義ではないので、そこを細かく追求する問題は考えないが、留意してもらいたいことである。

12.2 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

以下 $\mathbb{C}[z]$ は、変数 z の複素係数多項式の全体を表す。$P(z)\in\mathbb{C}[z]$ に対して、$P(z)$ の次数を $\deg P(z)$ で表す。

定理 12.2 (有理関数の実軸全体での積分) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) \neq 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\operatorname{Im} c>0}$ は、f の極 c のうち、$\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

以下の証明を見れば、同様にして

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c < 0} \operatorname{Res}(f; c)$$

が証明できることが分かる。実は $\displaystyle\sum_{\text{すべての極 } c} \operatorname{Res}(f; c) = 0$ が成り立つ (留数定理から直接証明できる)。

証明 仮定より

$$(\star) \qquad (\exists M \in \mathbb{R})(\exists R^* \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$$

が成り立つ。実際 $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $Q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m$, $b_0 \neq 0$ とするとき、(補題 9.19 から分かるように)

$$(\exists R^{**} \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^{**}) \quad |P(z)| \geq \frac{|a_0|}{2}|z|^n, \quad |Q(z)| \leq \frac{3|b_0|}{2}|z|^m$$

が成り立つので、$P(z) \neq 0$. また $R^* := \max\{1, R^{**}\}$, $M := \frac{3|b_0|}{|a_0|}$ とおくと、$|z| \geq R^*$ に対して、

$$|f(z)| \leq \frac{\frac{3|b_0|}{2}|z|^m}{\frac{|a_0|}{2}|z|^n} = \frac{3\,|b_0|}{|a_0|}|z|^{m-n} \leq \frac{3\,|b_0|}{|a_0|}\frac{1}{|z|^2} = \frac{M}{|z|^2} \quad ((\star) \text{ の証明終}).$$

$(\star)$ より、積分は絶対収束して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

(注: 一般に連続関数 f に対して、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R_1, R_2 \to +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\, dx$ であるが、収束することが分かれば、$\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx$ として計算できる。)

$R > R^*$ を満たす任意の R に対して

$$\begin{aligned}
&\Gamma_R \colon z = x \quad (x \in [-R, R]),\\
&C_R \colon z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),\\
&\gamma_R := \Gamma_R + C_R
\end{aligned}$$

とおくと

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz,$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R} |f(z)|\,|dz| \le \frac{M}{R^2}\int_{C_R}|dz| = \frac{M}{R^2}\cdot\pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0 \quad (R\to+\infty).$$

留数定理により

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f;c\right).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx &= \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz\\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f;c\right) - \int_{C_R} f(z)\,dz\\ &\to 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f;c\right) \quad (R\to+\infty).\blacksquare\end{aligned}$$

例 12.3

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \pi.$$

微積分で、$\tan^{-1}x$ は $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数と学んだので、それを用いると

$$I = \left[\tan^{-1}x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

一方、定理 12.2 を使うと次のように求められる。

$P(z) := z^2+1$, $Q(z) := 1$ とおくと、$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) = 2 = \deg Q(z)+2$. $x\in\mathbb{R}$ のとき $P(x) = x^2+1 \ge 0+1 = 1$ より $P(x)\ne 0$. c が被積分関数の極 $\Leftrightarrow P(c) = c^2+1 = 0$ $\Leftrightarrow c = \pm i$. このうち $\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものは $c = i$. 定理 12.2 によって

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P}; i\right).$$

i は $f := \dfrac{Q}{P}$ の 1 位の極であるから

$$\operatorname{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

あるいは

$$\operatorname{Res}(f;i) = \frac{Q(i)}{P'(i)} = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

ゆえに

$$I = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi.\blacksquare$$

余談 12.4 Mathematica ならば `Integrate[1/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity}]` として計算できる。Maple ならば `int(1/(x^2+1),x=-infinity..infinity)` ■

例 12.5

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

微積分で「有理関数の原始関数は初等関数の範囲で求まる」ことを学んだ。実際、$\dfrac{1}{x^4+1}$ の原始関数を求めることが出来、それを用いて I を計算することも可能であるが、計算はかなり面倒である。

$P(z) := z^4+1$, $Q(z) := 1$ とおくと、定理 12.2 の条件が成り立つ (確認の過程は省略する)。

$$c \text{ が } \frac{Q}{P} \text{ の極} \Leftrightarrow P(c)=0 \Leftrightarrow c=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}\ (k=0,1,2,3) \Leftrightarrow c=\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}, \tfrac{1-i}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1+i}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

$\operatorname{Im} c>0$ となるのは、$c_1:=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_2:=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$. これらは $c^4=-1$ を満たし、P の 1 位の零点であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_j\right)=\frac{Q(c_j)}{P'(c_j)}=\frac{1}{4c_j^3}=\frac{c_j}{4c_j^4}=-\frac{c_j}{4}.$$

定理 12.2 から、

$$\begin{aligned}I&=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c_2\right)\right)\\&=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(c_1+c_2)=-\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{2i}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\blacksquare\end{aligned}$$

注意 12.1 f が偶関数の場合、$\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ だから、半無限区間 $(0,\infty)$ における積分もここで示す方法で計算できる。 ■

例 12.6 (Ahlfors [27] p. 173) $I:=\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx$. 被積分関数は偶関数であるから、

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx.$$

$P(z):=z^4+5z^2+6$, $Q(z):=z^2$ とおくと、$\deg P(z)=4=\deg Q(z)+2$, $(\forall x\in\mathbb{R})\ P(x)\ge 6>0$ より $P(x)\neq 0$.

$$c \text{ が } \frac{Q}{P} \text{ の極} \Leftrightarrow P(c)=0 \Leftrightarrow (c^2+2)(c^2+3)=0 \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{2}i,\pm\sqrt{3}i.$$

$\operatorname{Im} c>0$ となるのは、$c=\sqrt{2}i,\sqrt{3}i$. 定理 12.2 から

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{Q(x)}{P(x)}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};\sqrt{2}i\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};\sqrt{3}i\right)\right).$$

後は留数を計算するだけである。

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f;\sqrt{2}i\right)&=\frac{Q\left(\sqrt{2}i\right)}{P'\left(\sqrt{2}i\right)}=\left.\frac{z^2}{4z^3+10z}\right|_{z=\sqrt{2}i}=\left.\frac{z}{4z^2+10}\right|_{z=\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{2}i}{-8+10}=\frac{\sqrt{2}i}{2},\\ \operatorname{Res}\left(f;\sqrt{3}i\right)&=\frac{Q\left(\sqrt{3}i\right)}{P'\left(\sqrt{3}i\right)}=\left.\frac{z^2}{4z^3+10z}\right|_{z=\sqrt{3}i}=\left.\frac{z}{4z^2+10}\right|_{z=\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}i}{-12+10}=-\frac{\sqrt{3}i}{2}.\end{aligned}$$

であるから

$$I=\pi i\cdot\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)i}{2}=\pi\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

この結果は $\dfrac{\pi\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{2}$ とも書ける。 ■

練習用の例 (がらくた箱)

例 12.7 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$I=\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{2n}}.\blacksquare$$

余談 12.8 Mathematica では

```
Integrate[1/(1+x^(2n)),{x,-Infinity,Infinity}, Assumptions->Element[n,Integers]&& n>0]
```

に対して $\dfrac{\left(1+\left(e^{2in\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}}\right)\pi\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}}{2n}$ を返す。FullSimplidy[] すると簡単になる。■

例 12.9 $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$I:=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

余談 12.10 (数式処理系で検算) Mathematica で

```
Integrate[1/(1+x^2)^(n+1), {x,-Infinity,Infinity}, Assumptions-> n>0]
```

とすると

$$I=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

という答が返って来る。$\Gamma(x)=x\Gamma(x-1)$ を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(1/2\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\\&=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

$$\Gamma(n+1)=n!=\frac{(2n)!!}{2^n}$$

であるから

$$I=\frac{\sqrt{\pi}\cdot(2n-1)!!\sqrt{\pi}/2^n}{(2n)!!/2^n}=\frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}.\blacksquare$$

問 81. 以下の積分を求めよ。

(1) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$.　(答: $\dfrac{\pi}{a}$)

(2) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}\,dx$.　(答: $\dfrac{\pi}{a^3\sqrt{2}}$)

(3) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.　(答: $\dfrac{\pi}{2a^3}$)

(4) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+a^6}\,dx$.　(答: $\dfrac{2\pi}{3a^5}$)

(5) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{(x^2+a^2)^4}\,dx$.　(答: $\dfrac{\pi}{16a^3}$)

(6) 正数 a に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+a^4)^3}\,dx$.　(答: $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{64a^9}$)

(7) 正数 a, 自然数 n に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.　(答: $\dfrac{\pi(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n-2)!!}$)

(8) 正数 a, 自然数 n に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^{2n}+a^{2n}}$.　(答: $\dfrac{\pi}{na^{2n-1}\sin\dfrac{\pi}{2n}}$)

問 82. (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}dx$, $a\in\mathbb{R}$　(Ahlfors p. 173)

12.3 有理関数 $\times e^{iax}$ の $\mathbb{R}$ 上の積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ (有理関数の Fourier 変換)

次に f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$$

を考える。これは応用上非常に重要な Fourier 変換、逆 Fourier 変換

$$(\mathcal{F})\qquad \widehat{f}(\xi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\quad(\xi\in\mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*)\qquad \widetilde{g}(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi\quad(x\in\mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

まず

$$(79)\qquad (\forall a\in\mathbb{R})\quad \overline{e^{iax}}=e^{-iax},\quad \cos(ax)=\operatorname{Re}e^{iax},\quad \sin(ax)=\operatorname{Im}e^{iax}$$

を思い出しておこう。

定理 12.11 $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z)\geq\deg Q(z)+1$, $(\forall x\in\mathbb{R})$ $P(x)\neq 0$, $a>0$ とするとき、

$$(80)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right).$$

ここで $\displaystyle\sum_{\operatorname{Im}c>0}$ は、f の極 (あるいは $f(z)e^{iaz}$ の極と言っても同じこと) c のうち、$\operatorname{Im}c>0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

注意 12.12 仮定 $\deg P(z)\geq\deg Q(z)+1$ は、定理 12.2 の条件よりも弱い。$\deg P(z)\geq\deg Q(z)+2$ である場合は、$a\geq 0$ に対して (つまり $a=0$ も OK[91]) 広義積分が絶対収束であることも簡単に示せるし、積分路として、簡単な $\gamma_R=\Gamma_R+C_R$ を採用して証明できる。また

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz=0$$

の証明も

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta=0$$

[91] この場合は、前項で示した公式になる。

に帰着され、簡単である ($0 < e^{-aR\sin\theta} \le 1$ より $0 < \displaystyle\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} d\theta \le \pi$ が導かれる)。

Cf. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ は発散、$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ は絶対収束, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束する (絶対収束はしない)。■

証明　定理 12.2 の証明と同様に

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\exists R^* \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \ge R^*) \quad P(z) \ne 0 \quad \text{かつ} \quad |f(z)| \le \frac{M}{|z|}.$$

$A, B \ge R^*$ とするとき、

$$\begin{aligned}
&C_{A,B,\text{下}}\colon z = x \quad (x \in [-A, B]),\\
&C_{A,B,\text{右}}\colon z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
&-C_{A,B,\text{上}}\colon z = x + i(A+B) \quad (x \in [-A, B]),\\
&-C_{A,B,\text{左}}\colon z = -A + iy \quad (y \in [0, A+B]),\\
&\gamma_{A,B} = C_{A,B,\text{下}} + C_{A,B,\text{右}} + C_{A,B,\text{上}} + C_{A,B,\text{左}}
\end{aligned}$$

とおく。

P の零点 c は $|c| < R^*$ を満たすので、$\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものは閉曲線 $\gamma_{A,B}$ の囲む長方形領域に含まれる。また実軸上にはないので、留数定理によって

$$\int_{\gamma_{A,B}} f(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right).$$

$$\int_{C_{A,B,\text{下}}} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx.$$

$C_{A,B,\text{右}}$ では、$|z| = \sqrt{B^2+y^2} \ge B$ であるから、

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|} \le \frac{M}{B}.$$

また

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(B+iy)] = -ay, \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから ($|dz| = dy$ に注意して)

$$\left|\int_{C_{A,B,\text{右}}} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \le \int_{C_{A,B,\text{右}}} \left|f(z)e^{iaz}\right|\,|dz| \le \frac{M}{B}\int_0^{A+B} e^{-ay}dy \le \frac{M}{B}\int_0^\infty e^{-ay}dy = \frac{M}{aB}.$$

$C_{A,B,\text{左}}$ でも、ほぼ同様にして

$$\left|\int_{C_{A,B,\text{左}}} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \le \frac{M}{aA}.$$

$C_{A,B,\text{上}}$ では、$|z| = \sqrt{x^2+(A+B)^2} \ge A+B$ であるから

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|} \le \frac{M}{A+B}.$$

また

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(x+i(A+B))] = -a(A+B), \quad \left|e^{iaz}\right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-a(A+B)}$$

であるから ($|dz|=dx$ に注意して)

$$\left|\int_{C_{A,B,\text{上}}} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \le \int_{C_{A,B,\text{上}}} \left|f(z)e^{iaz}\right|\,|dz| \le \frac{M}{A+B}\int_{-A}^{B} e^{-a(A+B)}dx = Me^{-a(A+B)}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{A,B\to+\infty}\int_{-A}^{B} f(x)e^{iax}\,dx \\
&= \lim_{A,B\to+\infty}\left(\int_{\gamma_{A,B}} f(z)e^{iaz}\,dz - \int_{C_{A,B,\text{右}}} f(z)e^{iaz}\,dz - \int_{C_{A,B,\text{上}}} f(z)e^{iaz}\,dz - \int_{C_{A,B,\text{左}}} f(z)e^{iaz}\,dz\right) \\
&= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

この証明を検討すると、$a\le 0$ のときは、(80) が成立しないことが分かる。$a<0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

系 12.13 $P(z), Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z)\ge \deg Q(z)+1$, $(\forall x\in\mathbb{R})\ P(x)\ne 0$, $a<0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = -2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c<0}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right).$$

しかし、系 12.13 を使うのでなく、計算の工夫により、定理 12.2 に帰着させているテキストが多い。これについては、以下の例を見よ。

例 12.14 a を実数とするとき

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx = \pi e^{-|a|}. \tag{81}$$

$a>0$ の場合は、定理 12.11 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1};i\right) = 2\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a=0$ の場合は、定理 12.2 から (というよりも例 12.3 そのもの)

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{x^2+1};i\right) = 2\pi i\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi.$$

$a<0$ のとき、$e^{iax}=\overline{e^{-iax}}$, $-a>0$ に注意して、定理 12.11 から

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\frac{e^{-iax}}{x^2+1}}\,dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iax}}{x^2+1}\,dx} = \overline{2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iaz}}{z^2+1};i\right)} = \overline{2\pi i\cdot\left.\frac{e^{-iaz}}{2z}\right|_{z=i}} = \overline{\pi e^{a}} = \pi e^{a}.$$

以上をまとめて (81) を得る。

なお、 (81) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。 ■

余談 12.15 (Mathematica で検算するときに) Mathematica で計算する際に、a の符号を教えるには、例えば

```
Assuming[a>0, Integrate[Exp[I a x]/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity}}]
```

あるいは

```
Integrate[Exp[I a x]/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity},Assumptions->a>0]
```

のようにすれば良い。■

例 12.16

$$I=\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、$\sin x=\operatorname{Im} e^{ix}$ であることから

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{Im}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx.$$

$P(z):=z^2+1$, $Q(z):=z$, $a:=1$ とすると、定理 80 の条件が成り立つ。ゆえに

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2+1}e^{iz};i\right)\right)=\operatorname{Im}\left(\pi i\cdot\left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=i}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\pi i e^{i^2}\right)=\frac{\pi}{2e}.■$$

練習用の例

例 12.17 $\alpha>0$

$$I=\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{x^4+1}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha/\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

(誤植があった。きちんと書くまで取扱い注意。) ■

問 1. 以下の積分を求めよ。

(1) 正数 a, α に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}\,dx.$ (答: $\dfrac{\pi e^{-a\alpha}}{a}$)

(2) 正数 a, α に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$ (答: $\dfrac{\pi(1+a\alpha)e^{-a\alpha}}{2a^3}$)

(3) 正数 a, α に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^4+a^4}\,dx.$ (答: $\dfrac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}a^3}\left(\cos\dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}}\right)$)

(4) 正数 a, α に対して、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin\alpha x}{x^4+a^4}\,dx.$ (答: $\dfrac{\pi e^{-a\alpha/\sqrt{2}}}{a^2}\sin\dfrac{a\alpha}{\sqrt{2}}$)

問 2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$ $(a\in\mathbb{R})$ (答: $\dfrac{\pi e^{-|a|}}{2}$)

12.4 三角関数の有理関数の周期積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} r(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

1 変数の微積分で学んだように、$r(x,y)$ を x と y の有理式とするとき、$\displaystyle\int r(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$ は初等関数で求まるが、実際の計算はかなり面倒になることが多い。しかし特に重要な $[0,2\pi]$ 上の積分 (周期積分) については、留数を用いて簡単に計算できる。

命題 12.18 (三角関数の有理関数の周期積分) $r(x,y)$ を x, y の有理式とするとき、

$$\int_0^{2\pi} r(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta = 2\pi i\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}(f;c). \tag{82a}$$

ただし f は

$$f(z) := \frac{1}{iz}\,r\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right) \tag{82b}$$

で定義し、$f(z)$ は単位円周 $|z|=1$ 上に極を持たないとする。また $\displaystyle\sum_{|c|<1}$ は、f の極 c のうち、単位円盤内 $|z|<1$ に属するものすべてについての和を意味する。

授業では、この公式 (82a), (82b) は丸暗記するものでないこと、

$$z=e^{i\theta}\quad(\theta\in[0,2\pi])$$

という変数変換で、

$$\cos\theta=\frac{z+1/z}{2},\quad \sin\theta=\frac{z-1/z}{2i},\quad dz=ie^{i\theta}d\theta \quad \text{より} \quad d\theta=\frac{dz}{iz}$$

と出来て、単位円坂内の留数の和の計算になることを強調する。以下の証明を見せるよりは、例の紹介に入った方が良いかもしれない。

証明

$$I:=\int_0^{2\pi} r(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$$

は、$z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とすることで、

$$\begin{aligned}
dz&=ie^{i\theta}d\theta,\quad d\theta=\frac{dz}{iz},\\
\cos\theta&=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z},\\
\sin\theta&=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2-1}{2iz}
\end{aligned}$$

であるから、

$$I=\int_{|z|=1} r\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1} f(z)\,dz.$$

留数定理によって、この積分は $|z|=1$ 内部の極における f の留数の和で計算できる。

$$I=2\pi i\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}(f;c).\blacksquare$$

注意 12.2 (試験の採点現場から) 上では、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

と置いているが、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

と置いてみたくもなるところである (テストに出題したところ、かなりの数の学生がそうしたことがあった、うわぁ)。しかし

$$f(z) := \frac{1}{iz} r\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

で定義した f は (特殊な場合を除いて) 正則関数にならないので、留数定理を使うことが出来なくなる。■

例 12.19 $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$ を求めよ。
(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0,1])$ とおくと、

$$\begin{aligned}
J &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5-4\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{5z-2(z^2+1)} dz = i\int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2-5z+2} \\
&= i\int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z-1)(z-2)} = i\cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)}; c\right) \\
&= -2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)}; \frac{1}{2}\right) = -2\pi \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(2z-1)(z-2)} \\
&= -2\pi \frac{1}{2(\frac{1}{2}-2)} = \frac{2\pi}{3}. \blacksquare
\end{aligned}$$

例 12.20 $0 < r < R$ とするとき、$I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$ を求めよ (被積分関数は**ポアソン核**と呼ばれ、ポテンシャル論で重要な関数である)。
(解答) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0,2\pi])$ とおくと、

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{R^2+r^2-2Rr\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(R^2+r^2)z - Rr(z^2+1)} \\
&= i\int_{|z|=1} \frac{dz}{Rrz^2-(R^2+r^2)z+Rr} = i\int_{|z|=1} \frac{dz}{(Rz-r)(rz-R)}.
\end{aligned}$$

留数定理を用いて

$$\begin{aligned}
I &= i\cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(Rz-r)(rz-R)}; c\right) = -2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(Rz-r)(rz-R)}; \frac{r}{R}\right) \\
&= -2\pi \lim_{z\to r/R} \frac{z-r/R}{(Rz-r)(rz-R)} = -\frac{2\pi}{R}\cdot\frac{1}{r\cdot r/R - R} = \frac{2\pi}{R^2-r^2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

練習用の例

例 12.21 $a>0$ とするとき、

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{2\pi}{|a^2-1|}.\blacksquare$$

例 12.22 $a>1$ とするとき、

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\blacksquare$$

例 12.23 $0\le e<1$ に対して

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}=\frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

(Mathematica は、`Integrate[1/(1+e Cos[x])^2,{x,0,2Pi}, Assumptions->e>0 && e<1]` で計算してくれる。これは Kepler 運動の周期の計算に必要な積分である。) ■

以下の問題の多くは、梶原 [43] pp. 80–81 などから採った。

問 3. (1) 自然数 n に対して、$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,d\theta$. (2) 自然数 n に対して、$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\theta\,d\theta$. (3) 正数 a, b に対して、$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$. (4) (立教大) $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$. (5) (慶応大、早大、立教大、九大) $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$ $(0<r<R)$. (6) (東海大) $I=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}\right)d\theta$ $(0<r<R)$. (7) $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^2}$ $(0<r<R)$. (8) (九大、早大) $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$ $(a>b>0)$. (9) 自然数 m, 正数 r, R $(r<R)$ に対して、$I+iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}d\theta,\quad J=\int_0^{2\pi}\frac{\sin m\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}d\theta.$$

(10) 正数 a, 自然数 n に対して、$I+iJ$ を計算し I, J を求めよ。

$$I=\int_0^{2\pi}e^{a\cos\theta}\cos\left(a\sin\theta-n\theta\right)d\theta,\quad J=\int_0^{2\pi}e^{a\cos\theta}\sin\left(a\sin\theta-n\theta\right)d\theta.$$

解答 (1) $\dfrac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (2) $\dfrac{2\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ (3) $\dfrac{2\pi}{ab}$ (4) $\dfrac{2\pi}{3}$ (5) $\dfrac{2\pi}{R^2-r^2}$ (6) 1 (7) $\dfrac{2\pi(R^2+r^2)}{(R^2-r^2)^3}$ (8) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (9) $I=\dfrac{2\pi}{R^2-r^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^m$, $J=0$ (10) $I=\dfrac{2\pi a^n}{n!}$, $J=0$

問 4. $a^2>b^2+c^2$ を満たす実数 a, b, c に対して、

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$$

を求めよ。(答: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}$)

問 5. (Ahlfors [27], p. 173) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$, $|a|>1$ (答: $\dfrac{\pi \operatorname{sign} a}{2\sqrt{a^2+a}}$)

12.5 有理関数の $\mathbb{R}$ 上の積分 (実軸上に被積分関数の 1 位の極がある場合)

(講義で時間に余裕がない場合は、この項を省略することがある。)

実軸上の区間 $[a,b]$ 上で C^1 級の関数 f に対して、広義積分

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{f(x)}{x-c}\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx\right)$$

は一般には存在しない ($f(c)\neq 0$ であれば発散する)。しかし

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-c}\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx\right)$$

は存在する。この極限値を

$$\text{p.v.}\int_a^b \frac{f(x)}{x-c}\,dx$$

と表し、**Cauchy の主値積分** (the Cauchy principal value) と呼ぶ。

例 12.24 $a,b>0$ とするとき、

$$I_1 = \int_{-a}^b \frac{dx}{x}$$

は発散するが、

$$I_2 = \text{p.v.}\int_{-a}^b \frac{dx}{x} = \log\frac{b}{a}.$$

実際

$$\int_{-a}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x} = [\log|x|]_{-a}^{-\varepsilon_1} + [\log|x|]_{\varepsilon_2}^b = \log\varepsilon_1 - \log a + \log b - \log\varepsilon_2 = \log\frac{b}{a} + \log\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

であるから、$\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0$ としても収束しないが、$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ として $\varepsilon\to+0$ とすれば $\log\frac{b}{a}$ に収束する。ゆえに I_1 は収束しないが、$I_2=\log\dfrac{b}{a}$. ■

$f=\frac{Q}{P}$ $(P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z])$ に対して

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad P(x)\neq 0$$

という条件を緩めて、「P は $\mathbb{R}$ 上で高々 1 位の零点しか持たない」とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad (\text{ただし} \deg P(z)\geq \deg Q(z)+2),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx \quad (\text{ただし} \deg P(z)\geq \deg Q(z)+1)$$

は普通の広義積分としては存在しないが、主値積分は存在し、上の定理と似たような定理が成り立つ。

定理 12.25 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, P は $\mathbb{R}$ 上で高々 1 位の零点しか持たないとする。

(1) $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ とするとき、

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f; c) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} c=0} \operatorname{Res}(f; c). \tag{83}$$

(2) $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ とするとき、任意の $a > 0$ に対して

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} c=0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c\right). \tag{84}$$

証明 (1) の略証を示す。実軸上にある極を $c_1 < c_2 < \cdots < c_N$ とする。$\overline{D}(c_j; \varepsilon)$ が互いに交わらないように $\varepsilon > 0$ を十分小さく取る。

R を十分大きく取り、すべての極が $|z| < R$ の中にあり、$-R < c_1 - \varepsilon$, $C_N + \varepsilon < R$ を満たすとする。

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\varepsilon,R} := [-R, c_1 - \varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} [c_j + \varepsilon, c_{j+1} - \varepsilon] + [c_N + \varepsilon, R],\\
&-C_{\varepsilon,j} : z = c_j + \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),\\
&C_R : z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),\\
&\gamma_{\varepsilon,R} := \Gamma_{\varepsilon,R} + \sum_{j=1}^{N} C_{\varepsilon,j} + C_R
\end{aligned}$$

により曲線 (鎖) を定める。

留数定理により、

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f; c).$$

左辺は

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N} \int_{-C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

と分解できる。

$R \to +\infty$ のとき、右辺第 3 項は 0 に収束する。

$\varepsilon \to +0$ のとき、

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz &= \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c_{N+1}+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx\\
&\to \text{p.v.} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

$\varepsilon \to +0$ のとき、

$$\int_{-C_{\varepsilon,j}} f(z)\,dz \to \pi i \operatorname{Res}(f; c_j).$$

ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(f; c_j) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f; c).$$

移項すれば求める結果を得る。■

例 12.26 (Dirichlet 積分)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

これは普通の広義積分として収束することに注意する。それは主値積分とも一致する。

$$I = \frac{1}{2}\,\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right).$$

定理 12.25 (2) を用いて

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}; 0\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Im}\left(\pi i \cdot e^{i0}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(注意 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束する広義積分であるが、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$ は収束せず、主値積分しか存在しない。(2) この定積分は教科書 ([1]) では、主値積分という言葉は使わずに説明してあるが、実際にやっている議論は上と同じであり、この例以外にも主値積分はしばしば登場するので、主値積分を用いた説明を行った。) ■

12.6 おまけ: 定理 12.11 の別証明

(細かい話になるので、授業でここを説明する気はまったくない。)

定理 12.11 を、$C_R + \Gamma_R$ という積分路を用いて証明することも出来る。多くの本で採用されている方法であるが、厳密に遂行するのは、以下に見るようにやや面倒である。(率直に言って下手な証明であると思うが) 大学院入試で、このやり方に誘導する問題を出題するところがあるので (あんまり賛同できない)、一応解説しておく次第である。

証明は、広義積分が収束することを確かめた後で

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) \tag{85}$$

を示すという手順になる。

$\deg P \ge \deg Q + 2$ と仮定を強くしているテキストもある。その場合は広義積分が絶対収束するので議論が簡単になる。

広義積分が収束することの証明をさぼっている本もある。

12.6.1 広義積分が存在すること

$P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ を仮定して証明する。$\deg P(x) = n$, $m := \deg Q(x)$ とおくと、$P(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$ $(a_0 \ne 0)$, $Q(x) = b_0x^m + \cdots + a_m$ $(b_0 \ne 0)$ と書ける。$n \ge m+2$ であれば広義積分が絶対収束することは明らかである ($|P(x)e^{iax}| = |P(x)|$ で、定理 12.2 の証明と同じ証明が出来る)。以下、$n = m+1$ とする。$\exists h(x)$, $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \ne 0$

$$f(x) = \frac{b_0}{a_0 x}(1 + h(x)), \quad |h(x)| \le \frac{M}{x}.$$

広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{a_0 x} e^{iax}\,dx$$

が収束することは、実部虚部に分解して、交代級数の議論を用いて確められる。一方

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{a_0 x} h(x) e^{iax}\,dx$$

が絶対収束することも容易に確められる。ゆえに広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ が存在し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx.$$

12.6.2 (85) の証明

さて、$\exists M \in \mathbb{R}, \exists R^* \in [1,\infty)$ s.t. $f(z)$ の分母 $P(z)$ の零点は $|z| < R^*$ に含まれ、

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|} \quad (|z| \ge R^*).$$

$R \in [R^*, \infty)$ に対して、Γ_R を $z = x$ $(x \in [-R, R])$, C_R を $z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in [0,\pi])$ で定め、$\gamma_R := \Gamma_R + C_R$ とおく。$P(z)$ の零点は多項式であるから有限個で、円盤 $|z| < R^*$ に含まれ (ゆえに上半平面にあるものは、γ_R の内部に存在する)、仮定より実軸上にはない。それらは $f(z)e^{iaz}$ の極または除去可能特異点であり、それら以外の点では $f(z)e^{iaz}$ は正則である。また γ_R は単純閉曲線であるから、留数定理を用いて、

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi i \sum_{c\ \text{は}\ \gamma_R\ \text{の内部}} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

C_R は $z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in [0,\pi])$ とパラメーターづけできる。$dz = iRe^{i\theta}\,d\theta$ で、

$$\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta,$$

$$\begin{aligned} iaRe^{i\theta} &= iaR(\cos\theta + i\sin\theta) = -aR\sin\theta + iaR\cos\theta, \\ \operatorname{Re}\left[iaRe^{i\theta}\right] &= -aR\sin\theta, \quad \left|e^{iaRe^{i\theta}}\right| = e^{\operatorname{Re}\left[iaRe^{i\theta}\right]} = e^{-aR\sin\theta} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz\right| &\le \int_0^{\pi} \left|f(Re^{i\theta})\right| \left|e^{iaRe^{i\theta}}\right| \left|iRe^{i\theta}\right| d\theta \le \frac{M}{R}\cdot R\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta \\ &= M\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta. \end{aligned}$$

実は

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta = 0 \tag{86}$$

である。これを認めれば、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx = \int_{\Gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz \\ &= \int_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz - \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz \\ &= 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f(z)e^{iaz};c) - \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz \\ &\to 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f(z)e^{iaz};c)\quad (R\to\infty)\end{aligned}$$

として証明が完了する。(86) については、以下で 3 通りの証明を与える。■

(86) の証明　[1] Lebesgue 積分の **Lebesgue の収束定理**を知っているならば、

$$\left|e^{-aR\sin\theta}\right|\le 1,\quad \int_0^{\pi} 1\,d\theta=\pi<\infty,\quad \lim_{R\to\infty} e^{-aR\sin\theta}=\begin{cases}0 & (\theta\in(0,\pi))\\ 1 & (\theta=0,\pi)\end{cases}=0\quad\text{(a.e.)}$$

であるから、

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^1 e^{-aR\sin\theta}d\theta=\int_0^1\lim_{R\to\infty}e^{-aR\sin\theta}d\theta=\int_0^1 0\,d\theta=0.$$

[2] (ε-δ 論法に慣れている場合は、ある意味で初等的な方法) $0<\forall\delta<\pi/2$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}d\theta &= 2\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta = 2\left(\int_0^{\delta} e^{-aR\sin\theta}d\theta+\int_{\delta}^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta\right)\\ &\le 2\left(\delta+e^{-aR\sin\delta}\int_{\delta}^{\pi/2}d\theta\right)\le 2\delta+\pi e^{-aR\sin\delta}\end{aligned}$$

が成り立つことから、最初に δ を十分小さく取って右辺第 1 項を小さくしておいてから、R を大きくして右辺第 2 項を小さくする。

[3] **Jordan の不等式**[92]

(87)
$$\sin\theta\ge\frac{2\theta}{\pi}\quad(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$

から $-R\sin\theta\le-\dfrac{2R\theta}{\pi}$ が導かれるので

(88)
$$0<\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta\le\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}d\theta=\left[-\frac{\pi}{2R}e^{-2R\theta/\pi}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})<\frac{\pi}{2R}.$$

この式で $R\to+\infty$ とする。■

12.7　Laplace 変換の逆変換の積分の留数計算

(しばらく工事中となる予定)

[92] Jordan の不等式は、$y=\sin\theta$ と $y=\dfrac{2\theta}{\pi}$ のグラフを描くと「分かる」。証明は微分法の簡単な演習問題である。しかし、この不等式をとっさに発見するのは難しいので、甘く見ていると、院試などであわてることになる。Jordan の不等式という名は、吉田 [44] (p. 17) で知った。

関数 $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ に対して、ある程度の仮定[93]をおくと

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{89}$$

で複素関数 F が定まる。このとき、F を f の **Laplace 変換** と呼び、$\mathcal{L}f(s)$ や $\mathcal{L}[f(t)](s)$ などの記号で表す:

$$\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{90}$$

$s = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ として、$g(t) := e^{-xt} f(t) \chi_{[0,\infty)}(t)$ とおくと (χ は集合の定義関数のつもり)

$$F(s) = F(x+iy) = \int_0^\infty e^{-tx} f(t) e^{-iyt} dt = \int_{-\infty}^\infty g(t) e^{-iyt} dt.$$

これは、y の関数として見た $F(x+iy)$ が g の Fourier 変換であることを示している。f は指数オーダー α, f' は区分的に連続と仮定すると、積分は $x = \operatorname{Re} s > \alpha$ で絶対収束する。すなわち g は絶対可積分である。Fourier の反転公式より[94]

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{iyt} F(x+iy) dy.$$

(x は定数扱いしていることに注意) $ds = i\, dy$ より

$$f(t) = g(t) e^{xt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{(x+iy)t} F(x+iy) dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s)\, ds.$$

すなわち

$$f(t) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{ts} F(s) ds. \tag{91}$$

これが有名な Laplace 変換の反転公式である。

F について、適当な仮定をおくと、この積分は留数定理を用いて計算できる (そうだ):

$$f(t) = \sum_c \operatorname{Res}\left(e^{ts} F(s); c\right).$$

(これを正当化するには、きちんと仮定を述べた定理を書く必要があるだろう。証明らしきことが Schiff [45] に書いてあるけれど、主張がはっきり読み取れない。どこかで時間をかけて解読を試みて、成功したらここに書くけれど、いつになるやら…)

たとえば

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}\right](s) = \frac{1}{(s-a)^n} \tag{92}$$

という有名な公式 (これ一つでほとんど用が足りる) について、右辺の逆変換を求めてみよう。

右辺は s の関数として、$s = a$ を唯一の極に持ち、その位数は n であるから

$$\begin{aligned}\sum_c \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{(s-a)^n}; c\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{(s-a)^n}; a\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s\to a} \left(\frac{d}{ds}\right)^{n-1} \left[(s-a)^n \cdot \frac{e^{ts}}{(s-a)^n}\right] \\ &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}.\end{aligned}$$

無事逆変換に成功した。

---

[93] よくあるのが、ある実数 α に対して、$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall x \in [0,\infty))\ |f(x)| \le M e^{\alpha x}$ が成り立つ、とすることで、この場合は $\operatorname{Re} s > \alpha$ を満たす任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して、$F(s)$ を定義する積分が絶対収束をする。

[94] ここら辺 3 行ほどは「引き写し」で、実は私自身が消化できていない。指数オーダー α というのは、一つ前の脚注に書いたことだろうと想像するけれど、反転公式はこの場合どういう定理を想定しているのかな。

余談 12.27 Laplace 変換は古くからあったけれど、広く使われるようになったのは意外と遅かったようである (Heaviside の演算子法の正当化で駆り出されてから？)。私が学生のときは、あまり大事に扱われていない印象を受けた。逆変換の公式は読んでいたテキストに一応載っていたけれど、「何か使うのは難しそう」という印象を受けたものである (具体例の計算が皆無だった)。重要な公式 (92) の逆向きの導出が、留数計算で瞬殺と知ったときの私の驚きは…ご想像にお任せします。■

問 83. 次の良く知られた公式について、上の計算と同じように逆変換してみよ。

$$\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right](s)=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}\left[\sin\omega t\right](s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

12.8 その他

(次の例だが、外枠の方を四角にすれば、やはり $\displaystyle\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\,d\theta$ の評価は避けられる。書き直すのが面倒なので放置しておく。)

例 12.28 (例 12.26 再考)

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

(収束するが絶対収束はしない広義積分の例として、微積分の教科書の例に取り上げられることも多い積分である。原点での特異性の処理の仕方が、1 位の極がある場合の主値積分の処理の仕方と同じ。それは普通の留数定理の証明に近いところがあり、教育的である。)

$$\begin{aligned}
&f(z):=\frac{e^{iz}}{z},\\
&\Gamma_{\varepsilon,R}: z=x\quad (x\in[\varepsilon,R]),\\
&C_R: z=Re^{i\theta}\quad (\theta\in[0,\pi]),\\
&\Gamma_{-R,-\varepsilon}: z=x\quad (x\in[-R,-\varepsilon]),\\
&C_\varepsilon: z=\varepsilon e^{i\theta}\quad (\theta\in[0,\pi]),\\
&\gamma_{\varepsilon,R}:=\Gamma_{\varepsilon,R}+C_R+\Gamma_{-R,\varepsilon}+(-C_\varepsilon)
\end{aligned}$$

とおく (図を描かないと)。f は 0 以外で正則であるから、f の閉曲線 $\gamma_{\varepsilon,R}$ (0 はその外側にある) に沿う線積分は、Cauchy の積分定理によって 0 である。

$$(\star)\qquad 0=\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz=\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz+\int_{\Gamma_{-R,-\varepsilon}} f(z)\,dz+\int_{C_R} f(z)\,dz-\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

実は

$$(\natural)\qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0.$$

実際、

$$\int_{C_R} f(z)\,dz=\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\cdot iRe^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^\pi e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta$$

であるから、(88) を用いて

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|\le\int_0^\pi \left|e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|d\theta=\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta<2\frac{\pi}{2R}=\frac{\pi}{R}\to 0.$$

一方、
$$\int_{\Gamma_{-R,-\varepsilon}} f(z)\,dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_R^{\varepsilon}\frac{e^{-it}}{-t}\cdot(-1)dt=-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-it}}{t}dt$$
であるから、
$$(\sharp)\qquad \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz+\int_{\Gamma_{-R,-\varepsilon}} f(z)\,dz=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,dx-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-it}}{t}dt=2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$
実は
$$(\flat)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz=i\pi$$
である[95]。実際、
$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz=\int_0^{\pi}\frac{e^{i(\varepsilon e^{i\theta})}}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{\pi}e^{i(\varepsilon e^{i\theta})}\,d\theta$$
であるので、$\left|i\varepsilon e^{i\theta}\right|=\varepsilon$ に注意して、
$$\begin{aligned}\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz-i\pi\right|&=\left|i\int_0^{\pi}\left(e^{i(\varepsilon e^{i\theta})}-1\right)\,d\theta\right|\le\pi\max_{|\zeta|=\varepsilon}\left|e^{\zeta}-1\right|=\pi\max_{|\zeta|=\varepsilon}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^n}{n!}\right|\\&\le\pi\max_{|\zeta|=\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\zeta|^n}{n!}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}=\pi\left(e^{\varepsilon}-1\right)\to 0\quad(\varepsilon\to 0).\end{aligned}$$
ゆえに $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz=i\pi.$

$(\star)$, $(\sharp)$, $(\flat)$, $(\natural)$ より、
$$2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_{C_\varepsilon} f(z)dz-\int_{\Gamma_R} f(z)dz\to\pi i-0=\pi i\quad(\varepsilon\to 0,\ R\to\infty).$$
ゆえに
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.\blacksquare$$

問 6. f は c の近傍で正則とする。C_ε: $z=c+\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ とするとき、
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{z-c}\,dz=\pi i f(c).$$

13 関数論この後

前節までで、日本の理工系の学科で講義される標準的な関数論の内容は大体解説出来た。(細かいことを言うと、解析接続とか、鏡像の原理とか、1 次分数変換とか、Riemann 面の素朴な取り扱いとか、色々残っている[96]。)

関数論はこの後、どういう発展があるか、キーワードをあげておく。

---

[95] これがもし一周の線積分ならば、Cauchy の積分公式または留数定理で $2\pi i$ ということが分かるが、C_ε は半円周である。

[96] 時々「関数論を習ったというなら、当然知っているはずですね」とかおっしゃる先生もいるけれど、授業時間数は限られているので、満遍なくやることは出来ません。

- 楕円関数、代数関数、Riemann 面
  Gauss, Abel, Jacobi, Riemann, Weierstrass と大数学者達が取り組み、その成果は 19 世紀数学の華とも呼ばれる。

- 特殊関数
  応用上も重要であるが (偏微分方程式の解析解を表すのに頻出する)、理論的な面で現在でも盛んに研究されている。

- 多変数関数論
  岡 潔（きよし） (1901–1978) の研究が有名である。

- 佐藤超函数論
  微積分が自由に行えるように関数概念を拡張する超関数論として、Laurent Schwartz (1915–2002) の超関数 (distribution) が普及しているが、佐藤幹夫 (1928–2023) の超函数 (hyperfunction) も有名である。佐藤超函数は、解析関数の “境界値の差” として超関数を定義する。

14 問の解答

(ここはいまのところ、全く不十分です。別に練習問題集を用意してあって、そちらの方の解答はかなり整備してあるので、そちらを見て下さい。)

解答 1. (ここの書き方は高校流である。) $x+y=10$, $xy=40$ の解は $t^2-10t+40=0$ の 2 根 $t=\dfrac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot1\cdot40}}{2}=\dfrac{10\pm\sqrt{-60}}{2}=\dfrac{10\pm2\sqrt{-15}}{2}=5\pm\sqrt{-15}$. すなわち $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$. ■

解答 2.

(1) $D=f(\alpha)$, $C=f'(\alpha)$, $B=f''(\alpha)/2$, $A=f^{(3)}(\alpha)/6$. (素朴に解答できるけれど、要するにこれは f の α における Taylor 展開である。)

(2) $f''(\alpha)=0$ より $6\alpha+2a=0$ が導かれるので、$\alpha=-\dfrac{a}{3}$. ■

解答 3. 高校レベルの微積分で解ける (実際、某大学の入試問題に出題されたのを見たことがある)。省略する。 ■

解答 4. $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-YZ-ZX-XY)$ は高校数学の教科書に載ることも多い公式である (証明するには、右辺を展開して左辺に一致することを確かめれば良い)。(次の問を解くだけならば、これだけで十分である。後のためにさらに因数分解を進める。)

ω が $x^2+x+1=0$ の根であることも高校で学ぶ。従って

$$\begin{aligned}(X+\omega Y+\omega^2 Z)(X+\omega^2 Y+\omega Z)&=X^2+(\omega Y+\omega^2 Z+\omega^2 Y+\omega Z)X+(\omega Y+\omega^2 Z)(\omega^2 Y+\omega Z)\\&=X^2+(\omega+\omega^2)(Y+Z)X+\omega^3(Y^2+Z^2)+(\omega+\omega^2)YZ\\&=X^2-(Y+Z)X+(Y^2+Z^2)-YZ\\&=X^2+Y^2+Z^2-YZ-ZX-XY.\blacksquare\end{aligned}$$

解答 5. まず実数の3乗根について復習しておく。任意の実数tに対して、$s^3=t$ を満たす実数 s は一意的に存在し、それを $\sqrt[3]{t}$ で表す (ことになっている)。一般に

$$(\heartsuit)\qquad \sqrt[3]{t_1t_2}=\sqrt[3]{t_1}\sqrt[3]{t_2},\quad \sqrt[3]{t^3}=t$$

が成立する。(復習終わり — 何でもないことのようだが、t が虚数のときは、t の3乗根は存在するが一意性はなく、したがって $\sqrt[3]{t}$ という記号も断りなしには意味が確定せず、($\heartsuit$) のような便利な公式は使えない。)

α,β が

$$(\sharp)\qquad \alpha^3+\beta^3=-q,\quad \alpha\beta=-\frac{p}{3}$$

を満たすならば、$Y:=-\alpha$, $Z:=-\beta$ とおくと

$$\begin{aligned}x^3+px+q&=x^3-3\alpha\beta x-\left(\alpha^3+\beta^3\right)=x^3-3xYZ+Y^3+Z^3=x^3+Y^3+Z^3-3xYZ\\&=(x+Y+Z)(x+\omega Y+\omega^2Z)(x+\omega^2Y+\omega Z).\end{aligned}$$

ゆえに $x^3+px+q=0$ は

$$\begin{aligned}x&=-(Y+Z),-(\omega Y+\omega^2Z),-\left(\omega^2Y+\omega Z\right)\\&=\alpha+\beta,\omega\alpha+\omega^2\beta,\omega^2\alpha+\omega\beta\end{aligned}$$

と解くことが出来る。

そこで以下、($\sharp$) を満たす α, β を (少なくとも1組) 求めることを目標にする。

α, β が ($\sharp$) を満たすならば、

$$(\flat)\qquad \alpha^3+\beta^3=-q,\quad \alpha^3\beta^3=-\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

が成り立つ。ゆえに $A:=\alpha^3$, $B:=\beta^3$ とおくと、($A+B=-q$, $AB=-\left(\frac{p}{3}\right)^3$ が成り立つので) A, B は

$$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

の2根

$$t=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

である。

$$(\natural_1)\qquad t_1:=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\quad t_2:=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$(\natural_2)\qquad \alpha:=\sqrt[3]{t_1},\quad \beta:=\sqrt[3]{t_2}$$

とおくとき、これらは実数であり、α と β は ($\sharp$) を満たす。実際

$$\begin{aligned}&\alpha^3+\beta^3=t_1+t_2=-q,\\&\alpha\beta=\sqrt[3]{t_1t_2}=\sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-\frac{p}{3}\quad ((\heartsuit)\text{ を使っている}).\end{aligned}$$

以上をまとめると、α, β を $(\natural_1)$, $(\natural_2)$ で定めたとき、$x = \alpha + \beta$ が (唯一の) 実根である。すなわち

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

(後のために) α, β が実数であるならば、$(\sharp)$ と $(\flat)$ は同値である。しかし α, β が虚数ならば、$(\sharp)$ と $(\flat)$ は同値ではない。そのため、議論が少し煩雑になる。 ■

解答 6.

(1) 前問の解答から $x^3 + px + q = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x = &\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\ &\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\ &\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \end{aligned}$$

の 3 つであり、最初の 1 つが実数で、後の 2 つが虚数である。

(2) 条件 $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ が成り立つときも、(1) に記した x が解であることは容易に分かる。$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ のときは、t_1, t_2 は虚数になる。後で説明するように、任意の虚数に対して、3 乗根が存在する (一意性は成り立たない)。以下、このことを認めて話を進める。

α を t_1 の 3 乗根 (の 1 つ) であるとする。このとき

$$\beta := \frac{-p/3}{\alpha}$$

とおくと、当然 $\alpha\beta = -p/3$ であるが

$$\alpha^3 + \beta^3 = \alpha^3 + \frac{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}{\alpha^3} = t_1 - \frac{p^3/27}{t_1} = \cdots = -q. \quad \text{(割り込みがかかったのでまた後で。)}$$

$(\flat)$ を満たす α, β が得られたので、後の議論は上と同じ (因数分解) でよく、$x^3+px+q=0$ の解は

$$x = \alpha + \beta, \omega\alpha + \omega^2\beta, \omega^2\alpha + \omega\beta$$

である。 ■

解答 7.

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

解答 8.

$$i^n = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod 4) \\ i & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ -1 & (n \equiv 2 \pmod 4) \\ -i & (n \equiv 3 \pmod 4). \end{cases} \quad \blacksquare$$

解答 9. $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$ であるから $(1+i)^{20} = \left((1+i)^2\right)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10} i^{10} = 1024 \cdot (-1) = -1024.$

解答 10. (準備中)

解答 12. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = -1$ は、$x^2 - y^2 = -1$ かつ $2xy = 0$ と同値であるから、$x = 0$, $y = \pm 1$. ゆえに $z = \pm i$.

(別解) $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$ より、$z^2 = -1$ の解は $z = \pm i$.

(時々 i しか書かない人がいる。) $\blacksquare$

解答 13. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = i$ は、$x^2 - y^2 = 0$ かつ $2xy = 1$ と同値である。これを解いて $(x, y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ゆえに $z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$. $\blacksquare$

解答 14. $z_1 := \sqrt{c_1}$, $z_2 := \sqrt{c_2}$ とおくとき、$z_1^2 = c_1$, $z_1 \ge 0$, $z_2^2 = c_2$, $z_2 \ge 0$. $z := z_1 z_2$ とおくと、$z \ge 0$, $z^2 = (z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2 = c_1 c_2$ であるから、$z = \sqrt{c_1 c_2}$. ゆえに $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = z_1 z_2 = z = \sqrt{c_1 c_2}$. $\blacksquare$

解答 15. $c_1, c_2 < 0$ とするとき、$c_1 c_2 > 0$ であるから、$\sqrt{c_1 c_2}$ は $c_1 c_2$ の正の平方根であるが、$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{-c_1} i \cdot \sqrt{-c_1} i = -\sqrt{(-c_1)(-c_2)} = -\sqrt{c_1 c_2}$ は $c_1 c_2$ の負の平方根である。具体的な例としては、$c_1 = c_2 = -1$ とするとき、$\sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{(-1)^2} = 1$, $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = i \cdot i = -1$. $\blacksquare$

解答 16. ($\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ の確認) $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とするとき

$$zw = (x+iy)(u+iv) = xu + x \cdot iv + iy \cdot u + iy \cdot iv = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x-iy)(u-iv) = xu + x \cdot (-iv) - iy \cdot u - iy \cdot (-iv) = (xu - yv) - i(xv + yu)$$

であるから

$$\overline{zw} = (xu - yv) - i(xv + yu) = \overline{z}\,\overline{w}.$$

($\overline{z/w} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ の確認) 前項から

$$\overline{z/w} \cdot \overline{w} = \overline{z/w \cdot w} = \overline{z}$$

であるから

$$\overline{z/w} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}. \blacksquare$$

解答 17. 次のことは高校で学んでいる。

> xy 平面内の任意の直線は、ある $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $\delta\in\mathbb{R}$ を用いて
>
> $$\alpha x+\beta y+\delta=0$$
>
> と表される。また逆に、任意の $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $\delta\in\mathbb{R}$ に対して
>
> $$\alpha x+\beta y+\delta=0$$
>
> は xy 平面内の直線を表す。

$a=\alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$, $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$, $\gamma:=2\delta$ とおくとき

$$a\bar z+\bar a z=a\bar z+\overline{a\bar z}=2\operatorname{Re}(a\bar z)=2\operatorname{Re}\left[(\alpha+i\beta)(x-iy)\right]=2\alpha x+2\beta y.$$

ゆえに

$$a\overline{z}+\overline{a}z+\gamma=0\quad\Leftrightarrow\quad\alpha x+\beta y+\delta=0.$$

また $a\neq 0\Leftrightarrow(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. ■

解答 18. c が $f(z)$ の m 重根であるためには

$$f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(m-1)}(c)=0\quad\wedge\quad f^{(m)}(c)\neq 0$$

が成り立つことが必要十分である。これは

$$\overline{f(c)}=\overline{f'(c)}=\cdots=\overline{f^{(m-1)}(c)}=0\quad\wedge\quad\overline{f^{(m)}(c)}\neq 0$$

と同値であり、$f(z)$ が実係数多項式であるという条件のもとで

$$f(\overline{c})=f'(\overline{c})=\cdots=f^{(m-1)}(\overline{c})=0\quad\wedge\quad f^{(m)}(\overline{c})\neq 0$$

とも同値である。これは $\overline{c}$ が $f(z)$ の m 重根であるという条件である。 ■

解答 19. 中心を c, 半径を r とすると、$|z-c|=r$.

$$\begin{aligned}|z-c|=r\quad&\Leftrightarrow|z-c|^2=r^2\\&\Leftrightarrow(z-c)\overline{(z-c)}=r^2\\&\Leftrightarrow z\bar z-c\bar z-\bar c z+c\bar c=r^2\\&\Leftrightarrow z\bar z-c\bar z-\bar c z+|c|^2-r^2=0.\end{aligned}$$

$\beta=|c|^2-r^2$ とおくと、$\beta<|c|^2$. ■

解答 20. 手短に答える:「z が一般の場合、右辺が何を意味するか、現時点で定義されていない。一般の複素数の冪乗を定義した場合も、右辺は $z\in\mathbb{Z}$ でない限り多価で、一価である左辺と等しくなり得ない。」

以下は、長めのバージョンである。

簡単のため、複素指数関数を f と書くことにする: $f(z)=e^z$ $(z\in\mathbb{Z})$.

問題の式 $e^{nz}=(e^n)^z$ の左辺 e^{nz} は $f(nz)$ と表せる。これは意味がはっきり確定する。一方、右辺 $(e^n)^z$ は、$f(n)^z$ と表せて、$a:=f(n)$ の意味は問題なく確定するが、a^z は何を表すだろうか。

一般の複素数 a の整数乗は既に定義してあることを思い出そう。ゆえに、もしも $z\in\mathbb{Z}$ であれば、意味は確定する。また、既に示してある

$$e^{nz}=(e^z)^n \quad (n\in\mathbb{Z},\ z\in\mathbb{C})$$

が適用できるので (n と z を入れ替える！)、等式が成立することも分かる。

テキストの現時点では、整数でない複素数 b に対して、a,b の冪乗 a^b は定義されていない。ゆえに、$z\notin\mathbb{Z}$ であれば a^z は未定義であり、$e^{nz}=(e^n)^z$ という式はそもそも意味を持たない。

後の方で、一般の $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{C}$ に対して a^b を定義するが、それは $b\in\mathbb{Z}$ でない限り多価である。ゆえに $(e^n)^z$ も $z\in\mathbb{Z}$ でない限り多価である。一方 (明らかであるけれど確認しておくと) $e^{nz}=f(nz)$ は一価である。ゆえに $e^{nz}=(e^n)^z$ は成り立たない。 ■

解答 28. 例えば $z_1=z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ とすると、$\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2=\frac{3\pi}{4}$ であるが、$z_1z_2=e^{i\frac{3\pi}{2}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ であるから、$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=-\frac{\pi}{2}$ ($\frac{3\pi}{2}\notin(-\pi,\pi]$, $\frac{\pi}{2}\in(-\pi,\pi]$ に注意)。ゆえに

$$\operatorname{Arg}(z_1+z_2)=-\frac{\pi}{2}\neq\frac{3\pi}{2}=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2.\blacksquare$$

解答 29. (準備中)

解答 31. WWW におく PDF には書かない。

解答 32. WWW におく PDF には書かない。

解答 33. (結果のみ。解答準備中。)

(1) $\dfrac{1}{z}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$

(2) $z=\sqrt{6}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}$
偏角は一意的でなく、 $z=\sqrt{6}\,e^{\frac{5}{4}\pi i}$ としても良い。

(3) $z^6=-216i$

(4) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}}i\right)$
宿題に出すと正しく答えられる人が多いが、期末試験ではギブアップする人が多い。

(5) $\operatorname{Log} z=\dfrac{1}{2}\log 6-\dfrac{3}{4}\pi i$ あるいは $\operatorname{Log} z=\log\sqrt{6}-\dfrac{3}{4}\pi i$
宿題に出すと正しく答えられる人が多いが、期末試験では $\operatorname{Log} z=\frac{1}{2}\log 6+\frac{5}{4}\pi i$ という答案が続出する。 ■

解答 34.

解答

(1)

$$z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2\cdot iy+3x\cdot(iy)^2+(iy)^3=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$$

であるから、$u(x,y)=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=3x^2y-y^3$.

(2)

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(x+iy)^2+1}=\frac{1}{x^2-y^2+1+2ixy}=\frac{x^2-y^2+1-2ixy}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2}$$

であるから

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2+1}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2},\quad v(x,y)=\frac{-2xy}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)&=\frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}\left(\cos x-i\sin x\right)\right)\\&=\cos x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+i\sin x\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\\&=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y.\end{aligned}$$

解答 40.

(1) (方法 1) f の実部・虚部をそれぞれ u, v とする。

$$f(x+iy)=|x+yi|^2=x^2+y^2$$

であるから

$$u(x,y)=x^2+y^2,\quad v(x,y)=0.$$

これらは (多項式関数であるから) $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級である。ゆえに (全) 微分可能である。

Cauchy-Riemann 方程式を満たすかチェックしよう。

$$u_x(x,y)=2x,\quad u_y(x,y)=2y,\quad v_x(x,y)=0,\quad v_y(x,y)=0.$$

$(x,y)=(0,0)$ のとき、$u_x=0=v_y$ かつ $u_y=0=-v_x$ が成り立つので、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。ゆえに f は $z=0$ で微分可能である。

$(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ のとき、$x\neq 0$ または $y\neq 0$ である。$x\neq 0$ のときは $u_x\neq v_y$, $y\neq 0$ のときは $u_y\neq -v_x$. いずれの場合も Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。ゆえに任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ において f は微分可能ではない。

(方法 2) $z\in\mathbb{C}$, $h\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とするとき

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}&=\frac{|z+h|^2-|z|^2}{h}=\frac{(z+h)\,\overline{(z+h)}-z\overline{z}}{h}=\frac{z\overline{z}+z\overline{h}+h\overline{z}+h\overline{h}-z\overline{z}}{h}\\&=z\frac{\overline{h}}{h}+\overline{z}+\overline{h}.\end{aligned}$$

$\left|\overline{h}\right|=|h|$ であるから、$h\to 0$ のとき $\overline{z}+\overline{h}\to\overline{z}$. ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\ \text{が収束}\Leftrightarrow\lim_{h\to 0}z\frac{\overline{h}}{h}\ \text{が収束}.$$

h が実数ならば $\overline{h}=h$ であるから $\frac{\overline{h}}{h}=1$. h が純虚数ならば $\overline{h}=-h$ であるから $\frac{\overline{h}}{h}=-1$. ゆえに $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ は収束しない。

(a) $z \neq 0$ であれば $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ は収束しないので、f は z で微分可能ではない。

(b) $z=0$ のとき $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = \overline{h} \to 0$ $(h \to 0)$ であるから、f は 0 で微分可能である。

(この方法 2 は、(h が実数の場合、純虚数の場合と考える点で) 結局は Cauchy-Riemann 方程式の 1 つの導出法に近い。あまり良い別解ではないのかも、と私は思う。)

(2) (方法 1) $f(z) := e^z$ の実部 u, 虚部 v は

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

ともに $\mathbb{R}^2$ で C^1 級であるから (全) 微分可能である。また

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y$$

であるから Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で正則である。

すでに示してあるように、正則関数 f に対して一般に

$$f'(x+yi) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

が成り立つ ($f' = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y)$ の左半分)。ゆえに

$$f'(x+yi) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(x+yi).$$

すなわち $f'(z) = f(z) = e^z$. ■

(方法 2) 複素指数関数についても指数法則は証明してあるので、任意の $z \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{e^{z+h}-e^z}{h} = \frac{e^z e^h - e^z}{h} = e^z \frac{e^h - 1}{h}.$$

$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと、$h \to 0$ のとき $(h_x, h_y) \to (0,0)$ である。

$$\frac{e^h-1}{h} - 1 = \frac{1}{h}\left(e^{h_x}(\cos h_y + i \sin h_y) - 1 - (h_x + ih_y)\right) = \frac{R+iI}{h}.$$

ただし

$$R := e^{h_x}\cos h_y - 1 - h_x, \quad I := e^{h_x} \sin h_y - h_y$$

とおいた。

$$R = e^{h_x}\cos h_y - e^{h_x} + e^{h_x} - (1+h_x) = e^{h_x}(\cos h_y - 1) + e^{h_x} - (1+h_x).$$

$$e^{h_x} = O(h_x), \quad \cos h_y - 1 = O(h_y^2), \quad e^{h_x} - (1+h_x) = O(h_x^2) \quad ((h_x, h_y) \to (0,0))$$

であるから

$$R = O\left(h_x^2 + h_y^2\right) \quad ((h_x,h_y) \to (0,0)).$$

また

$$I = e^{h_x}\sin h_y - \sin h_y + \sin h_y - h_y = \left(e^{h_x} - 1\right)\sin h_y + \sin h_y - h_y.$$

$$e^{h_x} - 1 = O(h_x), \quad \sin h_y = O(h_y), \quad \sin h_y - h_y = O(h_y^3)$$

であるから

$$I = O(h_x)O(h_y) + O(h_y^3) \quad ((h_x,h_y) \to (0,0)).$$

$$|h_x h_y| \le h_x^2 + h_y^2, \quad h_y^3 = |h_y| \left(h_x^2 + h_y^2\right)$$

であるから

$$I = O\left(h_x^2 + h_y^2\right).$$

ゆえに

$$\left|\frac{e^h - 1}{h} - 1\right| = \frac{O\left(h_x^2 + h_y^2\right)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = O\left(\sqrt{h_x^2 + h_y^2}\right) \quad ((h_x, h_y) \to (0,0)).$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

ゆえに f は $\mathbb{C}$ で正則であり、$(e^z)' = e^z$. (なかなか面倒である。)

解答 41. $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}$ とすると、合成関数の微分法より、$\dfrac{d}{dt}u(\varphi(t)) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = (u_x\ u_y)\begin{pmatrix}\varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t)\end{pmatrix} = (0\ 0)\begin{pmatrix}\varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t)\end{pmatrix} = 0$. ゆえに $u(\varphi(t))$ は定数関数であるから、$u(a) = u(\varphi(0)) = u(\varphi(1)) = u(b)$. ゆえに u は定数関数である。■

解答 42.

$$f(b) - f(a) = e^{2\pi i} - e^0 = 1 - 1 = 0.$$

ところが $f'(z) = e^z \ne 0$ $(z \in \mathbb{C})$ であるから

$$f'(c)(b-a) = e^c(2\pi i - 0) = 2\pi i e^c$$

はどんな $c \in \mathbb{C}$ に対しても 0 にならないので

$$f(b) - f(a) \ne f'(c)(b-a).■$$

解答 43. 一般にはそうでない。$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立っているとき、$U := v$, $V := u$ とおくと

$$U_x = v_x, \quad U_y = v_y, \quad V_x = u_x, \quad V_y = u_y$$

であるから

$$U_x = v_x = -u_y = -V_y, \quad U_y = v_y = u_x = V_x$$

であるから、U, V に関する Cauchy-Riemann 方程式

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x$$

とは食い違う。■

解答 44. v と V が $u_x = v_y = V_y$, $u_y = -v_x = -V_x$ を満たすならば、$w := v - V$ は $w_x = w_y = 0$ を満たすので、w は定数である。すなわち v と W の差は定数である。$(a, b) \in \Omega$ を固定するとき、任意の $(x, y) \in \Omega$ に対して、(a, b) を始点, (x, y) を終点とする Ω 内の滑らかな曲線 C に対して

$$v(x, y) = v(a, b) + \int_C (v_x dx + v_y dy)\,.$$

Cauchy-Riemann 方程式が成り立つならば

$$v(x, y) = v(a, b) + \int_C (-u_y dx + u_x dx).\blacksquare$$

解答 45. (1 回くらい宿題か何かに使うために、しばらく解答は非公開にしておきます。)

解答 46. $\{z^n\}$ は公比 z の等比数列である。ゆえに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & (z \neq 1 \text{ のとき}) \\ n + 1 & (z = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$|z| < 1$ であれば、$|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1 - z}.$$

すなわち

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

一方、$|z| \geq 1$ であれば、$n \to \infty$ のとき z^n は 0 には収束しないので (もし $z^n \to 0$ であれば $|z|^n = |z^n| \to |0| = 0$ であるが、$|z|^n \geq 1$ であるから矛盾する。) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は収束しない。

以上から、$|z| < 1$ のとき、そのときに限り $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は収束する。 $\blacksquare$

解答 49. 上の証明では、$|f(x) - f_N(x)|$ と $|f_N(x_0) - f_N(x_0)|$ のどちらも $\displaystyle\sup_{y\in\Omega} |f_N(y) - f(y)|$ で評価してあるが、$|f_N(x_0) - f(x_0)|$ は $\{f_n\}$ が f に各点収束することから評価できる。問題は $|f(x) - f_N(x)|$ で、各点収束すると仮定するだけでは、無限個の x に対してこれを小さくすることは出来ない ($|x|$ が小さいと、N を大きく取らないといけない)。$\blacksquare$

解答 52. やれば出来るはず。省略する。こういうのは自分で計算することに意味がある。 $\blacksquare$

解答 53.

$$(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

$\cos z$, $\sin z$ も同様に冪級数展開を項別微分することで計算できるが、

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{ie^{iz} + (-i)e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

のようにしても良い。 $\blacksquare$

解答 54. (略解) (1) c を任意の複素数とする。積の微分法、合成関数の微分法を用いると、$\dfrac{d}{dz}\left(f(z)f(c-a)\right)=0$ $(z\in\mathbb{C})$ が得られる。ゆえに $f(z)f(c-z)$ は定数関数であり、$f(z)f(c-z)=f(0)f(c-0)=1\cdot f(c)=f(c)$. (2) 任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して、$c=a+b$ とおく。$f(z)f(c-z)=f(c)$ $(z\in\mathbb{C})$ が成り立つので、$z=a$ を代入して、$f(a)f(b)=f(c)$. ゆえに $e^ae^b=e^{a+b}$. ■

解答 58. (準備中)

解答 59.

$$x^y=a\quad\Leftrightarrow\quad y\log x=\log a\quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{\log a}{\log x}$$

であることに注意する。$n\in\mathbb{N}$ に対して、$x=\dfrac{1}{n+1}$ とおくと

$$y=\frac{\log a}{\log x}=\frac{-\log a}{\log(n+1)}.$$

そこで

$$x_n:=\frac{1}{n+1},\quad y_n:=\frac{-\log a}{\log(n+1)}$$

とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=0,\quad x_n^{y_n}=a\quad(n\in\mathbb{N}).$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n^{y_n}=a$. ■

解答 60. 一般には成り立たない。前問からすぐ分かる。(暇があったら詳しい解答を書きます。) ■

解答 61. (準備中)

解答 62. (準備中)

解答 66. (工事中) 平面を複素平面として、開円盤が凸領域であることを証明する。

$\Omega=D(c;r)$ とおく。一般に開円盤は開集合であるから、Ω は $\mathbb{C}$ の開集合である。$z_1,z_2\in\Omega$ とする。任意の $t\in[0,1]$ に対して $z:=(1-t)z_1+tz_2$ とおくと、

$$\begin{aligned}|z-c|&=|((1-t)z_1+tz_2)-c|=|(1-t)(z_1-c)+t(z_2-c)|\\&\le|1-t\,|z_1-c|+|t|\,|z_2-c|<(1-t)r+tr=r.\end{aligned}$$

ゆえに $z\in\Omega$. ゆえに $[z_1,z_2]\subset\Omega$. これは Ω が凸であることを示す。凸であれば弧連結であるから、Ω は凸かつ開集合かつ弧連結である。ゆえに Ω は凸領域である。■

解答 67. $[z_0,z_0+h]\subset D(z_0;\varepsilon)\subset\Omega$ であり、$[z_0,z_0+h]$ 上の任意の点 z_0+th $(t\in[0,1])$ と a を結ぶ線分 $[a,z_0+th]$ は、Ω が a について星型であるから、Ω に含まれる。$\displaystyle\Delta=\bigcup_{t\in[0,1]}[a,z_0+th]$ であるから、$\Delta\subset\Omega$. ■

解答 69. $c=a$ のときは簡単である。以下 $c\neq a$ とする。$\rho=|c-a|$ とおくと $\rho>0$.

$a=c+\rho e^{i\phi}$ となる $\phi\in\mathbb{R}$ が取れる。

$\rho=|c-a|<r$ であるから、$\delta:=(r-\rho)/2$ とおくと、$\delta>0$ であり、$\overline{D(a;\delta)}\subset D(c;r)$.

$|z-c|=r$, $|z-a|=\delta$ での積分が一致することを示す。

$0\le\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ を満たす ε に対して、

$$\begin{aligned}
&C_{1,\varepsilon}\colon z=c+re^{i\theta}\quad(\theta\in[\phi+\varepsilon,\phi+2\pi-\varepsilon]),\\
&C_{2,\varepsilon}\colon z=a+\delta e^{i\theta}\quad(\theta\in[\phi+\varepsilon,\phi+2\pi-\varepsilon]),\\
&\Gamma_\varepsilon\colon z=[(1-t)(\rho+\delta)+tr]\,e^{i(\phi+\varepsilon)}\quad(t\in[0,1]),\\
&\Gamma'_\varepsilon\colon z=[(1-t)(\rho+\delta)+tr]\,e^{i(\phi+2\pi-\varepsilon)}\quad(t\in[0,1]),\\
&C_\varepsilon:=\Gamma_\varepsilon+C_{1,\varepsilon}-\Gamma'_\varepsilon-C_{2,\varepsilon}
\end{aligned}$$

とおくと、C_ε は $\varepsilon>0$ のときは星型領域

$$\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{a+re^{i\phi}\mid r\ge0\}$$

内の閉曲線であり、$\dfrac{1}{z-a}$ はそこで正則であるから、

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{dz}{z-a}=0.$$

$\varepsilon\to0$ とすると[97]($\Gamma_0=\Gamma'_0$ に注意して)

$$\int_{C_{1,0}}\frac{dz}{z-a}-\int_{C_{2,0}}\frac{dz}{z-a}=0.$$

すなわち

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}-\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}=0.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-a|=\delta}\frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\delta e^{i\theta}}\cdot i\delta e^{i\theta}d\theta=2\pi i.\blacksquare$$

解答 71. f は $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ で定義されて正則である。f の c のまわりの冪級数展開の収束半径 ρ は、

$$\rho=\min\{|2-i|,|2-(-i)|\}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.\blacksquare$$

解答 73.

$$z\coth z=z\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}=z\left(1+\frac{2e^{-z}}{e^z-e^{-z}}\right)=\frac{2z}{2}+\frac{2z}{e^{2z}-1}=g(2z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{B_{2n}}{(2n)!}2^{2n}z^{2n}.\blacksquare$$

解答 74. (準備中)

[97] ここを厳密にやるのは演習問題とする。

解答 75. (準備中)

解答 76. (略解: $a = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$ とする。$\exp\dfrac{1}{z} = a = re^{i\theta}$ は

$$\exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{z} = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

と同値である。ゆえに

$$\exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \frac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)}$$

と同値である。そこで n を十分大きく取れば…(2), (3) については、$w_n = 1/z_n$ とおいて、w_n について考えると、簡単で具体的な例が見つかる。) ■

解答 77. (準備中)

解答 78. (工事中)

(1)

解答 79. $R_2 = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$, $R_1 = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}\right)$. ■

解答 82. (1) $\dfrac{5\pi}{12}$ (2) $\dfrac{\pi}{16|a|^3}$

解答 83.

$$\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right), \qquad \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right)$$

から

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s-i\omega}; i\omega\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s+i\omega}; -i\omega\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \cos\omega t,$$
$$\frac{1}{2i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s-i\omega}; i\omega\right) - \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ts}}{s+i\omega}; -i\omega\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \sin\omega t. \blacksquare$$

15 期末試験の準備

こんなこと書くか、という気もするけれど。

15.1 日頃から

授業には出来る限り出席しよう。中途半端に出席したりしなかったりするのは損である。

出欠は取っているけれど、出席点をつける気はない。それでも出席を取っている理由は以下の二つ。

- 出席すべき授業でも、出欠を取らないのならば出席する必要はない、と考える幼い学生が少なくないようなので、低学年に配置されている講義では、出席するようにプレッシャーをかけてやろう、と思っている。

- なるべく学生の顔と名前を覚えたいと思っている (それに役立つように、名前を呼んでなるべく顔を見る…このところ視力が落ちてつらい…)。

最近は親御さんから「うちの子は授業に出ているでしょうか」という照会が時々あり、それに役立つ、というのもある (何か高校みたいだね)。

宿題も頑張って解いて提出しよう。宿題は、類題を授業中に例として出してある場合がほとんどである。(授業で習ったことをほとんどヒネリなく問うような問題が多く、天邪鬼な人にとっては馬鹿馬鹿しく感じられるかもしれない、と懸念しているのだけど、実際には) 授業をまったく無視しているかのような答案が案外と多い。もう少し素直にやった方が得だと思うんだけど。

一つ注意しておく。宿題を授業中に内職で解くのはやめよう。授業中は講義内容に集中することを勧める。

15.2 試験が迫ってから

私は期末試験の過去問とその解答は公開することにしていて、それを見れば、何を重要と考えて尋ねているか、一目瞭然だと思っているのだけど、どうもなかなか分かりにくいみたいだね。勉強の途上にある人には仕方がないのかも。

何を習得すべきか把握するには、むしろ宿題に出た問題を精査する方が分かりやすいかもしれない。期末試験を解くために必要なことのほとんどすべては、宿題の中に現れるようにしてあって、その解答の中で十分な解説をしてあるつもりである (色々なことから逆算して宿題を作っています)。

定積分の留数を用いた計算は、学期の最後に出て来るが、関数論の重要事項をマスター出来たかの判定にふさわしいと考えているので、必ず準備して欲しい。その重要性については、授業中に何度も言及しているつもりだけれど、その問題を捨てる学生が増えて来ているような気がする。…とういうわけで、最近は、必ず解くように指定している (子供を相手にしているようで嫌…)。

15.3 (追試がある場合に) 追試前

追試験をする場合がある。武運拙く本試験を不合格になった場合、一番重要なことは、本試験の答案を見に行くことである。正直言って、学期末は忙しくて、相手をするのはしんどいけれど、学生からリクエストがあれば、可能な限り答案を見せて説明することにしている。最近は、どう頑張っても、対面して説明する時間が取れない場合もある (成績評価の締め切りはタイトだし、土日も校務が入ったりするし、卒業研究や修士論文の締めともほぼ重なるので)。そういう場合は、メールで採点状況 (どの問題が何点であったか等) を尋ねて下さい。

それをしないで漠然とした準備をしても (本人は一所懸命やっているつもりかもしれないけれど、こちらから見ると「2 階から目薬 」みたいな)、合格する可能性はなかなか高くならない。

付録

この講義の目標は、標準的な関数論の講義の目標と同じだけれど、必修の微積分で極限に関することは証明抜きで済ませているので、真面目に解説しようとすると、時々思いのほか忙しいところがある。

重要なところは本文中 (授業中) に説明するが、そうでないところは付録にまわすことにした。付録に書いてあることは、最初に学ぶときはあまり気にしなくても良いと思う。数学という学問はそういうことが比較的やりやすい。定義自体は比較的短く書けるので、定理の主張は、証明を読まなくても (証明に用いる理論を学ばなくても)、短時間で理解可能であることが多い[98]。

「数学解析」との関係について

2 年生春学期の「数学解析」 ([20]) は、微積分に現れる極限に関わる事項について解説する講義科目である。

この「複素関数」は、受講する学生が「数学解析」を履修していることを前提としている。「数学解析」で学んだことは遠慮なく使わせてもらう。

- 数列・点列の極限の定義と基本的な性質。Bolzano-Weierstrass の定理、「上に有界な単調増加数列は収束する。」等。
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ の完備性。
- 開集合、閉集合の定義と基本的な性質。「閉集合はそれに含まれる数列の極限を必ず含む。」等。
- 関数 (多変数ベクトル値関数を含む) の極限、連続性の定義と基本的な性質。Weierstrass の最大値定理等。
- 積分の定義。「閉区間上の連続関数は積分可能。」等。

一方で「数学解析」で説明できなかったことは、この講義の中で説明するように努めている。

A　級数についての補足

「数学解析」では、完備性の定義と、$\mathbb{R}^n$ が完備であることを証明した以外に、詳しいことは説明できなかったので、級数の収束・発散については、ある程度まで「複素関数」の中で説明することにしている。

[98]水ももらさないように定義をするのは、外野から見ると理解しづらいかもしれないけれど、そうしておくと、すっぱり割り切れて便利なんです。数学の定理で主張していることに例外は存在しない。

A.1 $\mathbb{C}$ の完備性

定義 A.1 (Cauchy 列) $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\ell$, $\mathbb{C}^\ell$ でも OK) 内の数列 $\{a_n\}$ が、**Cauchy 列**であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

命題 A.2 $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\ell$, $\mathbb{C}^\ell$ でも OK) 内の任意の収束列は Cauchy 列である。

証明 $\{a_n\}$ が a に収束するとする。ε を任意の正数とするとき、$\varepsilon/2 > 0$. 収束の定義から、($\exists N \in \mathbb{N}$) ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n \geq N$) $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. ゆえに $n \geq N$, $m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ゆえに $\{a_n\}$ は Cauchy 列である。■

実はこの命題の逆が成り立つ。そのことを「$\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\ell$, $\mathbb{C}^\ell$ でも OK) は**完備**である」という。一般に任意の Cauchy 列が収束するような距離空間は**完備**であるという。

定理 A.3 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^\ell$, $\mathbb{C}^\ell$ は完備である。

証明 距離空間として $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ と、$\mathbb{C}^\ell$ は $\mathbb{R}^{2\ell}$ と同じなので、$\mathbb{R}^\ell$ について証明すれば良い。

$\{x_n\}$ を $\mathbb{R}^\ell$ の Cauchy 列とする。これが収束すること、言い換えると極限が存在することを示すのが目標である。

$\{x_n\}$ が有界であることはすぐに分かる (練習問題とする)。

$\{x_n\}$ が有界であるので、Bolzano-Weierstrass の定理によって、収束部分列が存在する。すなわち ($\exists a \in \mathbb{R}^\ell$) ($\exists \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$: $\{x_n\}$ の部分列) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

ε を任意の正数とする。$\{x_n\}$ が Cauchy 列であるから、($\exists N \in \mathbb{N}$) ($\forall n \in \mathbb{N}$: $n \geq N$) ($\forall m \in \mathbb{N}$: $m \geq N$)

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

$k \geq N$ を満たす任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$n_k \geq k \geq N$ であるから、(m のところに n_k が代入できて)

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

$k \to \infty$ とすると

$$|x_n - a| \leq \varepsilon.$$

これは $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ であることを示している。ゆえに $\{x_n\}$ は収束列である。■

問 84. Cauchy 列は有界であることを示せ。

問 85. $\mathbb{R}^\ell$ の点列 $\{x_n\}$, $a, c \in \mathbb{R}^\ell$, $r > 0$ が $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ($\forall n \in \mathbb{N}$) $|x_n - c| < r$ を満たしているとき、$|a - c| \leq r$ が成り立つことを示せ。

(解説: 数列であれば $|x_n - c| < r$ は $c - r < x_n < c + r$ と同値なので、「数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, ($\forall n \in \mathbb{N}$) $x_n \leq y_n$ を満たすならば $a \leq b$」という定理から $c - r \leq a \leq c + r$ が導けるが、点列の場合はどうすれば良いか、という問題である。)

A.2 級数の収束判定

(もう少しすっきり読み易くしたい。)

級数が与えられたとき、それが収束することを証明する必要がしばしば生じる。

入門段階の複素関数論では、次の 2 つの定理があれば、90% 程度は処理可能である。両者は良く似ていて、覚えるときには一つの定理にまとめてしまうことも可能ではある。それで並べて見せることにする。

定理 A.4 (Weierstrass の M-test (M 判定法), 本文中の命題 ??) K を空でない集合とする。K で定義された (複素数値を取る) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ $(z \in K)$ に対して、次の 2 条件を満たす $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ は K で一様に絶対収束する。

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall z \in K)$ $|a_n(z)| \le b_n$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。

定理 A.5 (優級数の定理) 複素数の級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、次の 2 条件を満たす $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n| \le b_n$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。

この項では、定理 A.5 のみ証明する。まず定理に現れる「絶対収束」という言葉を定義しよう。

定義 A.6 (絶対収束) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束する**と言う。

次の命題が基本的である。証明は無理に覚えなくても良いが、$\mathbb{C}$ が完備であることをどのように使っているかを読み取ると良い (Cauchy 列、完備性が自然に会得できるかも)。

命題 A.7 (絶対収束級数は収束する) 複素数の級数は、絶対収束するならば収束する。

証明 $\displaystyle\sum_{n} a_n$ が絶対収束するとする。

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

とおく。仮定から $\{S_n\}$ は収束列であるから、命題 A.2 によって Cauchy 列である。

$n, m \in \mathbb{N}$ とする。$n > m$ の場合は

今日の式変形はこれ！

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| = S_n - S_m.$$

同様に $n < m$ の場合は $|s_n - s_m| < S_m - S_n$ が得られるので、一般に

$$|s_n - s_m| \leq |S_n - S_m|$$

が成り立つ。ゆえに $\{s_n\}$ は Cauchy 列である。定理 A.3 より $\{s_n\}$ は収束列である。すなわち $\sum_n a_n$ は収束する。■

絶対収束はしないが、収束はする級数は、**条件収束**するという。条件収束する級数には例えば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ などがある。

問 86. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であることを示せ。

問 87. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の部分和の作る数列を $\{s_n\}$ とするとき、$\{s_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{s_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が、それぞれ上に有界な単調増加数列、下に有界な単調減少数列であることを確かめ、共通の極限に収束することを示せ。

この 2 つの問に解答すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ が条件収束することが証明できたことになる。

後で Abel の定理という定理を紹介するときに、この級数についてまとめて解説する予定である。実は極限は $\log 2$ になることが分かる。

絶対収束は各項の大きささえ十分小さければ収束ということで、大きさの比較の話に持ち込めて考えやすい。優級数の定理はそれが分かり易い形に現れている。

早速、優級数の定理の証明にとりかかる。優級数の定理は、定理 A.7 の一般化のようなもので、証明も上の定理と良く似ている。

優級数の定理の証明 $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|,\ T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$ とおく。仮定から $\{T_n\}$ は収束列であるから、命題 A.2 によって Cauchy 列である。

$n, m \in \mathbb{N}$ とする。$n > m$ の場合は

$$|S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = T_n - T_m.$$

同様に $n < m$ の場合は $|S_n - S_m| \leq T_m - T_n$ が成り立つので、一般に

$$|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|.$$

これから $\{S_n\}$ は Cauchy 列であるから、定理 A.3 より $\{S_n\}$ は収束列である。すなわち $\sum_n a_n$ は絶対収束する。■

優級数の定理を用いるには、与えられた $\sum_n a_n$ に対して、適当な収束する級数 $\sum_n b_n$ を見つけることが必要になる。

$\{b_n\}$ としては、

$$b_n = Mr^n \quad (ここで\ 0 \le r < 1)$$

や

$$b_n = \frac{M}{n^\alpha} \quad (ここで\ \alpha > 1)$$

などが良く使われる。冪級数の場合は前者 (等比級数) の使用頻度が高い。

次の定理も知っておくと良い (というか、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ の収束を示すのにぴったり[99])。

命題 A.8 (部分和が上に有界な正項級数は収束する) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が以下の 2 条件を満たすならば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \ge 0.$

(ii) $(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N})\quad \sum_{k=1}^{n} b_k \le M.$

(条件 (i) が成り立つとき、$\sum_n b_n$ は**正項級数**という。優級数定理を使おうとするとき $|a_n| \le b_n$ という条件があるので、自動的に (?) 条件 (i) が成り立つ。そこで条件 (ii) が要点となる条件ということになる。)

証明　条件 (i) より、部分和 $T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$ の作る数列 $\{T_n\}$ は単調増加数列である。条件 (ii) は $\{T_n\}$ が上に有界ということを意味しているので、「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理によって、$\{T_n\}$ は収束する。すなわち $\sum_n b_n$ は収束する。■

例 A.9 (「信号処理とフーリエ変換」から) (唐突に別の講義で出て来たものにジャンプ) 内積空間 X の要素 f と正規直交系 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |(f, \varphi_n)|^2 \le \|f\|^2$$

という不等式が証明できる。このとき $\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$ は収束する。$b_n = |(f, \varphi_n)|^2$, $M = \|f\|^2$ として命題 A.8 を適用するわけである。そして

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \le \|f\|^2$$

が成り立つ (これは Bessel の不等式と呼ばれる有名な不等式である)。■

[99]結局、授業中に書くことに。例のグラフを描いて、$n \ge 2$ ならば $\frac{1}{n^\alpha} \le \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$. それから $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n \le \frac{1}{\alpha - 1}$.

A.3　Cauchy-Hadamard の定理

(少し前まで誤りの山だった。読んでくれた人には、とてもとても申し訳ない。現在も工事中で、書くべきところで書いていないものもあるし、書いてはあるけれど、もっとすっきりした説明が出来るはずと考えているところもある。)

A.3.1　上極限と下極限

(上極限を使えるようになると、かなり便利になるが、時間との兼ね合いで、どこまで学ぶか、なかなか悩ましい。証明抜きで公式や定理を覚えて済ませるのは、必要なことは原則として証明するというこの講義の方針に反するということもある。)

実数列 $\{a_n\}$ に対して、上極限と呼ばれる $\limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, 下極限と呼ばれる $\liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ が定義される。

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界である場合は、任意の $n\in\mathbb{N}$ について、$\{a_k \mid k\ge n\}$ の有限な上限

$$\sup_{k\ge n} a_k = \sup\{a_k \mid k\ge n\}$$

が存在する。一般に

$$\{a_k \mid k\ge 1\}\supset\{a_k \mid k\ge 2\}\supset\{a_k \mid k\ge 3\}\supset\cdots$$

であるから、

$$\sup_{k\ge 1} a_k \ge \sup_{k\ge 2} a_k \ge \sup_{k\ge 3} a_k \ge \cdots.$$

すなわち $\left\{\sup_{k\ge n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少数列である。$-\infty$ になることも許せば、

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} a_k \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$$

が確定する。

一方、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界でない場合は、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\{a_k \mid k\ge n\}$ は上に有界でないので

$$\sup_{k\ge n} a_k = \sup\{a_k \mid k\ge n\} = +\infty.$$

このときは $\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\ge n} a_k = +\infty$ とする。

(補完実数直線 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ について、sup, inf, lim をきちんと定義しておくべきであるが、そこははしょる。)

こうして定まる

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\ge n} a_k = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} a_k \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$$

を数列 $\{a_n\}$ の**上極限** (the limit superior of $\{a_n\}$) と呼び、$\limsup_{n\to\infty} a_n$ で表す ($\limsup$ の代わりに $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ という記号を用いることもある)。

まとめ

(sup, inf, lim として ∞, $-\infty$ を許すことにして) $\{a_n\}$ を実数列とするとき

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_n = \inf_{n\geq \mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_n.$$

- $\{a_n\}$ が上に有界でないならば $\limsup_{n\to\infty} a_n := +\infty$.
- $\{a_n\}$ が上に有界ならば、(このとき $\left\{\inf_{k\geq n} a_k\right\}$ は単調減少する実数列である) $\limsup_{n\infty} a_n \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.

  特に $\{a_n\}$ が有界ならば $\limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ であるが、$\{a_n\}$ が上に有界であり下には非有界であっても $\limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ となることがありうる。

同様にして、$\{a_n\}$ の**下極限** (the limit inferior of $\{a_n\}$) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$ を定義するが、説明を省略する (分かってもらえると信じる)。

命題 A.10 $\{a_n\}$ は実数列、S は実数とする。$\limsup_{n\to\infty} a_n = S$ が成り立つためには、次の (a), (b) が成り立つことが必要十分である。

(a) $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists N\in\mathbb{N})$ $(\forall n\in\mathbb{N}\colon n\geq N)$ $a_n < S+\varepsilon$

(b) $(\forall\varepsilon>0)$ $(\forall N'\in\mathbb{N})$ $(\exists n\in\mathbb{N}\colon n\geq N')$ $a_n > S-\varepsilon$
(すなわち、任意の正の数 ε に対して、$a_n > S-\varepsilon$ を満たす n が無限個存在する)

証明 (必要性) $\limsup_{n\to\infty} a_n = S$, すなわち

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}: n\geq N) \quad S-\varepsilon < \inf_{k\geq n} a_k < S+\varepsilon$$

が成り立つと仮定する。

(a) ε を任意の正の数とすると、ある自然数 N が存在して、

$$(\forall n\in\mathbb{N}: n\geq N) \quad S-\varepsilon < \sup_{k\geq n} a_k < S+\varepsilon.$$

このとき

$$a_n \leq \sup_{k\geq n} a_k < S+\varepsilon \quad ゆえに \quad a_n < S+\varepsilon.$$

(b) ε を任意の正の数、N' を任意の自然数とする。ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n\in\mathbb{N}: n\geq N) \quad S-\varepsilon < \sup_{k\geq n} a_k < S+\varepsilon.$$

$n := \max\{N, N'\}$ とおくと、$n\geq N$ であるから

$$S-\varepsilon < \sup_{k\geq n} a_k.$$

ゆえに、ある $k\in\mathbb{N}$ が存在して

$$S-\varepsilon < a_k, \quad k\geq n.$$

$k\geq n\geq N'$ であるから、(b) が成り立つ。

(十分性) (a), (b) が成り立つと仮定する。まず (a) より $\{a_n\}$ は上に有界であり、$\left\{\sup_{k\ge n} a_k\right\}$ は実数列である。

ε を任意の正の数とする。(a) より、ある自然数 N が存在して

$$\sup_{k\ge N} a_k \le S+\varepsilon.$$

このとき $n\ge N$ を満たす任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$\sup_{k\ge n} a_k \le \sup_{k\ge N} a_k$ であるから、$\sup_{k\ge n} a_k \le S+\varepsilon.$

一方、(b) より ($N'=n$ として適用して)

$$\sup_{k\ge n} a_n > S-\varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} a_k = S.$ ■

例 A.11 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} = z^0+z^1+z^4+z^9+\cdots$ の収束を Cauchy-Hadamard の公式を用いて考えるとき、

$$a_n := \begin{cases} 1 & (k^2=n \text{ を満たす } k\in\mathbb{Z}_{\ge 0} \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

という数列 $\{a_n\}$ について $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ を知りたくなる。

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1 & (k^2=n \text{ を満たす } k\in\mathbb{Z}_{\ge 0} \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であるから、任意の n について $\sup_{k\ge n} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$ ゆえに

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

(ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{1}=1.$)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z^1+z^2+z^6+z^{24}+z^{120}+\cdots$ も同様に扱える。■

$\{a_n\}$ が実数列, $S\in\mathbb{R}$ の場合、$\lim_{n\to\infty} a_n = S$ とは、

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}: n\ge N)\quad S-\varepsilon < a_n < S+\varepsilon$$

が成り立つことであるので、上極限と下極限は極限を弱くした概念であり、上極限と下極限が等しくなるとそれは極限である。正確には次の定理が成り立つ。

系 A.12 実数列 $\{a_n\}$ と $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad\Leftrightarrow\quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a.$$

証明 (準備中)

数列の「集積点」という言葉を知っていれば、$\{a_n\}$ の上極限 a とは、$\{a_n\}$ の集積点のうち「最大のもの」である、と言っても良い (という主張はよく目にする。証明はいつか書くかもしれないが…集積点が無限個存在したりするのかな、そのときそれらの sup が実は集積点で最大値となる？意外と面倒そうだ。何か勘違いしている？？)。

(集積点 (特に部分集合の集積点) という言葉は、微積分の教科書レベルでは、あまり使われなくなってきている気がする…念のため、定義を書いておく。)

定義 A.13 (集積点 — 上極限のことを手短に知るという目的からは少し遠回り？)

(1) X を位相空間、A を X の部分集合、$a \in X$ とする。a が A の**集積点** (an accumulation point) であるとは、a の任意の近傍 U に対して、$(U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ (U が a 以外の A の点を含む) が成り立つことをいう。a が A の**孤立点**であるとは、a が A の集積点ではなく、かつ $a \in A$ であることをいう。

(2) (実数列の集積点) $\{a_n\}$ を実数列、$a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ とするとき、a が数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**集積点** (a cluster point, an accumulation point) であるとは、a の任意の近傍 U に対して $a_n \in U$ を満たす n が無限個存在することをいう。

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = a$ とおくとき、a は数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の集積点である。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の値域 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (これは位相空間 $\mathbb{R}$ の部分集合である) は $\{a\}$ に等しい。a は $\{a\}$ の集積点ではない。数列の集積点と部分集合の集積点を混同しないよう注意が必要である。

a が数列 $\{a_n\}$ の集積点であるためには、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ が成り立つことが必要十分である。

例 A.14 $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とする。つまり

$$-1+1, 1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, -1+\frac{1}{5}, 1+\frac{1}{6}, \cdots$$

すなわち

$$0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6} \cdots$$

$k = 1, 2, \cdots$ に対して、$-\dfrac{2k-2}{2k-1}$, $\dfrac{2k+1}{2k}$ が現れる。

$\{a_n\}$ は収束しないが

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{-(2k-2)}{2k-1} = -1.$$

ゆえに -1 と 1 は $\{a_n\}$ の集積点である。これ以外に集積点がないことは "明らか[100]" なので

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

一般化すると、$\lim_{k\to\infty} a_{2k}$ と $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}$ が収束するならば

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max\left\{\lim_{k\to\infty} a_{2k}, \lim_{k\to\infty} a_{2k-1}\right\}, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \min\left\{\lim_{k\to\infty} a_{2k}, \lim_{k\to\infty} a_{2k-1}\right\}. \blacksquare$$

[100] a_n と $\{1, -1\}$ との距離は、$\dfrac{1}{n}$. 1 と -1 以外の任意の実数 a に対して、$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|a-1|, |a-(-1)|\}$ とおく。$\frac{1}{N} < \varepsilon$ となる $N \in \mathbb{N}$ を選ぶと、すべての $n \geq N$ に対して a_n は $U := (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ に含まれる。a (U との距離は ε) は $\{a_n\}$ の集積点にはなり得ない。

例 A.15 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ と $b \in \mathbb{R}$ が

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \geq 0,$$

$$a_n = \begin{cases} a_n & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

を満たすならば

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = b.$$

例えば冪級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ の収束半径を考えるとき、n 次の項の係数を a_n とすると

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} & (n \text{ は偶数}) \\ 0 & (n \text{ は奇数}). \end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$ を認めれば、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

ゆえにこの冪級数の収束半径は $\frac{1}{0} = +\infty$. ■

命題 A.16 (1) $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(2) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$.

(3) $a_n \leq b_n$ であれば $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$.

A.3.2 正項級数に対する Cauchy-Hadamard の定理

補題 A.17 (正項級数に対する Cauchy-Hadamard の定理) 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、$\lambda := \displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ とおくとき、次が成り立つ。

(1) $0 \leq \lambda < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $\lambda > 1$ ($\lambda = \infty$ のときも含めて) ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

($\lambda = 1$ の場合はケース・バイ・ケースである。)

証明

(1) $0 \leq \lambda < 1$ とする。$\lambda < \mu < 1$ なる μ を任意に取ると、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)$ $\sqrt[n]{a_n} < \mu$. このとき $a_n < \mu^n$. N を 1 つ固定して、

$$b_n := \begin{cases} a_n & (1 \leq n \leq N-1) \\ \mu^n & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \le b_n$ で、

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \frac{\mu^N}{1-\mu}.$$

優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $\lambda > 1$ とする。$\sqrt[n]{a_n} > 1$ を満たす n が無限にたくさん存在する。そういう n に対して $a_n > 1$ であるから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ とはならない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。■

正項級数に対する d'Alembert の定理というものもある。

命題 A.18 (正項級数に対する d'Alembert の定理) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は正項級数で、$a_n \ne 0$ を満たすとする。

$$\lambda := \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \mu := \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

とおくとき、次が成り立つ。

(1) $0 \le \lambda < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $\mu > 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

証明 (証明は上と同様に出来るので省略する。) ■

実は一般に

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

が成り立つので、(lim sup, lim inf が具体的に計算できる限り) Cauchy-Hadamard の定理の方が d'Alembert の定理よりも強いが、$\left\{\begin{matrix}\limsup\\ \liminf\end{matrix}\right\} \sqrt[n]{a_n}$ の計算は $\left\{\begin{matrix}\limsup\\ \liminf\end{matrix}\right\} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ の計算より難しいことが多く、応用上は d'Alembert の定理は便利である。

A.3.3 冪級数に対する Cauchy-Hadamard の定理

定理 A.19 (冪級数に対する Cauchy-Hadamard の定理) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、

$$\rho = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-c)^n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(|z-c| \sqrt[n]{|a_n|}\right) = |z-c| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

補題 A.17 によって、これが <1 のとき収束、>1 のとき発散する。ゆえに $\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ が収束半径である。■

A.3.4 $\limsup \sqrt[n]{a_n}$ の計算に便利な補題

例えば冪級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を項別微分して得られる $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ の収束半径が元の冪級数の収束半径と同じであることを証明するには、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ があると役に立つ。

補題 A.20 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1.$

別証明 $a_n:=\sqrt[n]{n^k}$ とおくと、

$$\log a_n=\frac{k\log n}{n}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

ゆえに

$$a_n=e^{\log a_n}\to e^0=1.■$$

例えば、$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ の収束半径を Cauchy-Hadamard の公式で求めたいとき、

$$a_n=\begin{cases}1 & (k!=n \text{ となる } k\in\mathbb{N} \text{ が存在するとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

に対して、$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ を計算する必要があるが、そういうとき、次の命題は便利である。

命題 A.21 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は実数列で、$b\in\mathbb{R}$, X は $\mathbb{N}$ の無限部分集合とする。

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b.$

(ii) $n\in X$ のとき、$a_n=b_n$, $n\in\mathbb{N}\setminus X$ のとき $a_n<b.$

が成り立つならば、$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n=b.$

証明 ε を任意の正の数とする。$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ であるから、ある自然数 N が存在して、

$$(\forall n\in\mathbb{N}: n\geq N)\quad b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon.$$

(i) n を $n\geq N$ を満たす任意の自然数とする。もし $n\in X$ であれば、$a_n=b_n$ であるから $b-\varepsilon<a_n<b+\varepsilon$. $n\in\mathbb{N}\setminus X$ であれば $a_n<b$. いずれの場合も $a_n<b+\varepsilon$ が成り立つ。

(ii) N' を任意の自然数とする。X は $\mathbb{N}$ の無限部分集合であるから、$\max\{N,N'\}$ より大きな $n\in X$ が存在する。そのとき、$a_n=b_n$, $b-\varepsilon<b_n$ であるから、$b-\varepsilon<a_n$.

以上より $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n=b$. ■

命題 A.22 $\{A_n\}$, $\{k_n\}$ は正項級数で $\lim_{n\to\infty} k_n = k(>0)$, $\limsup_{n\to\infty} A_n = A$ とするとき、$\limsup_{n\to\infty} k_n A_n = kA$.

証明 (省略) ■

他にもあったはずだけど、すぐに思い出せない…

A.4 絶対収束に関する命題

もっとも有名な「絶対収束するならば収束する」はすでに紹介したが (命題 A.7)、それ以外の有名な定理を述べよう。

命題 A.23 (絶対収束するならば可換収束) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば、任意の全単射 $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して、$b_n = a_{\varphi(n)}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

証明 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

さらに

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad S := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

とおく。後のための記号

$$I_n := \{1, 2, \cdots, N\}, \quad J_n := \varphi^{-1}(I_n)$$

も定義しておく。

仮定から、$n \to \infty$ のとき $S_n \to S$. ゆえに、任意の正の数 ε に対して、ある自然数 N が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

「絶対収束 $\Rightarrow$ 収束」という定理の証明でも示したように、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|s - s_n| \leq |S - S_n|$$

が成り立つ (大雑把には[101]: $|s - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| = |S - S_n|$)。

ゆえに

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$J_N = \varphi^{-1}(I_N) = \{j \mid \varphi(j) \in I_N\} = \{j \mid 1 \leq \varphi(j) \leq N\}$ である。

$$N' := \max J_N$$

---

[101] ちゃんとやると: $m > n$ として、$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = S_m - S_n = |S_m - S_n|$. ここで $m \to \infty$ として $|s_n - s| \leq |S - S_n|$.

とおくと、$J_N \subset I_{N'}$ が成り立つ。実は

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N') \quad \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - s \right| < \varepsilon$$

が成り立つ。

$n \geq N'$ ならば $I_{N'} \subset I_n$ であるから $J_N \subset I_n$. そこで

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} = \sum_{k \in I_n} a_{\varphi(k)} = \sum_{k \in J_N} a_{\varphi(k)} + \sum_{k \in I_n \setminus J_N} a_{\varphi(k)}$$

と分解したとき、

(i) $\{\varphi(k) | k \in J_N\} = \varphi(\varphi^{-1}(I_N)) = I_N$ であるから、$\displaystyle\sum_{k \in J_n} a_{\varphi(k)} = \sum_{j=1}^{N} a_j = s_N$. ゆえに

$$\left| \sum_{k \in J_n} a_{\varphi(k)} - s \right| = |s_N - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(ii) $k \in I_n \setminus J_N$ とするとき、$k \notin J_N$ より $\varphi(k) \notin I_n$. ゆえに $\varphi(k) > N$ であるから

$$\left| \sum_{k \in I_n \setminus J_N} a_{\varphi(k)} \right| \leq \sum_{k \in I_n \setminus J_N} \left| a_{\varphi(k)} \right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| = |S - S_N| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - s \right| &= \left| \sum_{k \in J_N} a_{\varphi(k)} + \sum_{k \in I_n \setminus J_N} a_{\varphi(k)} - s \right| \\ &\leq \left| \sum_{k \in J_N} a_{\varphi(k)} - s \right| + \left| \sum_{k \in I_n \setminus J_N} a_{\varphi(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

定理 A.24 (絶対収束級数の積, Cauchy's theorem) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束するならば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (\text{左辺の級数は絶対収束}).$$

(左辺は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r+s=n} a_r b_s$ のように書かれることも多い。$\sum a_n$ と $\sum b_n$ の **Cauchy product** とも呼ばれる。)

証明　まず絶対収束することは

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{p+q=n} |a_p| |b_q| \leq \left(\sum_{p=0}^{m} |a_p| \right) \left(\sum_{q=0}^{m} |b_q| \right) \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \right) < \infty.$$

杉浦先生の本には添字について図示してあり、分りやすい。

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{2m} c_n - \sum_{p=0}^{m} a_p \sum_{q=0}^{m} b_q\right| &\le \sum_{q=m+1}^{2m}\sum_{p=0}^{2m-q}|a_p|\,|b_q| + \sum_{p=m+1}^{2m}\sum_{q=0}^{2m-p}|a_p|\,|b_q| \\ &\le \sum_{q=m+1}^{2m}\sum_{p=0}^{m}|a_p|\,|b_q| + \sum_{p=m+1}^{2m}\sum_{q=0}^{m}|a_p|\,|b_q| \\ &\le \sum_{q=m+1}^{2m}|b_q|\cdot\sum_{p=0}^{m}|a_p| + \sum_{p=m+1}^{2m}|a_p|\cdot\sum_{q=0}^{m}|b_q| \\ &\to 0\cdot\sum_{p=0}^{\infty}|a_p| + 0\cdot\sum_{q=0}^{\infty}|b_q| = 0 \quad (m\to\infty).\end{aligned}$$

もちろん

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{2m} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,\quad \lim_{m\to\infty}\sum_{p=0}^{m} a_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,\quad \lim_{m\to\infty}\sum_{q=0}^{m} b_q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

であるから、目標だった等式が成り立つ。 ■

命題 A.25 (Cauchy 積は片方が絶対収束するならば OK, Mertens' theorem) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束し、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j+k=n} a_j b_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

証明 (小堀 [46] による。) $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$A_n := \sum_{j=0}^{n} a_j,\quad B_n := \sum_{j=0}^{n} b_j,\quad C_n := \sum_{j+k=n} a_j b_k$$

とおく。仮定から

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n,\quad B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n,\quad M := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

はいずれも収束し、A, B, M は有限の実数である。また、$B_n\to B$ であるから

$$L := \sup_{n\in\mathbb{N}} |B-B_n| < +\infty$$

である (「収束列は有界」)。

ε を任意の正の数とする。

$B_n\to B$ $(n\to\infty)$ であるから、ある $N_1\in\mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall m\in\mathbb{N}: m\ge N_1)\quad |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{3(M+1)}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ が収束するので、ある $N_2\in\mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{n=N_2}^{\infty}|a_n| < \frac{\varepsilon}{3(L+1)}.$$

$A_n \to A$ $(n \to \infty)$ であるから、ある $N_3 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_3) \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3(|B|+1)}.$$

$N := \max\{N_1 + N_2 - 1, N_3\}$ とおくと、$N \in \mathbb{N}$ である。以下、$n \geq N$ を満たす任意の n に対して

$$\left|\sum_{\ell=0}^{n} s_\ell - AB\right| < \varepsilon$$

が成り立つことを証明する。

　まず

$$\sum_{\ell=0}^{n} C_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{j+k=\ell} a_k b_k = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n-j} b_k = \sum_{j=0}^{n} a_j B_{n-j}$$

であるから

$$\sum_{\ell=0}^{n} C_\ell - A_n B = \sum_{j=0}^{n} a_j B_{n-j} - \sum_{j=0}^{n} a_B = \sum_{j=0}^{n} a_j (B_{n-j} - B).$$

$n \geq N_1$ に注意して

$$(\heartsuit) \quad \left|\sum_{\ell=0}^{n} C_\ell - A_n B\right| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \, |B_{n-j} - B| = \sum_{j=0}^{n-N_1} |a_j| \, |B_{n-j} - B| + \sum_{j=n-N_1+1}^{n} |a_j| \, |B_{n-j} - B|$$

と分解する。

　右辺第 1 項において、$n - j \geq n - (n - N_1) = N_1$ であるから $|B_{n-j} - B| < \dfrac{\varepsilon}{3(M+1)}$ が成り立つので

$$\sum_{j=0}^{n-N_1} |a_j| \, |B_{n-j} - B| < \sum_{j=0}^{n-N_1} |a_j| \frac{\varepsilon}{3(M+1)} \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3(M+1)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

　$(\heartsuit)$ の右辺第 2 項については、まず

$$\sum_{j=n-N_1+1}^{n} |a_j| \, |B_{n-j} - B| \leq L \sum_{j=n-N_1+1}^{n} |a_j| \, .$$

$n \geq N_1 + N_2 - 1$ であるから、$j \geq (N_1 + N_2 - 1) - N_1 + 1 = N_2$ が成り立つので、

$$\sum_{j=n-N_1+1}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=N_2}^{\infty} |a_j| < \frac{\varepsilon}{3(L+1)}.$$

ゆえに

$$\sum_{j=n-N_1+1}^{n} |a_j| \, |B_{n-j} - B| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{3(L+1)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ゆえに

$$\left|\sum_{\ell=0}^{n} C_\ell - A_n B\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

以上から

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\ell=0}^{n} C_\ell - AB\right| &= \left|\sum_{\ell=0}^{n} C_\ell - A_nB + A_nB - AB\right| \\ &\le \left|\sum_{\ell=0}^{n} C_\ell - A_nB\right| + |A_nB - AB| \\ &\le \frac{2\varepsilon}{3} + |A_n - A|\,|B| \le \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(|B|+1)}\cdot|B| \\ &< \varepsilon.\blacksquare\end{aligned}$$

余談 A.26 「$s=\sum_n a_n$, $t=\sum_n b_n$, $r=\sum_n c_n$ がいずれも収束すれば、$r=st$.」という Abel の定理が成り立つ (また Abel か…)。 ■

A.5 冪級数の項別微分可能性定理の別証明

普通のテキストに載っている証明がすぐには思い浮かばなかった (思い出せなかった) ので、自力で考えてみた[102]。

以下の証明は線積分を用いるので、現在の「複素関数」の説明の順番からするとフライングになる、ということもあるし、学生にはかえって分かりにくい気もするので、ボツにしたが、参考のために残しておく。

実関数列の項別微分に関する定理は、f_n が f に各点収束し、f_n' が g に一様収束するとして、微分積分学の基本定理

$$f_n(x)-f_n(a)=\int_a^x f_n'(t)\,dt$$

の両辺の極限を取って

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)\,dt$$

を導き、これから $f'(x)=g(x)$ と証明するのが普通である (分かりやすくて良いと思う)。複素関数の場合にこういう議論をしているのを見たことはないのだが、以下に示すように、同様に成立する (実関数と違い、積分路が 1 つではないので注意を要するが、導関数の積分なので、いわゆる原始関数が存在するケースに相当し、実関数の場合の微分積分学の基本定理と同じ等式が成立する。だから大丈夫である)。

補題 A.27 Ω は $\mathbb{C}$ の領域、f_n ($n\in\mathbb{N}$), f, g は Ω から $\mathbb{C}$ への関数であり、各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、f_n は正則で f_n' は連続、Ω で $\{f_n\}$ は f に各点収束、Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して、$\{f_n'\}$ は K 上で g に一様収束するならば、f は Ω で正則で $f'=g$.

証明 最初に g は (局所的には連続関数列の一様収束極限であるから) 連続であることを注意しておく。$c\in\Omega$ を任意に固定する。$z\in\Omega$ に対して、c を始点、z を終点とする任意の区分的に C^1 級の曲線 C_z を取るとき

$$\int_{C_z} f_n'(\zeta)d\zeta = f_n(z)-f_n(c).$$

[102] 後で何冊かテキストを見てみたら、細部は著者により色々違っていて、面白いものだなと思いました — 多分、少し難しいということだと思います。

実際、C_z のパラメーター付け $\gamma\colon [\alpha,\beta]\to\Omega$ を用いると

$$\int_{C_z} f_n'(\zeta)d\zeta = \int_\alpha^\beta f_n'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}f_n(\gamma(t))dt = [f_n(\gamma(t))]_\alpha^\beta = f_n(z) - f_n(c).$$

(本当は曲線が滑らかな範囲に積分を分割して計算し、途中が上手くキャンセルすることを確かめるわけだが、本質的なところは上で大丈夫である。) C_z の像はコンパクトなので、その上で一様に $f_n' \to g$ となる。極限移行して

$$\int_{C_z} g(\zeta)d\zeta = f(z) - f(c).$$

さて、任意の $z\in\Omega$ を固定する。Ω は開集合であるから、ある $\varepsilon>0$ が存在して $\overline{D}(z;\varepsilon)\subset\Omega$ が成り立つ。$0<|h|<\varepsilon$ なる h に対して、$f(z+h)-f(z)$ を計算するのだが、C_{z+h} として $C_z+[z,z+h]$ が取れる。

$$f(z+h)-f(z) = \left(f(c)+\int_{C_{z+h}} g(\zeta)d\zeta\right) - \left(f(c)+\int_{C_z} g(\zeta)d\zeta\right) = \int_{[z,z+h]} g(\zeta)d\zeta.$$

これと、$\displaystyle\int_{[z,z+h]} d\zeta = h$ を用いて

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) &= \frac{1}{h}\left(\int_{[z,z+h]} g(\zeta)d\zeta - g(z)\int_{[z,z+h]} d\zeta\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} \left(g(\zeta)-g(z)\right)d\zeta.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\left(f(z+h)-f(z)\right)-g(z)\right| &\le \frac{1}{|h|}\sup_{\zeta\in[z,z+h]}|g(\zeta)-g(z)|\int_{[z,z+h]}|d\zeta|\\ &\le \sup_{\zeta\in[z,z+h]}|g(\zeta)-g(z)|.\end{aligned}$$

g の連続性より、$h\to 0$ のとき、右辺は 0 に収束するので、

$$f'(z) = g(z).\blacksquare$$

系 A.28 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n$ の収束半径を $\rho>0$ とするとき、$D(c;\rho)$ で冪級数は正則で、

$$\left(\sum_{n=0}^\infty a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=0}^\infty (n+1)a_{n+1}(z-c)^n.$$

(右辺の冪級数の収束半径も ρ である。)

証明　右辺の冪級数の収束半径は $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty (n+1)a_{n+1}(z-c)^{n+1} = \sum_{n=1}^\infty na_n(z-c)^n$ の収束半径と同じである。後者の収束半径の逆数は Cauchy-Hadamard の定理から

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

(ここで $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を用いた。) ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n$ の収束半径は、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ のそれに等しい。

$\Omega=D(c;\rho)$, $f_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k(z-c)^k$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n$ とおく。仮定から f_n は f に各点収束する。f_n は正則で、

$$f_n'(z)=\sum_{k=1}^{n}ka_k(z-c)^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}(z-c)^k$$

となり、これはもちろん連続である。Ω の任意のコンパクト集合 K は適当な $0<\rho'<\rho$ に対して、$\overline{D}(c;\rho')$ に含まれることに注意すると、f_n' は K 上一様に g に収束することが判る。補題から f は正則で $f'=g$. すなわち

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n.\blacksquare$$

A.6 Abel の級数変形法

この項は、以前のノートからコピペした。もし講義することになったら、もう少しかみ砕く(その結果出来たものを本文に持って行く)。

(現在、かなりの部分を本文に移したので、削除できるものが多い。要するに整理できるし、そうする必要がある。)

Abel の級数変形法 (Abel summation, Abel's transformation, Abel's partial summation) とは、

$$A_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k \text{ とおくと、} \sum_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})$$

という式変形のことをいう。部分積分の級数バージョンに相当する。実際

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=a_1b_1+\sum_{k=2}^{n}a_kb_k=A_1b_1+\sum_{k=2}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=A_1b_1+\sum_{k=2}^{n}A_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}A_kb_{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_nb_n.\end{aligned}$$

次はシュヴァルツ [47] の定理 75 を簡略化したものである。

定理 A.29 (Abelの級数変形法 (Abel's transformation)) $\{\alpha_n\}_{n\ge 0}$, $\{\beta_n\}_{n\ge 0}$ は複素数列で、

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad \left|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right|\le M, \tag{93}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n-\beta_{n+1}|<\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\beta_n=0 \tag{94}$$

を満たすならば、$S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ は収束する。また

$$|S|\le A_0B_0,\qquad \left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\alpha_k\beta_k\right|\le A_{m+1}B_{m+1}$$

が成り立つ。ただし

$$A_m:=\sup_{n\ge m}\left|\sum_{k=m}^{n}\alpha_k\right|,\quad B_m:=\sum_{k=m}^{\infty}\left|\beta_k-\beta_{k+1}\right|.$$

記憶用に言葉で説明すると、$\{\alpha_n\}$ は部分和が有界な数列、$\{\beta_n\}$ は 0 に収束する有界変分列ならば、両者の積の和は収束する。$\{\beta_n\}$ の仮定として、より簡単な「単調減少して 0 に収束する」を採用してある本が多い。

なお、(93) から、$A_m\le 2M<\infty$ が導かれる。実際、

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\alpha_k\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\right|\le\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right|+\left|\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\right|\le M+M=2M$$

であるから、$A_m\le 2M$.

証明 $S_n:=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k$, $\sigma_n:=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k$ とおく。S_n に Abel の級数変形法を適用すると

$$\begin{aligned}S_n&=\alpha_0\beta_0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k=\sigma_0\beta_0+\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k-\sigma_{k-1})\beta_k\\&=\sigma_0\beta_0+\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\beta_k-\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k\beta_{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\sigma_k\beta_k-\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k\beta_{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k\left(\beta_k-\beta_{k+1}\right)+\sigma_n\beta_n.\end{aligned}$$

ここで

$$|\sigma_n\beta_n|=|\sigma_n|\,|\beta_n|\le A_0\,|\beta_n|\to 0\quad(n\to 0).$$

また

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\sigma_k|\,|\beta_k-\beta_{k+1}|\le\sum_{k=0}^{n-1}A_0\,|\beta_k-\beta_{k+1}|\le A_0B_0<\infty.$$

ゆえに $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ は存在する。そして、$|S|\le A_0B_0$.

和を取る添字の範囲を $k=m+1$ からにすれば、$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\alpha_k\beta_k\right| \leq A_{m+1}B_{m+1}$ が得られる。一応やってみますか？

$$S_{m+1,n} := \sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k\beta_k,\quad \sigma_{m+1,n} := \sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k$$

とおくと、$k \geq m+2$ のとき $\alpha_k = \sigma_{m+1,k}-\sigma_{m+1,k-1}$, $\alpha_{m+1}=\sigma_{m+1,m+1}$. ゆえに

$$\begin{aligned}
S_{m+1,n} &= \sigma_{m+1,m+1}\beta_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n}\left(\sigma_{m+1,k}-\sigma_{m+1,k-1}\right)\beta_k \\
&= \sigma_{m+1,m+1}\beta_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n}\sigma_{m+1,k}\beta_k - \sum_{k=m+1}^{n-1}\sigma_{m+1,k}\beta_{k+1} \\
&= \sum_{k=m+1}^{n}\sigma_{m+1,k}\beta_k - \sum_{k=m+1}^{n-1}\sigma_{m+1,k}\beta_{k+1} \\
&= \sum_{k=m+1}^{n-1}\sigma_{m+1,k}(\beta_k-\beta_{k+1}) + \sigma_{m+1,n}\beta_n.
\end{aligned}$$

ここで

$$|\sigma_{m+1,n}\beta_n| \leq A_{m+1}\left|\beta_n\right| \to 0,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m+1}^{n-1}\left|\sigma_{m+1,k}(\beta_k-\beta_{k+1})\right| &\leq \sum_{k=m+1}^{n-1}A_{m+1}\left|\beta_k-\beta_{k+1}\right| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{\infty}A_{m+1}\left|\beta_k-\beta_{k+1}\right| = A_{m+1}B_{m+1}
\end{aligned}$$

であるから、$\lim_{n\to\infty}S_{m+1,n}$ は収束して、

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_{m+1,n}\right| \leq A_{m+1}B_{m+1}.■$$

例 A.30 $\{\beta_n\}$ が単調減少して 0 に収束する数列であるとき、$\alpha_n=(-1)^n$ とすると、有名な交代級数の収束定理が得られる。

$\alpha_n = e^{in\theta}$ $(\theta \notin 2\pi\mathbb{Z})$ もしばしば現れる。 ■

冪級数 $f(z)$ が収束円の周上の点 b で収束するとき、その点を含む半径に沿って収束円の内部から $z\to b$ と近づけたとき、$f(z)\to f(b)$ となる。これを **Abel の連続性定理**というが、ここでは次の形で与える。

定理 A.31 (Abel の連続性定理 (Abel's continuity theorem)) 冪級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

が $z=R$ $(R>0)$ で収束したとする。任意の正数 K に対して、

$$\Omega_K:=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|z|<R,\quad \frac{|1-z/R|}{1-|z|/R}\le K\right\}$$

とおくとき、f は $\Omega_K\cup\{R\}$ で一様収束する。特に f は $\Omega_K\cup\{R\}$ で連続である。さらに特に

$$\lim_{\substack{x\in[0,R)\\ x\to R}} f(x)=f(R).$$

証明　目標は

$$f_n(z):=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$$

とおくとき、

$$\sup_{z\in\Omega_K\cup\{R\}}|f(z)-f_n(z)|\to 0\quad (n\to\infty)$$

を示すことである。級数が $z=R$ で収束するという仮定から、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(R)=f(R)$ が成り立つ。

任意の $z\in\Omega_K$ に対して、$\alpha_n:=a_nR^n$, $\beta_n:=\left(\dfrac{z}{R}\right)^n$ とおくと、

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}a_kR^k\right|=|f_n(R)|\quad (n=0,1,2,\dots)$$

は有界であり、

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n-\beta_{n+1}|=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{R}\right)^n\left|1-\frac{z}{R}\right|=\frac{\left|1-\dfrac{z}{R}\right|}{1-\dfrac{|z|}{R}}\le K.$$

したがって Abel の定理が適用できる。任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$|f(z)-f_n(z)|\le A_{n+1}B_{n+1}\le A_{n+1}B_0\le KA_{n+1}\quad (z\in\Omega_K).$$

$$A_{n+1}=\sup_{m\ge n+1}\left|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k\right|=\sup_{m\ge n+1}\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_kR^k\right|=\sup_{m\ge n+1}|f_m(R)-f_n(R)|$$

であるから、

$$|f(z)-f_n(z)|\le K\sup_{m\ge n+1}|f_m(R)-f_n(R)|\quad (z\in\Omega_K,\ n\in\mathbb{N}).$$

ゆえに

$$\sup_{z\in\Omega_K\cup\{R\}}|f(z)-f_n(z)|\le\max\left\{K\sup_{m\ge n+1}|f_m(R)-f_n(R)|,|f(R)-f_n(R)|\right\}.$$

$n\to\infty$ のとき $f_n(R)\to f(R)$ であるから、$\{f_n(R)\}_{n\ge 0}$ は Cauchy 列であるので、上の不等式の右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する。ゆえに $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、$\Omega_K\cup\{R\}$ で f に一様収束する。■

余談 A.32 (Abel の定理 (定理 A.29) の部分積分バージョン) 広義積分

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

の収束と評価

$$\left|\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx\right| \le \sup_{x\in[a,\infty)}\left|\int_a^x f(t)\,dt\right|\int_a^\infty |g'(x)|\,dx$$

を示そう。

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (x\in[a,\infty))$$

とおくと、$F'(x)=f(x)$ である。もしも F が有界, すなわち

$$M := \sup_{x\in[a,\infty)}|F(x)| < \infty$$

で、かつ

$$\int_a^\infty |g'(x)|\,dx < \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

が成り立つならば、部分積分を用いて、$F(a)=0$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\int_a^R f(x)g(x)\,dx &= \int_a^R F'(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^R - \int_a^R F(x)g'(x)\,dx \\ &= F(R)g(R) - \int_a^R F(x)g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

ここで

$$|F(R)g(R)| \le M\,|g(R)| \to 0 \quad (R\to\infty),$$
$$|F(x)g'(x)| \le M\,|g'(x)|, \quad \int_a^R |g'(x)|\,dx < \infty$$

であるから、$\displaystyle\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ は存在し、

$$\left|\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx\right| \le M\int_a^\infty |g'(x)|\,dx = \sup_{x\in[a,\infty)}\left|\int_a^x f(t)\,dt\right|\int_a^\infty |g'(x)|\,dx.$$

あるいは、少し一般化して、任意の $c\in[a,\infty)$ に対して、

$$\left|\int_c^\infty f(x)g(x)\,dx\right| \le \sup_{x\in[c,\infty)}\left|\int_c^x f(t)dt\right|\int_c^\infty |g'(x)|\,dx. \blacksquare$$

A.7 級数の研究の歴史に関するメモ

昔、「基礎数学 IV」という授業をした時のノート 「級数」[103] に、色々書いておいた。少しコピペする。

2003 年度の授業で級数を終えてしばらくしてから、久しぶりに遠山 [23] を手にした。ぱらぱらめくっているうちに第 X 章「無限の算術 — 極限」という章を目にした。

ヤコブ・ベルヌーイ (1654–1705) の『無限級数論』に載っている六行詩の引用がある。

[103] https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kiso4/kiso4series.pdf

無限の級数が、たとえ限りなく見えようとも、
有限の和をもち、限界の前に身をかがめるように、
いやしい物体のなかに、無限の神の影が宿り、
かくも狭く限られながら、しかも限りなく増加する。
何という歓喜、測り知られぬもののなかに微小なるものを、
また微小なるもののなかに、かの無限の神を観る。

無限の逆説について紹介があり、「その混乱は 1821 年になってコーシーがとどめをさすまで続いた。」

遠山先生の分析では、コーシーが無限級数の正しい理論をつくり上げられたのは、それ以前の数学者が見逃していた次の二つの点を見つけたからであるという。

1. 有限個の数を加えるときは、加える順序をいくら変えても答は変わらないが、この法則は無限個のたし算の場合には成り立たない。だから無限級数ははじめに並べたとおりに加えると定める。

2. 無限級数にいつでも和があるというのは迷信である (それまで和がないものに無理やり和を考えようとして混乱を生じていた)。数列の収束と発散という考えを持ち込んだ (例の ε-N 論法は Cauchy の発明らしい)。

なるほど。今勉強するときはまず真っ先に

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

と天下りに書き下してしまうが、歴史的にはここに至るまでが大変だったわけだ。

遠山先生の本はお勧めです。アーベルとか、古い時代の数学者の話は、小堀 [48] なんてどうでしょう。

1. (参考まで) Sir Isaac Newton (1643–1727, 英国の Woolsthorpe に生まれ、ロンドンに没する)

2. (参考まで) Brook Taylor (1685–1731, 英国の Middlesex に生まれ、ロンドンにて没する)

3. (理論というよりも、とにかく結果を出しまくったという人だが、参考まで) Leonhard Euler (1707–1783, スイスの Basel に生まれ、ロシアの St Petersburg にて没する)

4. Augustin Louis Cauchy (1789–1859, フランスのパリに生まれ、パリ近郊の Sceaux にて没する)
   1821 年 “Cours d’analyse” (エコール・ポリテクニクの教科書)
   級数の和の定義, 数列の収束・発散の定義　(もちろん関数論の創始者でもある。)

5. Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー)
   冪級数の収束円, Abel の級数変形法, Abel の連続定理

6. (冪級数とは関係ないが参考まで) Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768–1830)
   Fourier 級数という級数について革命的な主張をした。彼自身は証明できなかったが、解析学に多大な影響を与えた。

7. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897, Westphalia (now Germany) の Ostenfelde に生まれ、ベルリンにて没する)
   『連続関数の一様収束極限は連続』, Weierstrass の M test

A.8 “負冪級数”

ここでは

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

という形の関数項級数を、負冪級数と呼ぶことにする (ここだけの用語であり、一般に通用する言葉ではない)。

例 A.33 (負冪級数とこんにちは) $f(z) := \dfrac{1}{z-3}$ は、$\mathbb{C} \setminus \{3\}$ で正則である。

まず Taylor 展開 (冪級数展開) の復習をしよう。$c = 1$ を中心とする円盤 $D(1;2)$ で正則である。ここで次のように Taylor 展開できる。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{-2\left(1 - \dfrac{z-1}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |(z-1)/2| < 1 \Leftrightarrow z \in D(1;2)). \end{aligned}$$

ところで、f は $D(1;2)$ の外部 $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 2\}$ でも正則で、かつ有界である。そこで次のように “負冪級数” 展開することも出来る。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{(z-1)\left(1 - \dfrac{2}{z-1}\right)} \\ &= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z-1)^n} \quad \left(\text{収束} \Leftrightarrow \left|\frac{2}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > 2\right). \end{aligned}$$

($\dfrac{1}{z-3}$ のような簡単な関数を、目的もなく級数に変形するのはバカバカしいが、この計算は後の定理の証明と関連深い。) ■

定理 7.4 の証明でも用いたことであるが、級数の一様収束に基づく項別積分が再び必要になる。ここでは、一つの工夫として、命題 A.34 を用意する (冪級数に関する有名な定理から簡単に導けるが)。

定理 3.3(p. 57) と、定理 3.21(p. 68) を思い出そう。

命題 A.34 (「負冪級数」の収束, 本文中の補題 10.3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ について、次の 3 つのいずれか 1 つだけが必ず成立する。

(i) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して収束する。$\forall R^* \in (0,\infty)$ に対して、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \geq R^*\}$ で一様に絶対収束する。

(ii) $\exists R \in (0,\infty)$ s.t. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > R\}$ で収束し、$D(c;R)$ で発散する。$\forall R^* \in (R,\infty)$ に対して、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \geq R^*\}$ で一様に絶対収束する。

(iii) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して発散する。

(一応証明は書いたけれど、実際に説明する必要はないと思う。変数変換で、円が円に、円の内部が円の外部に、円の外部が円の内部に対応することを説明するくらい。)

証明　変数変換 $\zeta = \dfrac{1}{z-c}$ により、

- c を中心とする円周 $|z-c| = r$ と 0 を中心とする円周 $|\zeta| = \dfrac{1}{r}$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ と $\left\{\zeta \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\zeta| > \dfrac{1}{r}\right\}$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > r\}$ と $\left\{\zeta \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\zeta| < \dfrac{1}{r}\right\}$

がそれぞれ対応することに注意する。

また $\dfrac{a_{-n}}{(z-c)^n} = a_{-n}\zeta^n$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$ に対して、定理 3.3 と定理 3.21 を適用する。

(i) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$ が $\forall\zeta \in \mathbb{C}$ について収束する場合、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ に対して収束する。$0 < \forall R^* < \infty$ に対して、$\rho^* = 1/R^*$ とおく。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$ が $|\zeta| \leq \rho^*$ で一様に絶対収束することから、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束することが導かれる。

(ii) $0 < \exists\rho < \infty$ s.t. 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$ が $|\zeta| < \rho$ について収束し、$|\zeta| > \rho$ について発散する場合、$R := 1/\rho$ とおくと、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は $|z-c| > R$ で収束し、$|z-c| < R$ で発散する。$R < R^* < \infty$ を満たす任意の R^* に対して、$1/R^* < 1/R = \rho$ であるから、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$ が $|\zeta| \leq 1/R^*$ で一様に絶対収束することから、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束することが導かれる。

(iii) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$ が $\forall\zeta \neq 0$ に対して発散する場合、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は任意の $z \neq c$ で発散する。■

この命題の (i) の場合を $R = 0$, (iii) の場合を $R = \infty$ と解釈することで、以下のように書き直せる (これは冪級数の場合は普通に行われている)。

命題 A.34 の書き直し

$0 \leq \exists R \leq \infty$ s.t. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は $|z-c| > R$ で収束し、$|z-c| < R$ で発散する。

$R < \forall R^* < \infty$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は $|z-c| \geq R^*$ で一様に絶対収束する。

A.9 $\arctan = \tan^{-1}$ の 0 のまわりの Taylor 展開

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$ (主値) とする。f の 0 の周りの Taylor 展開を微積分の知識だけで求めてみよう。

まず $f^{(n)}(0)$ $(n \in \mathbb{N})$ を求めよう。

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

より

$$(1+x^2)f'(x) = 1.$$

Leibniz の定理を用いて、両辺を n 回微分すると、

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x^2)^{(k)} (f'(x))^{(n-k)} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$k \geq 3$ に対して $(1+x^2)^{(k)} = 0$ であるから

$$(1+x^2) f^{(n+1)}(x) + n \cdot 2x \cdot f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

これを最高階導関数について解くと

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-n}{1+x^2}\left[2x f^{(n)}(x) + (n-1) f^{(n-1)}(x)\right] \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{95}$$

こうして n 階導関数に関する漸化式が得られたが、これを用いて $f^{(n)}(x)$ の具体形を求めるのは容易でない。しかし $x=0$ における n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めるのは、以下に示すように簡単である。上式に $x=0$ を代入して

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1) f^{(n-1)}(0) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ より、

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ (-1)^{k-1}(2k)! & (n \text{ が奇数 } 2k-1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

こうして $f^{(n)}(0)$ が求まったが、$f^{(n)}(x)$ が得られていないので、Taylor の定理の Lagrange の剰余項を評価して、f が Taylor 展開可能であることを示すのは (剰余項が 0 に収束することを示すのは) あまり簡単ではない。

もしも冪級数の理論を熟知していれば

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ は、$\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ で正則な関数 $\dfrac{1}{1+z^2}$ に拡張できて、その 0 の周りでの Taylor 展開

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|z| < 1)$$

を項別積分して得られる

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \quad (|z| < 1)$$

が $D(0;1)$ で正則であり、$F(0) = 0$ を満たすことが分かる。すると

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} = f'(x) \quad (-1 < x < 1), \quad F(0) = 0 = f(0)$$

を満たすことから

$$F(x) = f(x) \quad (-1 < x < 1).$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

すなわち f は 0 の周りで Taylor 展開可能である。

本題に戻り、微積分の範疇で f が Taylor 展開可能であることを示そう。まず等比数列の和の公式から

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)} = \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2} = \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

である ($x \in \mathbb{R}$ であるから公比 $-x^2$ は 1 に等しくはなり得ないことに注意)。ゆえに

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k + \frac{(-1)^2 x^{2n}}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$f(0) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 0 + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t^2)^k + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt. \end{aligned}$$

$-1 \le x \le 1$ ならば

$$(96) \qquad \left| \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \le \int_0^{|x|} t^{2n}\, dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \le x \le 1).$$

こうして $f(x)$ が 0 の周りに Taylor 展開できて、展開式が $-1 \le x \le 1$ で成り立つことが分かった。

以上の話の要点は (96) にある。剰余項を Lagrange の剰余項でなく、積分を使って表示することで、良い評価が簡単に得られた。$-1 < x < 1$ でなく、$-1 \le x \le 1$ で展開できることが導かれたのは素晴らしい (Abel の連続性定理のお世話にならずに済んだ)。

この冪級数は、複素変数に拡張して考えたとき、収束円周上の 2 点 $x = \pm i$ (i は虚数単位) 以外では収束する級数である (証明はさぼる)。

B 連結性

「数学解析」では時間が足りなくて連結性は解説できていない。年度によっては「トポロジー」で解説してもらえたようであるが、念のため、少し書いておく。

- 位相空間 X が**連結** (connected) であるとは、X の開集合の組 U_1, U_2 で $X = U_1 \cup U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすものは $U_1 = X$, $U_2 = \emptyset$ か、$U_1 = \emptyset$, $U_2 = X$ のいずれかに限られることをいう。

- 位相空間 X の部分集合 A が連結であるとは、A に相対位相を導入したとき、A が連結な位相空間になることをいう。つまり

$$(\exists V_1, V_2 : X \text{ の開集合}) \quad U_1 = A \cap V_1, \quad U_2 = A \cap V_2,$$

$$A = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

  が成り立っているならば、$U_1 = \emptyset$ または $U_2 = \emptyset$ が成り立つとき、A は連結であるという。

- 位相空間 X が**弧連結** (弧状連結) であるとは、X 内の任意の二点が X 内の連続曲線で結べる ($\forall x, y \in X$, $\exists \varphi\colon [0,1] \to X$ s.t. φ は連続かつ $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$) ことをいう。

- $\mathbb{R}$ の部分集合 I が連結であるためには、I が区間であることが必要十分である。

- (いわゆる中間値の定理の一般化) 連結な位相空間の連続写像による像は連結である。弧連結な位相空間の連続写像による像は弧連結である。

- 弧連結な空間は連結である。

- 連結かつ**局所弧連結**な空間は弧連結である。特に $\mathbb{R}^n$ の連結な開集合は弧連結である。

本文中で、$\mathbb{R}^n$ の弧連結な開集合は連結であることを述べて証明した (命題 9.6)。この逆を次の形で述べておくと、関数論の準備としてはほぼ満足出来る状態になる。

命題 B.1 $\mathbb{R}^n$ の連結な開集合の任意の二点は$\underline{C^1\text{ 級の}}$曲線で結べる。

これは上に掲げた「常識」の中に入っていないが (位相空間論の本にも書かれていないことが多い)、「連結かつ局所弧連結ならば弧連結」という定理の証明を眺めれば簡単に解決する。ここではその $\mathbb{R}^n$ の開集合バージョンを述べよう。

命題 B.2 Ω を $\mathbb{R}^n$ の連結な開集合とするとき、Ω 内の任意の 2 点 a, b は Ω 内の曲線で結ぶことができる。

証明

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid a \text{ と } x \text{ は } \Omega \text{ 内の曲線で結べる}\},$$

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega \mid a \text{ と } x \text{ は } \Omega \text{ 内の曲線で結べない}\}$$

とおくと、明らかに

$$\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset, \quad a \in \Omega_0.$$

実は Ω_0 は開集合である。実際、任意の $x \in \Omega_0$ に対して、$x \in \Omega$ かつ Ω は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x;\varepsilon) \subset \Omega.$$

$B(x;\varepsilon)$ 内の任意の点 y は x と結べるので、a とも結ぶことができる (a と x を結ぶ曲線に x と y を結ぶ曲線をつなげばよい)。ゆえに $y \in \Omega_0$. すなわち $B(x;\varepsilon) \subset \Omega_0$ であるから、Ω_0 は開集合である。

同様にして Ω_1 は開集合である。実際、任意の $x \in \Omega_1$ に対して、$x \in \Omega$ かつ Ω は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x;\varepsilon) \subset \Omega.$$

$B(x;\varepsilon)$ 内の任意の点 y は x と結べるので、a とは結ぶことができない (もし y と a が結べれば、その曲線を y と x を結ぶ曲線につないで a と x を結べることになり矛盾する)。ゆえに $y \in \Omega_1$. すなわち $B(x;\varepsilon) \subset \Omega_1$ であるから、Ω_1 は開集合である。

Ω が連結であるから、$\Omega_0 = \Omega$ かつ $\Omega_1 = \emptyset$. ゆえに a は Ω 内の任意の点と結ぶことができる。■

この証明で「Ω 内の曲線」というところを、「Ω 内の C^1 級の曲線」、「Ω 内の区分的に C^1 級の曲線」、「Ω 内の正則な C^1 級の曲線」、「Ω 内の座標軸に平行な線分からなる折線」などで置き換えても証明はまったくそのまま通用する (開球 $B(x;\varepsilon)$ 内の任意の点はその中心と良い性質を持った曲線で結べることにもとづいている)。

C　定積分計算のガラクタ箱

授業で説明するタイプ以外にも、院試などに出題される定積分がある。とりあえずここに入れておくが、「複素関数」履修時に学ぶことを勧めているわけではない。

C.1　$x^\alpha\times$ 有理関数の積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha f(x)dx$

有理関数 f と x^α $(0 < \alpha < 1)$ との積の $[0,\infty)$ 上での積分

$$I = \int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$$

を求めよう。要点を一言にまとめると、z^α の多価性を利用して計算する、となる。

関数 z^α は多価関数である

α を任意の実数とする。実関数 x^α は、$x<0$ では普通定義されないことを思い出そう。「複素関数」としての z^α は、

$$z^\alpha = \exp\left(\alpha \log z\right)$$

で定義することになるが[a]、これは普通の関数ではなくて、($\log z$ の多価性によって) 多価関数であることに注意する (だから上の等式は、本当は集合に関する等式である)。
$z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in[0,2\pi))$ とするとき、

$$\log z = \log r + i(\theta+2n\pi) \quad (n\in\mathbb{Z})$$

であった (この右辺の $\log r$ は実関数としての $\log$ の値)。ゆえに

$$z^\alpha = \exp\left(\alpha\left(\log r + i(\theta+2n\pi)\right)\right) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}e^{i2\alpha n\pi}.$$

もし $\alpha\in\mathbb{Z}$ であれば、$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して $n\alpha\in\mathbb{Z}$ であるから、$e^{i2\alpha n\pi}=1$ であって、上の式は n によらない 1 つの複素数を定める。しかし $\alpha\notin\mathbb{Z}$ の場合は、複数 (しばしば無限個) の値を取る。絶対値については、

$$|z^\alpha| = r^\alpha = |z|^\alpha.$$

(右辺の $|z|^\alpha$ は実関数としての α 乗である。) ■

[a] 実関数として、$x=\exp(\log x)$, $x^\alpha=\exp(\alpha\log x)$ であるから、式の形は自然に感じられるであろう。

$\Omega := \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ における対数関数 $\log z$ を、虚部 $\in(0,2\pi)$ となるような分枝を選ぶことで定義する。すなわち、z を $z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in(0,2\pi))$ と極形式で表示したとき、$\log z=\log r+i\theta$. これを用いて、

$$z^\alpha := \exp\left(\alpha\log z\right) = \exp(\alpha(\log r+i\theta)) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}.$$

(自然に感じられるかも知れないが、全然当たり前ではなく、上に書いた約束に基づいていることに注意！)

この項で用いる z^α (ただし $\alpha\in(0,1)$)

$z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in(0,2\pi))$ とするとき、$z^\alpha=r^\alpha e^{i\alpha\theta}$, $|z^\alpha|=|z|^\alpha$.
$z\in(0,\infty)$ の場合

$$(\heartsuit)\qquad (z^\alpha)_{\text{下半平面からの極限}} = (z^\alpha)_{\text{上半平面からの極限}}\times e^{2\pi\alpha i}$$

である (授業では図を描いて説明)。

命題 C.1 (有理関数のメリン変換) $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, ここで $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$, $\forall x\in(0,\infty)$ $P(x)\neq 0$, 0 は f の正則点または高々 1 位の極とし、$0<\alpha<1$ とする。このとき、

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\sum_{c\neq 0}\operatorname{Res}(z^\alpha f(z);c).$$

証明 $0<\varepsilon<R$, $0<\delta<\pi$ なる ε, R, δ を取る (以下で $\varepsilon\to 0$, $\delta\to 0$, $R\to\infty$ とする)。$C:=C_1+C_2+C_3+C_4$, C_1 は $z=te^{i\delta}$ $(t\in[\varepsilon,R])$, C_2 は $z=Re^{i\theta}$ $(\theta\in[\delta,2\pi-\delta])$, $-C_3$ は

$z = te^{i(2\pi-\delta)}$ $(t \in [\varepsilon, R])$, $-C_4$ は $z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta \in [\delta, 2\pi - \delta])$, とする。

留数定理から、十分小さい任意の ε, δ, 十分大きい任意の R に対して、

$$(\flat)\quad \int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz + \int_{C_2} z^\alpha f(z)\,dz + \int_{C_3} z^\alpha f(z)\,dz + \int_{C_4} z^\alpha f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{c\neq 0} \operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

C_1 に沿う線積分は、

$$\int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \left(te^{i\delta}\right)^\alpha f(te^{i\delta}) \cdot e^{i\delta}\,dt = e^{i(\alpha+1)\delta} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{i\delta})\,dt.$$

$\delta \to 0$ のとき、$t \in [\varepsilon, R]$ について一様に $t^\alpha f(te^{i\delta}) \to t^\alpha f(t)$, また $e^{i(\alpha+1)\delta} \to 1$ であるから、

$$\int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz \to \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t)\,dt.$$

C_2 に沿う線積分は、

$$\int_{C_2} z^\alpha f(z)\,dz = \int_\delta^{2\pi-\delta} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta \to \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta \quad (\delta \to 0).$$

ただし $\theta = 0$ のとき $(Re^{i\theta})^\alpha = R^\alpha$, $\theta = 2\pi$ のとき $(Re^{i\theta})^\alpha = R^\alpha e^{2\pi\alpha i}$ とみなす (そうすると被積分関数は $[0, 2\pi]$ 上の連続関数になり、積分の収束が容易に分かる)。

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^\alpha f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta\right| &\le R^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} \left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta \le R^{\alpha+1} \cdot 2\pi \frac{M}{R^2} \\ &= \frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}} \to 0 \quad (R \to \infty).\end{aligned}$$

$-C_3$ に沿う線積分は、

$$\begin{aligned}\int_{-C_3} z^\alpha f(z)\,dz &= \int_\varepsilon^R (te^{(2\pi-\delta)i})^\alpha f(te^{(2\pi-\delta)i}) \cdot e^{(2\pi-\delta)i}\,dt \\ &= e^{(2\pi-\delta)\alpha i} e^{(2\pi-\delta)i} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{(2\pi-\delta)i})\,dt = e^{2\pi\alpha i} e^{-(1+\alpha)\delta i} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(te^{-\delta i})\,dt.\end{aligned}$$

$\delta \to 0$ のとき、$t \in [\varepsilon, R]$ について一様に $t^\alpha f(te^{-\delta i}) \to t^\alpha f(t)$ であるから、

$$\int_{-C_3} z^\alpha f(z)\,dz \to e^{2\pi\alpha i} \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t)\,dt.$$

$-C_4$ に沿う線積分は

$$\int_{-C_4} z^\alpha f(z)\,dz = \int_\delta^{2\pi-\delta} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta \to \int_0^{2\pi} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta \quad (\delta \to 0).$$

ただし $\theta = 0$ のとき $(\varepsilon e^{i\theta})^\alpha = \varepsilon^\alpha$, $\theta = 2\pi$ のとき $(\varepsilon e^{i\theta})^\alpha = \varepsilon^\alpha e^{2\pi\alpha i}$ とみなす (そうすると被積分関数は $[0, 2\pi]$ 上の連続関数になり、積分の収束が容易に分かる)。

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} (\varepsilon e^{i\theta})^\alpha f(\varepsilon e^{i\theta}) \cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta\right| &\le \varepsilon^{\alpha+1} \int_0^{2\pi} \left|f(\varepsilon e^{i\theta})\right| d\theta \le \varepsilon^{\alpha+1} \cdot 2\pi \frac{M'}{\varepsilon} \\ &= 2\pi M' \varepsilon^\alpha \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).\end{aligned}$$

まず、$(\flat)$ で $\delta \to 0$ としてから、$\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ として、

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt - e^{2\pi\alpha i} \int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{c\neq 0} \operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c).$$

ゆえに

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{c\neq 0} \operatorname{Res}(z^\alpha f(z); c). \blacksquare$$

反省　上の証明を振り返ると、$\delta \to 0$ のとき

$$\int_{C_1} z^\alpha f(z)\,dz \to \int_\varepsilon^R t^\alpha f(t)\,dt,$$

$$\int_{-C_3} z^\alpha f(z)\,dz \to e^{2\pi\alpha i}\int_\varepsilon^R t^\alpha f(t)\,dt$$

となり、どちらも図形としては同じ線分 $[\varepsilon, R]$ 上の積分であるにもかかわらず、値が食い違い、引いても打ち消し合わないところがミソである。

全体の話が見える式を掲げると、

$$2\pi i\sum_c \operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right) = \int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\log z\,dz = (1-e^{2\pi\alpha i})\int_0^R f(x)dx + \text{剰余項}.$$

(積分路 $C_{\varepsilon,R}$ は図で描くのが簡単。)

例 C.1 $0<\alpha<1$ のとき、

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

例 C.1 (条件を書いていなかったけれど、$0<\alpha<1$ と仮定するのかな？)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}; -i\right)\right)\\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left(\frac{e^{\pi\alpha i/2}}{2i} - \frac{e^{3\pi\alpha i/2}}{2i}\right)\\ &= \frac{\pi\left(e^{\pi\alpha i/2}-e^{3\pi\alpha i/2}\right)}{1-e^{2\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{2\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}.\blacksquare\end{aligned}$$

この例については、Mathematica, Maple 等でも問題なく計算できる (それぞれ `Integrate[x^a/(1+x^2), {x,0,Infinity}]`, `integrate(x^a/(1+x^2),x =0..infinity)` と入力する)。■

問 7.　(Ahlfors p.174) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}\,dx$　(答: $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$)

C.2　有理関数の半直線上の積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$

ここで紹介する公式は載っていない本が多い。多くの本にあるのは、f が偶関数であるとき (これは強い条件であるため、適用範囲はかなり狭くなってしまう)、

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f;c) = \pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f;c)$$

とするものだが、実は偶関数でない f に対しても、留数を用いて積分を求めることが出来る。

手短に証明の要点の式を掲げると、$z\in(0,\infty)$ の場合の

$$(\log z)_{\text{下半平面からの極限}} = (\log z)_{\text{上半平面からの極限}} + 2\pi i$$

という不連続性に起因して得られる

$$2\pi i\sum_c \operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right) = \int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\log z\; dz = -2\pi i\int_0^R f(x)dx + 剰余項.$$

(積分路 $C_{\varepsilon,R}$ は図で描くのが簡単。)

命題 C.2 (有理関数の半直線上の積分) $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, ここで $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in [0,\infty)$ $P(x) \neq 0$ ならば、

$$\int_0^\infty f(x)\; dx = -\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right).$$

ただし $\log$ は $\operatorname{Im}\log \in (0, 2\pi)$ であるような分枝を取る。

証明　$f(z)\log z$ を命題 C.1 と同じ積分路に沿って積分する。ε, δ が十分小さく、R が十分大きければ

$$\sum_{j=1}^4 \int_{C_j} f(z)\log z\; dz = 2\pi i \sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}(f(z)\log z; c).$$

$\delta \to 0$ のとき、

$$\int_{C_1} f(z)\log z\; dz \to \int_\varepsilon^R f(t)\log t\; dt,$$

$$-\int_{C_3} f(z)\log z\; dz \to \int_\varepsilon^R f(t)\left[\log t + 2\pi i\right] dt.$$

ゆえに $\delta \to 0$ のとき、

$$\int_{C_1+C_3} f(z)\log z\; dz \to -2\pi i\int_\varepsilon^R f(t)\; dt.$$

また $\delta \to 0$ のとき、

$$\int_{C_2} f(z)\log z\; dz \to \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})(\log R + i\theta)\cdot iRe^{i\theta}d\theta,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})(\log R + i\theta)\cdot iRe^{i\theta}d\theta\right| &\leq R(\log R + 2\pi)\int_0^{2\pi}\left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leq R(\log R + 2\pi)\cdot\frac{M}{R^2}\cdot 2\pi \to 0 \quad (R\to\infty).\end{aligned}$$

同様に C_4 上の積分も $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に収束することが分かる。ゆえに

$$-2\pi i\int_0^\infty f(t)\; dt = 2\pi i\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}(f(z)\log z; c).$$

両辺を $-2\pi i$ で割って結果を得る。■

森・杉原 [49] pp. 160–163 には、

$$\int_0^\infty f(x)\; dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\operatorname{Log}(-z)\; dz = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{Log}(-z); c\right).$$

と書いてある。ここで C は実軸の正の部分を正の向きに囲む単純閉曲線で、C およびその内部 (実軸の正の部分の開近傍) で正則となるように取る。

分枝の取り方をいちいち説明しなくて済むように (?)、主値 (principal value) Log を用いている (その代わり $\mathrm{Log}(-z)$ のような少し分かりづらいものを使うことになる — コンピューターを使う時は便利なのか？)。

特にすべてが単純極であれば、

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}} \mathrm{Res}\,(f(z);c)\,\mathrm{Log}(-c).$$

例 C.3 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$. (そもそも原始関数が分かるので容易に計算できるし、留数定理を使うにしても偶関数であるから命題 12.2 を使うことが出来るが)

$$I=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1};c\right) = -\sum_{c=i,-i} \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1};c\right).$$

i, $-i$ は 1 位の極であるから、

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1};i\right)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\log z}{z^2+1}=\left.\frac{\log z}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{\pi i/2}{2i}=\frac{\pi}{4},$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+1};-i\right)=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{\log z}{z^2+1}=\left.\frac{\log z}{z-i}\right|_{z=-i}=\frac{3\pi i/2}{-2i}=-\frac{3\pi}{4}.$$

ゆえに

$$I=-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.\blacksquare$$

例 C.4

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$$

$z^3+1=0$ の根は $z=e^{\pi i/3}, e^{\pi i}, e^{5\pi i/3}$ であるから、

$$I=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right) = -\sum_{c=e^{\pi i/3},e^{\pi i},e^{5\pi i}3} \mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right).$$

$c^3=-1$ であるから、

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^3+1};c\right)=\left.\frac{\log z}{(z^3+1)'}\right|_{z=c}=\left.\frac{\log z}{3z^2}\right|_{z=c}=\left.\frac{-z\log z}{3}\right|_{z=c}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{3}\left(z\log z|_{z=e^{\pi i/3}}+z\log z|_{z=e^{\pi i}}+z\log z|_{z=e^{5\pi i/3}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{\pi}{3}i+(-1)\cdot\pi i+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{5}{3}\pi i\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.\blacksquare\end{aligned}$$

C.3 偶関数 $\times(\log x)^n$ の積分 $\displaystyle\int_0^\infty g(x)(\log x)^n\,dx$

(推敲が必要。)

$\Omega=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}z>0\}$, g は $\overline{\Omega}$ のある開近傍において、有限個の点を除いて正則、実軸上に特異点はなく、$\forall x\in\mathbb{R}\ g(-x)=g(x)$ を満たす。$R\to\infty$ のとき、$\theta\in[0,\pi]$ について一様に、$g(Re^{i\theta})R\log R\to 0$. このとき

$$2\int_0^\infty g(x)\log x\,dx+i\pi\int_0^\infty g(x)\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}(g(z)\operatorname{Log}z;c).$$

$\operatorname{Log}z$ はいわゆる主値、すなわち $\operatorname{Im}(\operatorname{Log}z)\in(0,2\pi)$.

例 C.2 $a>0$ に対して、$I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi\log a}{2a}$. 実際、

$$2\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx+i\pi\int_0^\infty\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Log}z}{z^2+a^2};ia\right)=\frac{\pi}{a}\left(\log a+\frac{\pi}{2}i\right)$$

より、

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi\log a}{2a}.\blacksquare$$

例 C.3 $a>0$ に対して、$I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{(x^2+a^2)^2}\,dx=\frac{\pi(\log a-1)}{4a^3}$. 実際、

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty\frac{\log x}{(x^2+a^2)^2}\,dx+i\pi\int_0^\infty\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx&=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Log}z}{(z^2+a^2)^2};ia\right)\\&=2\pi i\left.\frac{d}{dz}\left((z-ia)^2\frac{\operatorname{Log}z}{(z^2+z^2)^2}\right)\right|_{z=ia}\\&=2\pi i\left.\frac{\dfrac{z+ia}{z}-2\operatorname{Log}z}{(z+ia)^3}\right|_{z=ia}=\frac{\pi(1-\log a-\frac{\pi}{2}i)}{-2a^3}.\end{aligned}$$

より。$\blacksquare$

例 C.4 $a>0$ に対して、$I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{x^4+a^4}\,dx=\frac{\pi(2\log a-\pi/2)}{4\sqrt{2}a^3}$. 実際、

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty\frac{\log x}{x^4+a^4}\,dx+i\pi\int_0^\infty\frac{1}{x^4+a^4}\,dx&=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Log}z}{z^4+a^4};ae^{\pi i/4}\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Log}z}{z^4+a^4};ae^{3\pi i/4}\right)\right)\\&=\cdots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}\left[(2\log a-\frac{\pi}{2})+i\pi\right]\end{aligned}$$

より。$\blacksquare$

例 C.5 $a>0$ に対して、$I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{x^6+a^6}\,dx=\frac{\pi(\log a-2\pi/\sqrt{3})}{3a^5}$. 実際、

$$2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}()=\frac{\pi}{3a^5}\left(2\log a-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+i\pi\right)$$

となるので？？？ $\blacksquare$

問 8. (Ahlfors p. 174) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ (答: 0)

C.4 有理関数 $\times(\log x)^n$ の積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)(\log x)^n\,dx$

(使うときは推敲が必要。)

偶関数とは限らない有理関数 f に対して、

$$\int_0^\infty f(x)\,(\log x)^n\,dx$$

を求める ($n=0$ の場合が C.2)。

x^α も実は log を使って表されるので、このタイプである。

C.5 有理関数の有限区間の積分

この項の説明は、筆者には一松 [15] が分かりやすかった。

$a<b$ とするとき、

$$\Phi(z) := \operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}$$

は $z=a,b$ を分岐点とする。主値の性質から、$\mathbb{C}\setminus[a,b]$ で正則である。$x\in(a,b)$ とするとき、

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}\bigg|_{z=x+i\varepsilon} - \operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}\bigg|_{z=x-i\varepsilon}\right) = -2\pi i$$

である。f が $[a,b]$ の ($\mathbb{C}$ における) 開近傍 D で正則であるとき、C を $[a,b]$ を正の向きに囲む D 内の区分的に滑らかな単純閉曲線とすると、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}\,dz.$$

別ルートでやってみる。f が有理関数で、$[a,b]$ 上に極がないとする。区分的に滑らかな閉曲線 C で、それが囲む領域が f の極を含まず、$[a,b]$ を含むようなものが存在する。$x\in[a,b]$ に対して,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

であるから、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-x}dz\right)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\Phi(z)\,dz,$$
$$\Phi(z) := \int_a^b \frac{dx}{z-x} = \operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}.$$

C をどんどん "大きく" していく。f の極 c を超えるごとに積分の値は変わるけれど、留数を引けば良い。結局、十分大きい任意の R に対して、

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[a,b]}\operatorname{Res}\left(f(z)\Phi(z);c\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\Phi(z)\,dz.$$

$z\to\infty$ のとき、$\Phi(z)=\operatorname{Log}\dfrac{z-a}{z-b}\to 0$ であること、$f(z)=O\left(\dfrac{1}{z}\right)$ $(z\to\infty)$ であることから、$R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{|z|=R} f(z)\Phi(z)\,dz\to 0$. ゆえに次の定理を得る。

定理 C.5 $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z), Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+1$, $(\forall x\in[a,b])\ P(x)\ne 0$ とするとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[a,b]}\operatorname{Res}\left(f(z)\operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b};c\right).$$

例 C.6

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4+1}.$$

この場合は $\Phi(z)=\operatorname{Log}\dfrac{z+1}{z-1}$. c が $z^4+1=0$ の根であるとき、c は $f(z):=\dfrac{1}{z^4+1}$ の 1 位の極であり、

$$\operatorname{Res}(f\Phi;c)=\Phi(c)\operatorname{Res}(f;c)=\Phi(c)\left.\frac{1}{(z^4+1)'}\right|_{z=c}=\Phi(c)\frac{1}{4c^3}=\Phi(c)\frac{c}{4c^4}=-\frac{c\Phi(c)}{4}$$

であるから

$$I=-\sum_{c=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}}\operatorname{Res}(f(z)\Phi(z);c)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(最後のところは計算が相当面倒だけれどね。試験に出したら学生が泣きそう。) ■

C.6　その他 有名な積分

この節では、a を始点、b を終点とする線分を $\Gamma_{a,b}$ と表す。

例 C.7 (Fresnel (フレネル) の積分) $f(z):=\exp(-z^2/2)$ の $C:=C_1+C_2+C_3$, $C_1:=\Gamma_{0,X}$, $C_2:=\Gamma_{X,(1+i)X}$, $C_3:=\Gamma_{(1+i)X,0}$ $(X\in(0,\infty))$ に沿っての積分を考えることで、

$$\int_0^\infty\cos\left(x^2\right)dx=\int_0^\infty\sin\left(x^2\right)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

を示せ[104]。
(解) f は整関数であるから、閉曲線 C に沿う線積分は 0 である。

$$0=\int_C f(z)\,dz=\int_{C_1}f(z)\,dz+\int_{C_2}f(z)\,dz+\int_{C_3}f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$\int_{-C_3}f(z)\,dz=\int_{C_1}\,dz+\int_{C_2}\,dz.$$

[104] Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) の名を冠された Fresnel 積分 $C(x):=\displaystyle\int_0^x\cos\left(t^2\right)dt$, $S(x):=\displaystyle\int_0^x\sin\left(t^2\right)dt$ の $x\to\infty$ での極限である。Fresnel は光の回折の研究に用いた。

C_1 は $z=x$ ($x\in[0,X]$) とパラメーターづけできるから、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_0^X e^{-x^2/2}\,dx.$$

$x/\sqrt{2}=t$ と置換すると、$dx=\sqrt{2}dt$ であるから、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_0^{X/\sqrt{2}} e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\,dt\to\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

C_2 は $z=X+iy$ ($y\in[0,X]$) とパラメーターづけできる。

$$-\frac{z^2}{2}=-\frac{X^2-y^2+2iXy}{2},\quad dz=i\,dy$$

であるから、

$$\int_{C_2} f(z)\,dz=\int_0^X e^{-(X^2-y^2+2iXy)/2}\cdot i\,dy.$$

$\left|e^{-(X^2-y^2+2iXy)/2}\right|=e^{-(X^2-y^2)/2}$, $-(X^2-y^2)=-(X+y)(X-y)\le -X(X-y)$ であるから、

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right|&\le\int_0^X e^{-(X^2-y^2)/2}dy\le\int_0^X e^{-X(X-y)/2}dy\\&=\int_X^0 e^{-Xt/2}\cdot(-1)dt=\int_0^X e^{-Xt/2}dt=\left[-\frac{2}{X}\cdot e^{-Xt/2}\right]_0^X\\&=-\frac{2}{X}\left(e^{-X^2/2}-1\right)\to 0\quad(X\to\infty).\end{aligned}$$

$-C_3$ は $z=(1+i)t$ ($t\in[0,X]$) とパラメーターづけできる。$z^2=(1+i)^2t^2=2it^2$, $dz=(1+i)dt$ に注意して

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz=\int_0^X e^{-it^2}\cdot(1+i)dt=(1+i)\int_0^X\left(\cos(t^2)-i\sin\left(t^2\right)\right)dt.$$

以上まとめて、

$$(1+i)\left(\int_0^X\cos(t^2)dt-i\int_0^X\sin(t^2)dt\right)=\sqrt{2}\int_0^{X/\sqrt{2}} e^{-t^2}\,dt+\int_{C_2} f(z)\,dz\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}\quad(X\to\infty).$$

ゆえに左辺の二つの積分の $X\to\infty$ のときの極限も存在して、

$$\int_0^\infty\cos(t^2)\,dt-i\int_0^\infty\sin(t^2)\,dt=\frac{1}{1+i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{1-i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

実部、虚部を取って

$$\int_0^\infty\cos\left(t^2\right)dt=\int_0^\infty\sin\left(t^2\right)dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.\blacksquare$$

例 C.8 $\forall a\in\mathbb{R}$ に対して、

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2+i2ax}\,dx=e^{-a^2}\sqrt{\pi}.$$

実部、虚部を取って、

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)dx=e^{-a^2}\sqrt{\pi},\quad\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\sin(2ax)dx=0.$$

以上を示せ。
(解答) $a=0$ のときは良く知られた結果である (微分積分学の教科書に載っている)。広義積分の存在そのものは明らかである ($\left|e^{-x^2+i2ax}\right| = e^{-x^2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx < \infty$ であるから、絶対収束する)。$a>0$ の場合に証明すれば十分であることも容易に分かる ($a<0$ のとき、a の代わりに $|a|$ について考えれば良い)。

$f(z) := \exp(-z^2)$ とおく。$a>0$, $X>0$ に対して、$C_1 := \Gamma_{-X,X}$, $C_2 := \Gamma_{X,X+ia}$, $C_3 := \Gamma_{X+ia,-X+ia}$, $C_4 := \Gamma_{-X+ia,-X}$, $C := C_1+C_2+C_3+C_4$ とおく。f は整関数で、C は閉曲線であるから、

$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz.$$

C_1 は $z=x$ ($x\in[-X,X]$) とパラメーターづけできるので、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-X}^{X} e^{-x^2}\,dx.$$

C_2 は $z = X+iy$ ($y\in[0,a]$) とパラメーターづけでき、$-(X+iy)^2 = -(X^2-y^2+2iXy)$ であるから、

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^a \exp\left[-(X^2-y^2+2iXy)\right]\cdot i\,dy.$$

$X>a$ と仮定すると、$y\in[0,a]$ に対して、

$$\operatorname{Re}\left[-(X^2-y^2+2iXy)\right] = -(X^2-y^2) = -(X+y)(X-y) \le -X(X-y) \le -X(X-a)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| &\le \int_0^a \left|\exp\left[-(X^2-y^2+2iXy)\right]\right| dy = \int_0^a e^{-(X^2-y^2)}\,dy \\ &\le \int_0^a e^{-X(X-a)}\,dy = ae^{-X(X-a)} \to 0 \quad (X\to\infty).\end{aligned}$$

同様にして、

$$\left|\int_{C_4} f(z)\,dz\right| \to 0 \quad (X\to\infty).$$

$-C_3$ は $z = x+ia$ ($x\in[-X,X]$) とパラメーターづけできて、

$$\exp(-z^2) = \exp\left[-(x+ia)^2\right] = \exp\left[-x^2+a^2-2aix\right] = e^{a^2}e^{-x^2}\left(\cos(2ax) - i\sin(2ax)\right)$$

であるから、

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz = e^{a^2}\left(\int_{-X}^{X} e^{-x^2}\cos(2ax)dx - i\int_{-X}^{X} e^{-x^2}\sin(2ax)dx\right).$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned}e^{a^2}\left(\int_{-X}^{X} e^{-x^2}\cos(2ax)dx - i\int_{-X}^{X} e^{-x^2}\sin(2ax)dx\right) &= \int_{-X}^{X} e^{-x^2}\,dx + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz \\ &\to \sqrt{\pi} \quad (X\to\infty).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2ax)dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi}.$$

なお、この広義積分の存在そのものは明らかであり、また被積分関数が奇関数であることから明らかに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin(2ax)dx = 0.$$

あるいは一つにまとめて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{i2ax}\,dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi}.\blacksquare$$

例 C.9 $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$ に対して、

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi/n}{\sin(m\pi/n)}.$$

特殊な形の積分であるが (以下の議論で、積分路の取り方が n に依存しているので、分母を変更するのは難しい)、意外な応用があり、多くのテキストに載っている例である。

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},\quad \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$
$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^5} = \frac{4\pi}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}},\quad \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3},\quad \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^8} = \frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}},$$
$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^{10}} = \frac{(\sqrt{5}+1)\pi}{10},\quad \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^{12}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\pi}{12}.$$

なお、有理数 $r \in (0,1)$ に対して[105]、

$$\int_0^{\infty}\frac{x^r}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(r\pi)}$$

を証明するのにも利用できる ($r = m/n$ として、$x^n = u$ という置換積分をする)。

(解答) $f(z) := \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$ とおく。これは、$\exp\dfrac{(1+2k)\pi i}{n}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ を極として持ち、それ以外の範囲では正則である。$\omega := \exp\dfrac{\pi i}{n}$ とおくと、f の極は ω^{2k+1} $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ と表せる。$\omega^n = -1$, $\omega^{2n} = 1$ が成り立つ。

$R \in (1, \infty)$ に対して、

$$C_1 := \mathit{\Gamma}_{0,R},\quad C_2 : z = Re^{i\theta}\quad (\theta \in [0, 2\pi/n]),\quad C_3 := \mathit{\Gamma}_{R\omega^2,0},\quad C := C_1 + C_2 + C_3$$

とおくと、C は閉曲線で (C_2 の終点が $R\omega^2$ であることに注意)、その上に f の極はなく、内部にある f の極は ω だけである。留数定理から

$$(\sharp)\qquad \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f;\omega).$$

まず ω は f の 1 位の極であるから、

$$\mathrm{Res}(f;\omega) = \left.\frac{z^{m-1}}{(1+z^n)'}\right|_{z=\omega} = \left.\frac{z^{m-1}}{nz^{n-1}}\right|_{z=\omega} = \frac{\omega^{m-1}}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega^m}{n\omega^n} = -\frac{\omega^m}{n}.$$

[105]有理数でなくても成立する。後で別の方法で示す。

C_1 は $z = x$ $(x \in [0, R])$ とパラメーター付けできるから、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx = \int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx.$$

C_2 に沿う線積分は

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi/n} f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta$$

である。ある正数 M, R^* が存在して、$|f(z)| \le M/|z|^2$ $(|z| \ge R^*)$ という評価が成り立つので、$R > R^*$ に対して、

$$\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{2\pi/n} \left|f(Re^{i\theta})\right| \cdot R\,d\theta \le \frac{M}{R^2} \cdot R \int_0^{2\pi/n} d\theta = \frac{2\pi M}{nR} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

$-C_3$ は $z = t\omega^2$ $(t \in [0, R])$ とパラメーター付け出来るから、

$$\int_{-C_3} f(z)\,dz = \int_0^R f(t\omega^2) \cdot \omega^2\,dt = \int_0^R \frac{t^{m-1}\omega^{2(m-1)}}{1+t^n\omega^{2n}} \cdot \omega^2\,dt = \omega^{2m} \int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx.$$

$(\sharp)$ に代入して、

$$\left(1-\omega^{2m}\right) \int_0^R \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx + \int_{C_2} f(z)\,dz = -2\pi i \frac{\omega^m}{n}.$$

$R \to \infty$ とすると、左辺第 2 項が 0 に収束するので、左辺第 1 項の極限が存在して

$$(1-\omega^{2m}) \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = -2\pi i \frac{\omega^m}{n}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{-2\pi i\omega^m}{n(1-\omega^{2m})} = \frac{\pi \cdot 2i}{n(\omega^m - \omega^{-m})} = \frac{\pi}{n\sin(m\pi/n)}.\blacksquare$$

例 C.10

$$\Gamma\left(\frac{q}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{q}{p}\right) = B\left(\frac{q}{p}, 1-\frac{q}{p}\right) = p\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi q/p)}.$$

最初の等号は有名な $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ と $\Gamma(1) = 1$ による。また最後の等号は、上の例による。以下、真ん中の等号を示す。

まず $x^p = u$ という置換を用いて、

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p}dx = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{u^{q/p-1}}{1+u}du. \tag{97}$$

一方、ベータ関数の定義式

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

において、$x = t/(1+t)$ と変数変換すると

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt \tag{98}$$

が得られる。これから

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p}dx = \frac{1}{p}B\left(\frac{q}{p}, 1-\frac{q}{p}\right)$$

が得られる (真ん中の等号の証明終わり)。

稠密性の議論によって、$\forall x \in (0,1)$ に対して

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

解析接続によって $\mathbb{C}$ 全体で成立する。

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^\infty \frac{e^{z/k}}{1+z/k} \quad (\gamma \text{ は Euler の定数})$$

より、

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -\frac{e^{-\gamma z}e^{\gamma z}}{z^2}\prod_{k=1}^\infty \frac{e^{z/k}}{1+z/k}\prod_{k=1}^\infty \frac{e^{-z/k}}{1-z/k} = -\frac{1}{z^2}\prod_{k=1}^\infty \frac{1}{1-(z/k)^2}.$$

ゆえに

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -\pi z^2 \prod_{k=1}^\infty \left(1-(z/k)^2\right) = -\pi z \prod_{k=0}^\infty \left(1-(z/k)^2\right). \blacksquare$$

例 C.11

$$I = \int_0^\pi \log\sin\theta\, d\theta = -\pi\log 2.$$

問 9. (Ahlfors p. 174) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}}\,dx$ $(0<\alpha<2)$ (答 $\dfrac{\pi}{\alpha\sin(\alpha\pi/2)}$)

D 冪級数の逆数

冪級数の逆数は、関数論を学ぶのに必要不可欠というわけではないのだけれど、知っていると色々役立つので、無視しにくい事項である。

等比級数の和の公式で計算しているのを見た覚えがあるが、再現できなかった (何に載っていたのだったっけ？)。

D.1 冪級数の割算 — 係数の間の関係式

f, g が点 c の近傍で正則で、$f(c)\neq 0$ のとき、$F := \dfrac{g}{f}$ は c の近傍で正則である。冪級数の場合は、f, g, F の冪級数展開の係数の間に関係式が得られる。

補題 D.1 (冪級数の割り算) 一般に、0 の近傍における収束冪級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\quad F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

に対して、$F(z)=\dfrac{g(z)}{f(z)}$ という関係があるとき (暗に $f(0)\neq 0$ を仮定している)、

$$c_0=\frac{b_0}{a_0},\quad c_n=\frac{b_n-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kc_{n-k}}{a_0}\quad (n\in\mathbb{N}) \tag{99}$$

が成り立つ。

(99) を c_n についての方程式と考えるとき、$n=0,1,2,\dots$ の順に容易に解けることを理解しよう。

証明 $g(z)=f(z)F(z)$ であるから、絶対収束級数について成り立つ公式

$$(A_0+A_1+A_2+\cdots)(B_0+B_1+B_2+\cdots)=A_0B_0+(A_0B_1+A_1B_0)+(A_0B_2+A_1B_1+A_2B_0)+\cdots$$

すなわち

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}\right)$$

から、

$$f(z)F(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}\right)z^n.$$

これが $g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ と等しいので、係数を比較して、

$$\begin{aligned}
b_0&=a_0c_0,\\
b_1&=a_0c_1+a_1c_0,\\
b_2&=a_0c_2+a_1c_1+a_2c_0,\\
\vdots&\qquad\vdots\\
b_n&=a_0c_n+\sum_{k=1}^{n}a_kc_{n-k}\quad(n\in\mathbb{N})\\
\vdots&
\end{aligned}$$

が得られるから、上から

$$c_0=\frac{b_0}{a_0},\quad c_1=\frac{b_1-a_1c_0}{a_0},\quad c_2=\frac{b_2-a_1c_1-a_2c_0}{a_0},\quad\cdots,\quad c_n=\frac{b_n-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kc_{n-k}}{a_0}\quad(n\in\mathbb{N}).\blacksquare$$

D.2 Wronski の公式

Wronski の公式というのがあるそうだ (https://math.stackexchange.com/questions/1264615/inverse-rule-for-formal-power-series)。

$$\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & a_{n-5} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 & a_1 \end{vmatrix} \tag{100}$$

Henrici [50], Theorem 1.3 に載っているとか (おお、Henrici か、という感じ)。
元ネタはオンラインでアクセスできるとか。

> M. H. Wronski, Introduction a la Philosophie des Mathematiques: Et Technie de l'Algorithmie, Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Matheooatiqtte, quai des Augustins, n° 57, Paris, 1811
> https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6225961k

次に暇が出来たときに調べてみよう (270 ページの本のどこに載っているのやら…)。"quai des Augustins, n° 57, Paris" は出版社の住所らしい (ということを ChatGPT に教えてもらって、Google Map で調べたりした…遊んでいます)。

D.3 tan の冪級数展開の最初の数項を求める

$f(z) := \cos z$, $g(z) := \sin z$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則で、$f(z) = \cos z \neq 0$ $(|z| < \pi/2)$ であるから、

$$F(z) := \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{g(z)}{f(z)}$$

は $|z| < \dfrac{\pi}{2}$ で正則であり、

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

と Taylor 展開が出来るはずである。
実際、余談 7.14 で紹介したように、

$$\text{Bernoulli 数 } \{B_n\} \text{ を、} \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \text{ で定めるとき、}$$

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} \left(2^{2n} - 1\right) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \text{ が成り立つ。}$$

しかし、Taylor 展開の最初の数項

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

を求めるだけならば、Bernoulli 数を用いる必要はない。素朴で良ければ、f を微分して $f^{(n)}(0)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めていけば良いが、それは案外面倒で、すぐに行き詰まる。ここでは、補題 D.1 の公式 (99) を用いて計算してみよう。

cos, sin の 0 のまわりの Taylor 展開

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

は既知として用いる。$|z| < \pi/2$ では $\cos z \neq 0$ が成り立つので、

$$\tan z = \frac{z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \cdots} = z \cdot \frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 - \frac{1}{5040}z^6 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \cdots} \quad (|z| < \pi/2).$$

右辺の第 1 の因子 z を除いた部分の分母・分子は、z^2 の冪級数であるので、

$$\frac{1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 - \frac{1}{5040}z^6 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z^2\right)^n$$

と表せるはずである ($\tan z$ は奇関数なので偶数次の項は現れない、ゆえに $\dfrac{\tan z}{z}$ に奇数次の項は現れない、ということでもある)。$w = z^2$ とおくと、

$$(a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \cdots)\left(1 - \frac{1}{2}w + \frac{1}{24}w^2 - \frac{1}{720}w^3 + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{6}w + \frac{1}{120}w^2 - \frac{1}{5040}w^3 + \cdots.$$

これから

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1, \\
&-\frac{a_0}{2} + a_1 = -\frac{1}{6}, \\
&\frac{a_0}{24} - \frac{a_1}{2} + a_2 = \frac{1}{120}, \\
&-\frac{a_0}{720} + \frac{a_1}{24} - \frac{a_2}{2} + a_3 = -\frac{1}{5040}, \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

上から順に

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= -\frac{1}{6} + \frac{a_0}{2} = \frac{1}{3}, \\
a_2 &= \frac{1}{120} + \frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{24} = \frac{2}{15}, \\
a_3 &= -\frac{1}{5040} + \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{24} + \frac{a_0}{720} = \frac{17}{315}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots.$$

以下では十進 BASIC というプログラミング言語でプログラムを作成して、計算してみる。半分くらい遊びだが、計算手順が簡単なことのデモンストレーションの面もある。十進 BASIC を採用した理由は、以下のことからプログラムが比較的短く済むからである。

- 十進 BASIC では、有理数計算が可能である。そうするために、プログラムの先頭付近で `OPTION ARITHMETIC RATIONAL` と宣言する。
- cos, sin の Taylor 展開の係数は、普通は漸化式で計算するのが簡単だが、十進 BASIC には、冪乗演算子 `^` や、階乗を計算する関数 `FACT()` が用意されている。

cotangent.bas

```
OPTION ARITHMETIC RATIONAL
DECLARE EXTERNAL SUB INverse
DECLARE EXTERNAL SUB conv
LET maxn=20
OPTION BASE 0
DIM c(0 TO maxn),s(0 TO maxn),IS(0 TO maxn),cotangent(0 TO maxn)
FOR n=0 TO maxn
   LET c(n)=0
   LET s(n)=0
NEXT n
FOR j=0 TO maxn/2
   LET c(2*j)=(-1)^j/fact(2*j)
   LET s(2*j)=(-1)^j/fact(2*j+1)
NEXT j
PRINT "z/sin(z)"
CALL INverse(s,IS,maxn)
CALL PRINTc(IS,maxn)
PRINT "z cos(z)/sin(z)"
CALL CONv(IS,c,cotangent,maxn)
CALL printc(cotangent,maxn)
END
REM -------------------------------------
EXTERNAL SUB printc(a(),maxn)
OPTION ARITHMETIC RATIONAL
FOR n=0 TO maxn
   PRINT a(n)
NEXT n
END SUB
REM -------------------------------------
EXTERNAL SUB INverse(a(),b(),maxn)
OPTION ARITHMETIC RATIONAL
LET b(0)=1/a(0)
FOR n=1 TO maxn
   LET s=0
   FOR k=1 TO n
      LET s=s+a(k)*b(n-k)
   NEXT k
   LET b(n)=-s/a(0)
NEXT n
END sub
REM -----------------------------------------
EXTERNAL SUB conv(a(),b(),c(),maxn)
OPTION ARITHMETIC RATIONAL
FOR n=0 TO maxn
   LET s=0
   FOR j=0 TO n
      LET s=s+a(j)*b(n-j)
   NEXT j
   LET c(n)=s
next n
END sub
```

```
OPTION ARITHMETIC RATIONAL
LET maxn=40
DIM a(0 TO maxn+1),b(0 TO maxn)
REM sin(z) のマクローリン展開
FOR n=0 TO maxn+1
   LET a(n)=0
NEXT n
FOR j=0 TO maxn/2
   LET a(2*j+1)=(-1)^j/fact(2*j+1)
NEXT j
REM f(z)=sin(z)/z のマクローリン展開
FOR j=1 TO maxn+1
   LET a(j-1)=a(j)
NEXT j
REM 1/f(z) のマクローリン展開
LET b(0)=1/a(0)
FOR n=1 TO maxn
   LET s=0
   FOR k=1 TO n
      LET s=s+a(k)*b(n-k)
   NEXT k
   LET b(n)=-s/a(0)
NEXT n
FOR n=0 TO maxn
   PRINT b(n)
NEXT n
END
```

D.4 Bernoulli 数を用いた tan の冪級数展開

ベルヌーイ数については、例 7.13(p. 133) で紹介した。
(準備中)

E Cauchy の積分定理 再説

E.1 もう一度振り返る

Cauchy の積分定理とは、あらく言うと、

Cauchy の積分定理

複素平面内の閉曲線 C と、C の上と、C の囲む範囲で正則な関数 f に対して、

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

(C が囲む範囲に f の特異点がなければ $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$)

という主張である。

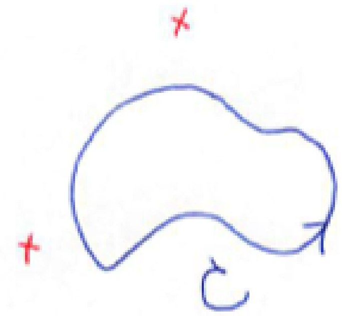


図 22: $\int_C f(z)\,dz = 0$

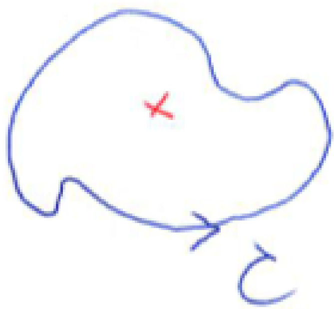


図 23: $\int_C f(z)\,dz \neq 0$ かも

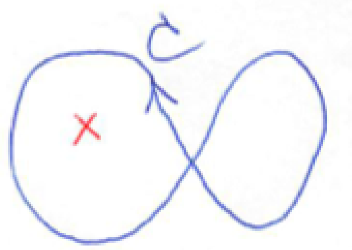


図 24: $\int_C f(z)\,dz \neq 0$ かも

これから重要な結果が導かれた。

系: 積分路の変形 (これからさらに留数定理などが得られる)

f が正則な範囲で C_1 が C_2 に「変形出来る」ならば、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$

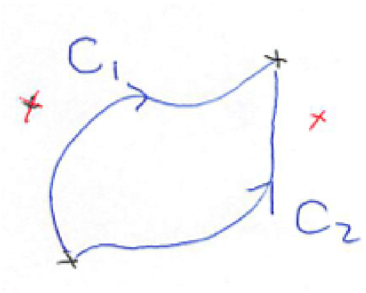


図 25: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

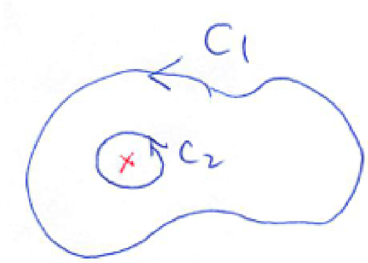


図 26: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

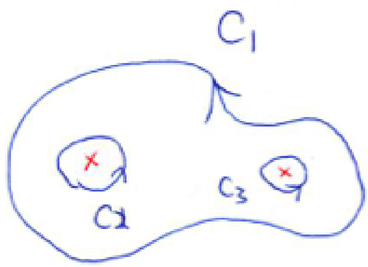


図 27: 応用: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz$

ところが「囲む」ということを数学的に定式化しようとすると、意外に難しい。図に描いてしまえば明らかに見えることも、式で表そうとすると見当もつかない人が多いのではないだろうか。

例えばコンピューターに処理させようとすると、「見れば明らか」で済ませようとするのは無理である (それではプログラムを書くことが難しい)。それだけではなく、少し複雑な状況になると、人間でも一目見ただけでは判断出来なくなる。

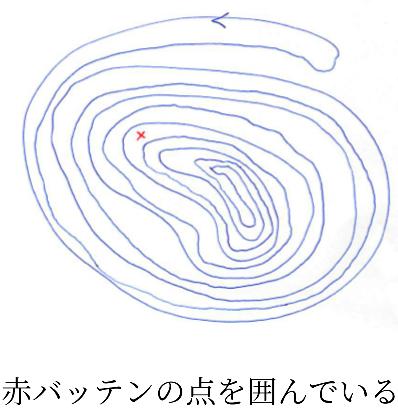


図 28: 曲線 C は赤バッテンの点を囲んでいるか？即答は難しい。

「囲む」をどう処理するか、その解決策は一通りではない。そのため Cauchy の積分定理には、複数のバージョンがある。

この節では本文 (≒講義) の中でやり残した、単連結領域における Cauchy の積分定理の説明と証明を行う。これを学ぶと、頭の中がかなりすっきりすると思われる。

定理 E.1 (単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 6.12 再掲)) Ω は $\mathbb{C}$ 内の単連結領域, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、C は Ω 内の区分的 C^1 級閉曲線とするとき

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

おまけとして、単連結 (性) と "曲線の連続的な変形" という (関数論以外にもよく出て来る) 2 つの重要な概念を学ぶことになる。

領域が単連結であるという意味は後述するが、直観的には「閉曲線が外せなくなるような障害物 (穴) がない」ということである。

E.2 本文の内容について

(ここはどのように授業の内容を決めたかという、言い訳のような話です。)

一口に「Cauchy の積分定理」,「Cauchy の積分公式」というけれど、実は色々なバージョンがある。

何をどのように紹介するか、色々考えた上で次のようにした。

1. 正則性は単に「1 回微分可能であること」と定義する (定義 2.7)。

2. 有名な Goursat-Pringsheim による「三角形の近傍で正則な関数を、周に沿って線積分すると 0」という定理 (補題 6.1) からスタートする。やはりこの証明は紹介しておくべきであろう。

3. 星型領域における Cauchy の積分定理 (定理 6.18) を証明する。これは気持よく (原理が分かりやすく、比較的簡単かつ厳密に) 証明出来て、結構使いでがある。

   例えば、平面から半直線を除いた領域は星型なので、$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z \le 0\}$ で $\dfrac{1}{z}$ の原始関数として、対数関数が定義できる。

4. 円盤領域における Cauchy の積分公式 (定理 7.1) を証明する。それから正則関数の冪級数展開可能性 (定理 7.4) が出る。
   (ここまでは前節に済んでいる。)

5. Green の公式に基づく Cauchy の積分定理 (定理 8.4) を紹介する。

   - 世の中には、Green の公式に基づく Cauchy の積分定理だけですべてを済ませるテキストも存在する。(Green の公式は一般的な場合に証明するのは大変で、微積分の講義では十分な説明が出来ないのが普通なので) 個人的にそのやり方に賛成しないが、一方でそれを無視するのも良くないと考える。(Green の公式の有用性を説明出来るし、逆に Green の公式だけでは不満足な点があるということを説明する機会を得られる。)
   - この講義の話の進め方では、ここまでで正則関数は無限回微分可能であることが証明できているので (定理 7.4 の簡単な系)、関数が C^1 級であるという条件を仮定する必要はない。

- 円環領域における正則関数が Laurent 展開出来ることを、Green の公式に基づく Cauchy の積分定理を用いて証明する。
  (孤立特異点のまわりの Laurent 展開に限定すれば、星型領域における Cauchy の積分定理を用いて比較的簡単に証明できるが、応用を考えると円環領域の場合に証明しておきたい。円環領域における Laurent 展開は、障害物が大きいので、星型領域にするにはドーナツを細かく切る必要が生じる。Green の公式に基づく Cauchy の積分定理を使えば簡単に解決する。)

6. 積分路の変形について簡単に説明する。

   (a) 曲線の始点と終点を動かさずに、曲線を領域内で連続的に変形したとき、線積分の値は変わらない。

   (b) 閉曲線を領域内で連続的に変形したとき、線積分の値は変わらない。

   これを認めると「単連結領域内の閉路に沿う線積分は 0」という、Cauchy の積分定理の有名な形が出る。この定理の証明は付録 E.5 にまわした。本文で証明しないので、以下に出て来る定理の証明には使わないが、知っておくととても見通しが良い。

それから Cauchy の積分公式の証明について。既に余談?? で説明したように、分母が 0 になる点を中心に穴を開ける、言い方を変えると積分路を変形する、という方針の証明がある。これはイメージが明瞭で魅力的だが、被積分関数が分母が 0 となる点まで込めて連続になることを用いる証明を採用した。

留数定理について、特異点の周りに穴を開ける証明がよくあるが、こちらも被積分関数の方の工夫、具体的には Laurent 展開の主部を取り去るという方針で処理する。

独白　Goursat-Pringsheim による定理を持ち出すのは、自分の個人的な経験に影響されている面が強いかもしれない。関数論の多くの結果を導くには、Green の公式から出発して、$\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$ という形の Cauchy の積分定理を導き、Cauchy の積分公式も、$a \in D$ に対して $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \dfrac{f(z)}{z-a}\,dz$ の形で済ませる方が時間の節約になるような気もする。授業で時間に追われているせいだろうか。一方で、積分路の連続的な変形のような話も入れるべきと考えると、∂D だけで済ませるのはマズイような気もする。色々迷いながら授業をしている。

E.3　正則関数の連続曲線に沿う線積分

(この項は授業では思い切ってカットする。初めて読むときは、次項 E.4 までスキップすることを勧める。)

これまで線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を考える場合、曲線 C は区分的に C^1 級であるとしてきた。しかし、次項で曲線の連続的変形を扱うため、区分的 C^1 級という条件を緩める必要がある。被積分関数 f が正則である場合は、積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の定義を、単なる連続曲線 C まで拡張できる。そのことを説明しよう。

この項の議論は、実は良くある話で、例えば $\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 0$ を満たすベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の、連続曲線に沿う線積分の定義 (桂田 [39] の付録 B.2) と同じである。初めて遭遇したときは分かりにくいかもしれないが、一度理解すれば済む話なので、適当な時期に解読することを勧める。

二段階に分けて拡張する。まず正則関数の定義域が星形領域である場合を扱う。

E.3.1 星形領域における正則関数の連続曲線に沿う (拡張) 線積分

アイディア: 原始関数を使う！

f が星形領域 Ω 内で正則であるとき、f は原始関数を持つ。すなわち $\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$.

任意の $a, b \in \Omega$ に対して、$F(b) - F(a)$ の値は F の選び方によらない。実際 $F_1\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $F_2\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が $F_1' = F_2' = f$ を満たすならば、$G(z) := F_2(z) - F_1(z)$ $(z \in \Omega)$ とおくとき、$G' = F_2' - F_1' = f - f = 0$ であるから、G は Ω で定数であるので、$F_2(b) - F_1(b) = F_2(a) - F_1(a)$. ゆえに (移項して) $F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) - F_1(a)$.

そこで f の C に沿う拡張線積分 $\mathcal{L}(f; C)$ を

$$\mathcal{L}(f; C) := F(b) - F(a) \quad (a,\ b \text{ は } C \text{ の始点と終点})$$

で定める (F の取り方によらず右辺の値が確定するので well-defined である)。

C が区分的に C^1 級の曲線であるとき、$\mathcal{L}(f; C) = \displaystyle\int_C f(z)\,dz$ が成り立つ。実際 C が Ω 内の区分的に C^1 級の曲線であるとき、F を f の原始関数として

$$\int_C f(z)\,dz = F(b) - F(a) \quad (a,\ b \text{ は } C \text{ の始点と終点})$$

が成り立つことは良く知られている。すなわち、拡張線積分 $\mathcal{L}(f; C)$ は、C が区分的に C^1 級であるときは、(これまで学んできた) 線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ と一致する (「拡張」と呼ぶのにふさわしい)。

E.3.2 一般の開集合における正則関数の連続曲線に沿う (拡張) 線積分

Ω を $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、C は Ω 内の曲線で、$z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ をそのパラメーター付け、$C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ (いわゆる C の像) とする。

$\Omega \neq \mathbb{C}$ の場合を考える ($\Omega = \mathbb{C}$ の場合は、以下の ε を $\varepsilon = \infty$ として同様に扱える)。

実は

$$\varepsilon := \inf_{z \in C^*, \zeta \in \partial\Omega} |z - \zeta| > 0 \tag{101}$$

が成り立つ。この ε を C^* と $\partial\Omega$ との距離と呼ぶ。— 実は常識的な事項である。

(101) 証明のあらすじ

C の像 C^* は、コンパクト集合 ($\mathbb{C}$ 内の有界閉集合) である (コンパクト集合 $[\alpha, \beta]$ の連続写像 φ による像であるから)。

$$\varepsilon = \inf_{z \in C^*} d(z), \quad d(z) := \inf_{\zeta \in \partial\Omega} |z - \zeta|$$

であり、$d\colon C^* \to \mathbb{R}$ は連続でいたるところ正の値を取るので、コンパクト集合 C^* 上で正の最小値を持つ。それが下限 ε に他ならない:

$$\varepsilon = \min_{z \in C^*} d(z) > 0.$$

(詳しくは、シュヴァルツ [47], あるいは桂田 [51] の付録 H を見よ。)

φ は有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ で連続であるから、一様連続である。ゆえに

$$(\exists\delta>0)(\forall t,t'\in[\alpha,\beta]:|t-t'|<\delta)\quad|\varphi(t)-\varphi(t')|<\varepsilon.$$

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$$

を満たす有限点列 $\Delta:=\{t_j\}_{j=0}^m$ を $[\alpha,\beta]$ の分割、

$$|\Delta|:=\max_{j=1,\cdots,m}(t_j-t_{j-1})$$

を分割 Δ の幅と呼ぶ (Rieamann 積分の用語)。

$|\Delta|<\delta$ を満たす任意の分割 $\Delta=\{t_j\}_{j=0}^m$ を取る。任意の $j\in\{0,1,\dots,m\}$ に対して、$z_j:=\varphi(t_j)$ とおく。また任意の $j\in\{1,\dots,m\}$ に対して、曲線 $z=\varphi(t)$ $(t\in[t_{j-1},t_j])$ を C_j とおく。$C_j^*=\varphi([t_{j-1},t_j])\subset\Omega(z_j;\varepsilon)\subset\Omega$ であり、f は星形領域 $D(z_j;\varepsilon)$ で正則であることから、$\mathcal{L}(f;C_j)$ が意味を持つ。そこで

$$\mathcal{L}(f;C):=\sum_{j=1}^m\mathcal{L}(f;C_j) \tag{102}$$

とおき、$\mathcal{L}(f;C)$ を f の C に沿う拡張線積分と呼ぶ。

(102) が well-defined であること、すなわち分割 $\Delta=\{t_j\}_{j=0}^m$ の取り方によらずに (102) の右辺の値が定まることを示すには、分割の幅が δ より小さい任意の分割に対して、共通の細分を考えることにより証明できる。分割を細分しても (102) の右辺の値は変わらないからである。

C が区分的に C^1 級である場合は、

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{j=1}^m\int_{C_j}f(z)\,dz=\sum_{j=1}^m\mathcal{L}(f;C_j)=\mathcal{L}(f;C)$$

であるから、$\mathcal{L}(f;C)$ は普通の線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の拡張である。

注意 E.2 普通、単連結性の定義をするときに用いるホモトピーは、微分可能性を仮定しないので、通常の線積分をするための区分的 C^1 級曲線のままでは問題が生じる。そのために、上では線積分を連続曲線に対して拡張したが、実は次の補題を用いるという解決手段もある。

$C_0\colon z=\varphi_0(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$, $C_1\colon z=\varphi_1(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ が D 内の区分的 C^1 級曲線で、D 内で互いにホモトピックならば、C_0 を C_1 に変形する区分的に C^1 級のホモトピー写像が存在する。すなわち連続関数 $\widetilde{\Phi}\colon[\alpha,\beta]\times[0,1]\to D$ で

(a) 各 $t\in[\alpha,\beta]$ を固定したとき $[0,1]\ni u\mapsto\Phi(t,u)$ は区分的 C^1 級

(b) 各 $u\in[0,1]$ を固定したとき $[\alpha,\beta]\ni t\mapsto\Phi(t,u)$ は区分的 C^1 級

(c) $\Phi(\cdot,0)=\varphi_0$

(d) $\Phi(\cdot,1)=\varphi_1$

(e) $(\forall u\in[0,1])$ $\Phi(\alpha,u)=\Phi(\beta,u)$

証明は堀川 [32] pp. 154–155 に載っている。色々な証明法があるものだ。■

E.4　ホモトピー形の Cauchy の積分定理

Ω を $\mathbb{C}$ 内の開集合とする。Ω 内の 2 つの閉曲線 $C_0\colon z=\varphi_0(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$), $C_1\colon z=\varphi_1(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) があるとき、C_0 が C_1 に Ω 内で**連続的に変形可能**であるとは、連続写像

$$F\colon[\alpha,\beta]\times[0,1]\to\Omega$$

で、

$$F(\alpha,u)=F(\beta,u)\quad(u\in[0,1]), \tag{103}$$

$$F(t,0)=\varphi_0(t),\quad F(t,1)=\varphi_1(t)\quad(t\in[\alpha,\beta]) \tag{104}$$

が成り立つものが存在することをいう。

(任意の u に対して $F(\cdot,u)$ は閉曲線で、$F(\cdot,0)=\varphi_0$, $F(\cdot,1)=\varphi_1$ ということである。)

このとき C_0 と C_1 は、Ω に関して**ホモトピック** (homotopic, ドイツ語は homotop) であるともいい、$C_0\simeq C_1$ と表す。これは Ω 内の閉曲線についての同値関係である。

注意 E.3 以前は、「C_0 は C_1 にホモトピー同値」と書いていたのだが、ホモトピー同値というのは、位相空間に対して使う言葉であり (位相空間 X, Y がホモトピー同値であるとは、$g\circ f\simeq \mathrm{id}_X$, $f\circ g\simeq\mathrm{id}_Y$ を満たすような連続写像 $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to X$ が存在することをいう)、曲線が曲線に連続変形できるというのは、ホモトピック (homotopic, ドイツ語では「ホモトープ」homotop) という、と指摘を受けた。遅ればせながら訂正した。自分が詳しくない言葉は、何かを参考にしたはずなのだが、その際に間違いが混入したということだろうか。

定理 E.4 (Cauchy の積分定理 (ホモトピー形)) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、C_0 と C_1 は Ω 内の閉曲線で、Ω に関してホモトピックとする。このとき

$$\int_{C_0}f(z)\,dz=\int_{C_1}f(z)\,dz.$$

特に C_1 が定数曲線 (C_1 の像が 1 点) ならば、

$$\int_{C_0}f(z)\,dz=0.$$

(**記憶用**: Ω で正則な f と、Ω に関して定数曲線にホモトピックな閉曲線 C_0 に対して、$\displaystyle\int_{C_0}f(z)\,dz=0$.)

(念のため定数曲線について説明： 曲線 $C\colon z=\varphi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) に対して、ある $z_0\in\mathbb{C}$ が存在して、$\varphi(t)=z_0$ ($t\in[\alpha,\beta]$) となっているとき、C を定数曲線と呼ぶ。$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ であるから、C は閉曲線である。$\varphi'(t)=0$ であるから、C は C^1 級の曲線であり、任意の f に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$ が成り立つ。)

証明　(図で説明すると簡単。式で書くと煩雑に見えるが、やっていることは実はシンプルである。図をうまく描くこと。)

C_0, C_1 のパラメーター付けをそれぞれ $z=\varphi_0(t)$, $z=\varphi_1(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) とする。

$C_0\simeq C_1$ であるから、ある連続関数 $\Phi\colon[\alpha,\beta]\times[0,1]\to\Omega$ が存在して、

$$(\forall u\in[0,1])\quad \Phi(\alpha,u)=\Phi(\beta,u),\qquad \Phi(\cdot,0)=\varphi_0,\qquad \Phi(\cdot,1)=\varphi_1.$$

```
In[1]:= phi0[t_] := {Cos[t], Sin[t]}

In[2]:= phi1[t_] := {3 Cos[t], 2 Sin[t]}

In[3]:= F[t_, u_] := (1 - u) phi0[t] + u phi1[t]

In[6]:= Manipulate[ParametricPlot[{phi0[t], F[t, u], phi1[t]}, {t, 0, 2 Pi},
          PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 3}}], {u, 0, 1}]
```

Out[6]=

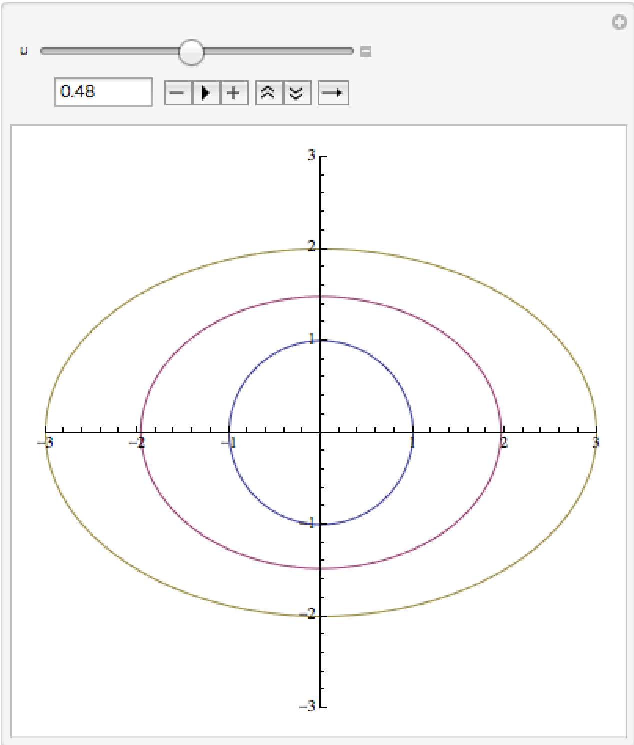


図 29: 円 $\varphi_0(t) = (\cos t, \sin t)$ を楕円 $\varphi_1(t) = (3\cos t, 2\sin t)$ に連続的に変形

φ_0, φ_1 を変えて色々試してみよう

$I := [\alpha,\beta]\times[0,1]$ とおく。また自然数 N (後で定める) に対して、$t_i := \alpha + \dfrac{i}{N}(\beta-\alpha)$ $(i=0,1,\cdots,N)$, $u_j := \dfrac{j}{N}$ $(j=0,1,\cdots,N)$, $I_{ij} := [t_{i-1},t_i]\times[u_{j-1},u_j]$ $(i=1,2,\cdots,N;$ $j=1,2,\cdots,N)$ とおく。

(t,u) が長方形 I の周を正の向きに一周するときの $\Phi(t,u)$ を曲線 C と考える。すなわち

$$\varphi(s)=\begin{cases}\Phi(\alpha+(\beta-\alpha)s,0) & (s\in[0,1])\\ \Phi(\beta,s-1) & (s\in[1,2])\\ \Phi(\beta-(\beta-\alpha)(s-2),1) & (s\in[2,3])\\ \Phi(\alpha,1-(s-3)) & (s\in[3,4])\end{cases}$$

で定めた $\varphi\colon[0,4]\to\Omega$ をパラメーター付けとする曲線を C とする。

同様に、(t,u) が長方形 I_{ij} の周を正の向きに一周するときの $\Phi(t,u)$ を曲線 C_{ij} と考える。すなわち

$$\varphi_{ij}(s)=\begin{cases}\Phi(t_{i-1}+(t_i-t_{i-1})s,u_{j-1}) & (s\in[0,1])\\ \Phi(t_i,u_{j-1}+(u_j-u_{j-1})(s-1)) & (s\in[1,2])\\ \Phi(t_i-(t_i-t_{i-1})(s-2),u_j) & (s\in[2,3])\\ \Phi(t_{i-1},u_j-(u_j-u_{j-1})(s-3)) & (s\in[3,4])\end{cases}$$

で定めた $\varphi_{ij}\colon[0,4]\to\Omega$ をパラメーター付けとする曲線を C_{ij} とする。

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\int_{C_{ij}}f(z)\,dz$$

が成り立つ。

I は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であり、$\Phi\colon I\to\Omega$ は連続であるから、$\Phi(I)$ は $\mathbb{C}$ の有界閉集合で、Ω に含まれる。$\Phi(I)$ と $\partial\Omega$ との距離を ε とすると、$\varepsilon>0$ (実際 $\Phi(I)\cap\partial\Omega=\emptyset$, $\Phi(I)$ は有界閉集合, $\partial\Omega$ は閉集合であるから、距離は正である).

$\Phi\colon I\to\Omega$ は連続であるから、実は一様連続であり、$(\exists\delta>0)$ $(\forall(t,u),(t',u')\colon|(t,u)-(t',u')|<\delta)$ $|\Phi(t,u)-\Phi(t',u')|<\varepsilon$. N を十分大きく取ると、I_{ij} の直径が δ より小さくなる。そのとき $C_{ij}^*\subset\Phi(I_{ij})\subset D(\Phi(t_i,u_j);\varepsilon)\subset\Omega$. $D(\Phi(t_i,u_j);\varepsilon)$ は円板なので星形領域であり、f はそこで正則であるから、

$$\int_{C_{ij}}f(z)\,dz=0.$$

ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

$\Gamma_0\colon z=\Phi(\alpha,u)$ $(u\in[0,1])$, $\Gamma_1\colon z=\Phi(\beta,u)$ $(u\in[0,1])$ とすると、$C=C_0+\Gamma_1-C_1-\Gamma_0$ であるが、実は Γ_0 と Γ_1 は同じであるから

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C_0}f(z)\,dz+\int_{\Gamma_1}f(z)\,dz-\int_{C_1}f(z)\,dz-\int_{\Gamma_0}f(z)\,dz=\int_{C_0}f(z)\,dz-\int_{C_1}f(z)\,dz.$$

ゆえに $\displaystyle\int_{C_0}f(z)\,dz=\int_{C_1}f(z)\,dz.$ ■

余談 E.5 (端点を共有する互いにホモトープな曲線に対する線積分, 積分路の変形) 同様のやり方で、閉曲線でない曲線を取り扱うことも出来る。Ω を $\mathbb{C}$ の開集合、$C_0 : z=\varphi_0(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$, $C_1 : z=\varphi_1(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ を Ω 内の曲線で、始点と終点がそれぞれ一致する、すなわち

$$\varphi_0(\alpha)=\varphi_1(\alpha),\quad \varphi_0(\beta)=\varphi_1(\beta)$$

が成り立つとする。連続関数 $F\colon [\alpha,\beta]\times[0,1]\to\Omega$ で

$$F(t,0)=\varphi_0(t),\quad F(t,1)=\varphi_1(t)\quad (t\in[\alpha,\beta]),$$

$$F(\alpha,u)=\varphi_0(\alpha),\quad F(\beta,u)=\varphi_0(\beta)\quad (u\in[0,1])$$

を満たすものが存在するとき、C_0 と C_1 は**ホモトープ** (homotop, 連続変形可能) といい、F を C_0 と C_1 の間の**ホモトピー** (homotopy, 変形写像) と呼ぶ。このとき、Ω で正則な関数 f に対して、

$$\int_{C_0} f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz$$

が成り立つ。 — 始点と終点を動かさなければ、積分路を被積分関数が正則な範囲で連続的に変形しても線積分の値は変わらない。■

E.5 単連結領域における Cauchy の積分定理

(本文中の 6.4 の続きに相当する。)

前項の定理で、閉曲線が 1 点 (定数曲線) に連続的に変形可能という条件が出て来たが、直観的に

穴がない領域では、任意の閉曲線は 1 点 (定数曲線) に連続的に変形可能

という主張が信じられるであろう。

後半の条件に「単連結」という名前をつけることにする。

以下、少し一般化して、$\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ の領域に関する用語として定義する (連続的に変形というのを $\mathbb{C}$ 内の曲線に対してしか定義していないが、その一般化は容易に了解出来ると思う)。

定義 E.6 (単連結) Ω を $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{C}^n$ の領域とする．Ω が**単連結** (simply-connected) であるとは，Ω 内の任意の閉曲線が定数曲線に Ω 内で連続的に変形できることを言う。つまり、閉曲線を $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とするとき、ある連続関数 $F\colon [\alpha,\beta]\times[0,1]\ni(t,s)\mapsto F(t,s)\in\Omega$ で、

$$\begin{aligned}&F(t,0)=\varphi(t)\quad (t\in[\alpha,\beta]),\\&F(t,1)=a\quad (t\in[\alpha,\beta])\end{aligned}$$

を満たすものが存在する。

定理 E.7 (単連結領域における Cauchy の積分定理) D は $\mathbb{C}$ の領域で単連結、$f\colon D\to\mathbb{C}$ は正則、C は D 内の閉曲線とするとき、

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

証明 定理 E.4 の後半であり、証明済みである。■

系 E.8 D は $\mathbb{C}$ の領域で単連結、$f\colon D\to\mathbb{C}$ は正則とするとき、f は原始関数を持つ。

例 E.9 (本文中にも書いてあって、繰り返しになるけれど) 単連結な領域の例として，全空間 $\mathbb{R}^n$，開球 $B(\boldsymbol{a};R)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<R\}$，凸領域[106]，星型領域[107]，平面内の単純閉曲線 (Jordan 閉曲線) が囲む領域，3 次元空間での 1 点の補集合 $\mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ などがある．

単連結でない領域の例としては，2 次元空間での 1 点の補集合 $\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ (複素平面での 1 点の補集合 $\mathbb{C}\setminus\{c\}$ と本質的に同じ), $\mathbb{R}^3\setminus\ell$ (ℓ は両方向に無限にのびた直線)，輪環面の内部（ドーナツ型の領域）などがある． ■

問 88. (1) $\mathbb{R}^n$ は凸領域であることを示せ。(2) 開球 $B(a;R)$ は凸領域であることを示せ。(3) 凸領域は星型であることを示せ。(4) 星型領域が単連結であることを示せ。

つまり

$$\text{全空間または開球} \Rightarrow \text{凸} \Rightarrow \text{星型} \Rightarrow \text{単連結}$$

最後のところにもう 1 つ割りこませよう。

領域 D が以下の条件をみたすとき、D を可縮 (contractible) という。$\exists c\in D$, $\exists F\colon D\times[0,1]\to D$ 連続, $F(\cdot,0)=\mathrm{id}_D$, $F(x,1)=c$ $(x\in D)$.

問 89. (1) 星形領域は可縮であることを示せ。 (2) 可縮な領域は単連結であることを示せ。

直観的には、Ω が単連結とは、Ω の中に閉曲線が外せなくなるような障害物が存在しないということである。

任意の単純閉曲線が囲む領域は単連結である。これは明らかに思えるかもしれないが、それほど自明ではなく、有名な定理となっている。

定理 E.10 (Jordan 曲線定理) 平面内の Jordan 閉曲線 C があるとき，有界かつ単連結な領域 G_1 と非有界領域 G_2 が存在して、

$$\mathbb{R}^2=G_1\cup G_2\cup C^*,\quad G_1\cap G_2=\emptyset,\quad G_1\cap C^*=\emptyset,\quad G_2\cap C^*=\emptyset.$$

ただし、C^* は C の像とする。さらに C^* は G_1, G_2 の共通の境界である。

G_1 のことを Jordan 閉曲線 C で囲まれる領域といい、Jordan 領域と呼ぶこともある。

大昔のテキストでは、この Jordan 曲線定理を背景にして次のような定理を用いた。

複素平面内の区分的 C^1 級の単純閉曲線 C と、C が囲む領域の両方を含むある開集合上で正則な関数 f に対して

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

が成り立つ。

これはシンプルで覚えやすいが、Jordan 曲線定理という大定理 (講義で証明するのは時間的制約から難しい) を仮定する必要があるので、最近 (20 世紀後半以降) の関数論のテキストでは避けられている。

[106] Ω が凸とは、Ω 内の任意の 2 点を結ぶ線分が Ω 内に含まれることを言う。すなわち $(\forall x,y\in\Omega)$ $(\forall t\in[0,1])$ $(1-t)x+ty\in\Omega$.

[107] Ω が星型とは, Ω 内のある 1 点から、Ω 内の任意の点が見渡せることをいう。言い換えると、$(\exists a\in\Omega)$ $(\forall x\in\Omega)$ $(\forall t\in[0,1])$ $(1-t)a+tx\in\Omega$.

E.6 楽屋裏

(Cauchy の積分定理のうち、どの形のものをどのように紹介するか、E.2 で述べたが、そう選択した理由をもう少し説明しておく。)

Cauchy の積分定理は、もともとは次の形で述べられることが多かったそうである。

定理 E.11 任意の区分的に C^1 級な単純閉曲線 C と、C の囲む領域 D の閉包 $\overline{D}$ を含む (ある) 開集合で正則な f に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$.

単純閉曲線がいつでも領域を囲むことは、証明が必要なこととはみなされていなかった。19 世紀の末頃、それは明らかなことではなく、証明を要することだと認識されるようになり、Camille Jordan (1838–1922) が最初にその証明を試みたことにちなみ、この定理は今では **Jordan 曲線定理** (Jordan curve theorem, Jordan 閉曲線定理) と呼ばれている (という説明を一松 [2] で読んだことがあり、受け売りしているだけ。Wikipedia によると、最初に定式化したのは、Bolzano-Weierstrass の定理で有名な Bolzano であるとか。)。

Jordan 曲線定理は、明らかとも思えるその主張の簡単さからは想像できないほど、証明するのが大変である。

そのせいか関数論のテキストでは、20 世紀の途中から、徐々に Jordan 曲線定理の利用を避けるようになり、今では Jordan 曲線定理を前提とするテキストはあまりない。

(余談: 関数論では、曲線は区分的に C^1 のものに限っても十分で、その場合は Jordan 曲線定理も比較的簡単に証明できる、という意見の人もいるみたい。)

それではどうするかというと、大まか、次の二つのやり方がある。

(1) 簡単な曲線 (三角形や長方形の周とか)、簡単な領域 (円盤領域や星型領域) から始め、それで円盤における Cauchy の積分公式を導いてしまう。正則関数の性質や Laurent 展開、留数の議論をするのはそれで十分である。それ以降、必要があれば、

- 閉曲線 C の点 a の周りの回転数 $n(C;a)$ を導入してトポロジカルな (位相幾何学的な) 問題を処理する
- ホモトピー形の Cauchy の積分定理を導入する

などを行う。

(2) Green の公式に基づく Cauchy の積分定理からスタートする。

この方法の長所の 1 つとして、Green の定理は、D の境界が、有限個の互いに交わらない単純閉曲線の和である場合に拡張した形で述べられていることが多く、これを使うと Cauchy の積分定理も便利な形になることがあげられる。

一方、短所としては次のものがあげられる。

(a) 普通の Green の公式は、u_x, u_y, v_x, v_y の連続性は仮定するので、Cauchy の積分定理の仮定、または関数 f の正則性の定義に、導関数 f' の連続性を含める必要がある[108]。

[108] 導関数の存在を仮定するならば、その連続性も同時に仮定するのが自然である、という意見の先生もいる。少しずれるが、正則関数の実部・虚部 u, v の偏導関数の連続性がすぐに分からなくても、Cauchy-Riemann 方程式から、$v_x + u_y$ と $u_x - v_y$ はともに恒等的に 0 に等しいことが導かれるので、これら関数は連続であり、Goursat-Bochner の定理によって

$$\int_{\partial D} u\,dx - v\,dy = -\iint_D (v_x + u_y)dx\,dy, \quad \int_{\partial D} v\,dx + u\,dy = -\iint_D (u_x - v_y)dx\,dy$$

が成り立つ、という議論の仕方もある (一松 [52])。

(b) Green の公式の証明にはそれなりの手間がかかる。ここをどうするかはちょっと悩ましい。Green の公式は微積分で習うことだからと言って、証明は他の本に丸投げしてしまうテキストがあるが、無責任であると思われる。

この問題について、小平 [53], 堀川 [32], 笠原 [38] は誠実に対処している。[32] では、Green の公式を簡単な場合に限って、きちんと説明し、それを用いて証明した Cauchy の積分定理を使って関数論を展開している[109]。[38] は、1 の分解や軟化作用素など、やや高度の道具を使って一般性の高い形の Green の公式を証明している。それは初学者向きと言えないが、ある程度数学を学んだ人にとっては、非常に参考になると思われる。(ちなみに杉浦 [31] では、関数論のパートでは使っていないが、一般的な Green の公式を証明してある。)

(c) 曲線が、領域の境界をなすものに限られるので、例えばポテンシャルを構成したりするときに少し面倒になる。

色々考えた末に、(1) と (2) のどちらとも異なるやり方を採用することにした。スタートからしばらくは (1) の路線を走り、正則関数の冪級数展開可能性が示せたあたりで、(2) のやり方を説明して、Green の公式にもとづく Cauchy の積分公式の説明をする。Green の公式は、一般性を追求しなければ証明は簡単であるし、そういう簡略版の公式から導かれた Cauchy の積分定理であっても、かなりの威力を発揮する。

欲を言うと、閉曲線の回転数を用いた形の Cauchy の積分公式を紹介したかったが、それを現在ある内容に、うまく取り込む方法が見つからなかった。(回転数は図形的意味は大変わかりやすいし、Cauchy の積分公式や留数定理の証明がすっきり出来るのは非常に魅力的である。面倒なことの多くを回転数に任せられる、という感じがする。回転数の簡単な計算手段が用意出来れば、それを軸とする講義が出来そうな気がしているが、今のところペンディング。) 回転数を用いた Cauchy の積分公式については、Ahlfors [27], 一松 [2], 高橋 [22], 杉浦 [31], 加藤 [54], 野村 [55] などがある。

E.7 一松 [2] (1957) の VI 章 §4 から引用

数学は一度吸収してから、自分の言葉で書き直すことが出来るのだけど、歴史的事実に関してはそういうことがやりづらく (細かい表現の中に大事な事実が潜んでいたりします)、「写経」をすることにしています (こういうのはスキャンでなくて、キーボードからタイプ入力します)。一松 [2] から少し長めの引用をしたのですが、WWW に置くのは良くないと思うので、ここでは見せません (要するに自分向けです)。[2] は現在入手が難しいので、何とかならないかな、と思っているのですが。

E.8 チェックすべき論文

Dixon の証明とその改良については、Dixon [56], Loeb [57], [58] を見よ。
Olsen [59]
Gray [29]

[109] 余談になるが、以前微積分を担当していたとき、色々考えた末に、Green の公式で無理をせず、証明が比較的簡単に済む場合に限り、後はその限定版の定理だけを使って議論を展開した。関数論でもそれと同じことをすれば良いということだが、そういう書き方をしている本がなぜかあまりない。[32] の議論の進め方は腑に落ちた。

F　回転数を使った Cauchy の積分定理, 積分公式, 留数定理

(工事中。あらっぽいです。この節では、ホモロジー群の言葉を「中途半端に」使っているが、もう少しきちんとやりたければ、適当な参考書、例えば加藤 [54] を読むと良い。)

F.1　チェインとサイクル

曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を順につないで 1 つの曲線 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ が得られるとき、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz \tag{105}$$

が成り立つ。

曲線がつなげられないときにも、形式的な和 $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, さらには整数係数の形式和

$$C = a_1 C_1 + a_2 C_2 + \cdots + a_n C_n \quad (a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{Z})$$

を考え、これを**チェイン**と呼ぶ。

このチェイン C に対して

$$\int_C f(z)\,dz = a_1 \int_{C_1} f(z)\,dz + a_2 \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + a_n \int_{C_n} f(z)\,dz$$

で積分を定義する。記号の濫用になるが矛盾は生じない。

チェインの全体は $\mathbb{Z}$-加群になる。

チェインのうちで、閉曲線の和として表せるものを**サイクル**と呼ぶ。チェインがサイクルであるためには、各曲線の始点の全体と終点の全体が重複度を込めて等しいことが必要十分である。

F.2　回転数

$\mathbb{C}$ 内の区分的に C^1 級の閉曲線 C と、$a \in \mathbb{C} \setminus C^*$ に対して、C に関する a の**指数** (あるいは a のまわりの C の**回転数**) $n(C,a)$ を

$$n(C,a) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z-a}$$

で定義する。

命題 F.1 $n(C,a)$ は整数である。

証明　C のパラメーター表示を $z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ とする。

$$F(t) := \int_\alpha^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)-a} ds$$

とおくとき、

$$F(\alpha) = 0, \quad F(\beta) = n(C,a), \quad F'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-a}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{-F(t)}(\varphi(t)-a)\right) &= e^{-F(t)}\left(-F'(t)\right)\cdot(\varphi(t)-a) + e^{-F(t)}\cdot\varphi'(t) \\ &= -e^{-F(t)}\left[F'(t)\left(\varphi(t)-a\right) - \varphi'(t)\right] = 0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$e^{-F(\beta)}(\varphi(\beta)-a)=e^{-F(\alpha)}(\varphi(\alpha)-a)=\varphi(\alpha)-a.$$

ゆえに

$$e^{F(\beta)}=\frac{\varphi(\beta)-a}{\varphi(\alpha)-a}.$$

$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ であるから、$e^{n(C,a)}=e^{F(\beta)}=1$. ゆえに $n(C,a)\in\mathbb{Z}$. ■

回転数は、サイクルに対して容易に拡張でき、そうしても整数値を取る。

F.3 回転数を用いた Cauchy の積分定理, 積分公式

すぐ後で一般の場合の Cauchy の積分公式を述べて証明するので、次の命題は論理的には不要であるが、回転数が便利であることを理解するのを助けるので、あえて述べる。

命題 F.2 (円盤における Cauchy の積分公式) f は $\Omega:=D(c;r)$ で正則で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の閉曲線とするとき、任意の $a\in\Omega\setminus C^*$ に対して、

$$n(C,a)f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

証明 円盤における Cauchy の積分定理により、連続かつ 1 点を除き正則な関数の C に沿う積分は 0 であるから、

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,dz-f(a)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{z-a}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,dz-f(a)n(C,a).\blacksquare\end{aligned}$$

定義 F.3 (1) $\mathbb{C}$ の開集合 Ω 内のサイクル C が、Ω に関して 0 にホモローグ (homologous to 0) とは、

$$(\forall a\in\mathbb{C}\setminus\Omega)\quad n(C,a)=0.$$

(Ω の補集合のすべての点を 0 回だけ回転する。)

(2) $\mathbb{C}$ の開集合 Ω 内のサイクル C_1,C_2 に対して、C_1 と C_2 が Ω に関してホモローグであるとは、C_1-C_2 が Ω に関して 0 にホモローグであることをいう。

C が Ω に関して 0 にホモローグというのを、$C\sim 0\ (\mathrm{mod}\ \Omega)$ と書くことがある。

(ホモトピーを知っている人に) C_1 と C_2 がホモトピックならば、C_1 と C_2 は Ω に関してホモローグである。

定理 F.4 (Cauchy の積分定理, 積分公式 (ホモロジー版)) $\mathbb{C}$ の開集合 Ω 内のサイクル C が、Ω に関して 0 にホモローグとするとき、(1), (2) が成り立つ。

(1) $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ が正則ならば、

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

(2) $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ が正則ならば、$a\in\Omega\setminus C^*$ に対して

$$n(C,a)f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

(1) は、Ω 内のサイクル C に対して次が成り立つ、ということである。

$$\left[(\forall a\in\mathbb{C}\setminus\Omega)\ n(C,a)\overset{\text{def.}}{=}\int_C\frac{dz}{z-a}=0\right]\Rightarrow\left[(\forall f\in\mathcal{O}(\Omega))\int_C f(z)\,dz=0\right].$$

(これまで「C が f の定義域外の点を囲まなければ、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$ が成り立つ」と言って来たが、「C が a を囲まない」が $n(C,a)=0$ という具体的な式で表されている、と言える。)

証明 (John D. Dixon [56]) C が閉曲線であるとして証明すれば良い。

$z,\zeta\in\Omega$ に対して、

$$g(z,\zeta):=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} & (z\neq\zeta)\\ f'(z) & (z=\zeta)\end{cases}$$

とおくとき、各 $\zeta\in\Omega$ を固定するごとに、(Riemann の除去可能特異点定理により) $z\mapsto g(z,\zeta)$ は Ω で正則であり、g は $\Omega\times\Omega$ で連続である (実際…)。

$$E:=\{a\in\mathbb{C}\setminus C^*\mid n(C,a)=0\}$$

とおくと、E は開集合で、$\mathbb{C}\setminus C^*$ の非有界な連結成分 Ω_0 を含む。

C が Ω に関して 0 にホモローグというのは、$\mathbb{C}\setminus\Omega\subset E$ ということである。ゆえに $\mathbb{C}=\Omega\cup E$. そこで

$$h(z):=\begin{cases}\displaystyle\int_C g(z,\zeta)d\zeta & (z\in\Omega)\\ \displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta & (z\in E)\end{cases}$$

とおく。($z\in\Omega\cap E$ に対して、重複して定義されていて、矛盾しないか心配になるが) h は well-defined である。実際、$z\in\Omega\cap E$ とすると ($n(C,z)=0$ であるから)

$$\int_C g(z,\zeta)d\zeta=\int_C\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta=\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)n(C,z)=\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

h は $\mathbb{C}$ で定義されているが、実は整関数である。そして

$$\lim_{z\to\infty}h(z)=\lim_{z\to\infty}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0.$$

(実際、

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|\le\frac{\max\limits_{\zeta\in C^*}|f(\zeta)|}{\min\limits_{\zeta\in C^*}|\zeta-z|}$$

と評価できるので、$z \to \infty$ のとき、$\max_{\zeta \in C^*} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \to 0$.)

ゆえに h は有界であるから、Liouville の定理により、h は定数である。再び $z \to \infty$ で 0 に収束することから、$h = 0$.

ゆえに $z \in \Omega \setminus C^*$ に対して

$$0 = \int_C g(z,\zeta) d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - n(C,z) f(z).$$

従って

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = n(C,z) f(z).$$

一方 $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ の場合は $z \in E$ であるから

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = h(z) = 0 = n(C,z) f(z).$$

ゆえに (2) が成立する。

次に $a \in \Omega \setminus C^*$ とするとき、$z \mapsto (z-a) f(z)$ に (2) の結果を用いると

$$n(C,z) \left((z-a) f(z) \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)(\zeta - a)}{\zeta - z} d\zeta.$$

$z = a$ とおくと、(1) が導かれる。■

この証明では、まず (2) を先に証明したが、もしも (1) を認めれば、円盤領域の場合と同様に[110]

$$0 = \int_C \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \, dz = \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) n(C,a)$$

として (2) が導かれる。

F.4 留数定理

定理 F.5 Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、c_1, $\cdots$, c_n は Ω 内の相異なる点、$f \colon \Omega \setminus \{c_1, \cdots, c_n\} \to \mathbb{C}$ は正則、C は Ω 内のサイクルで、Ω に関して 0 にホモローグで、どの c_j も通らないとすると、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \, dz = \sum_{j=1}^{n} n(C, c_j) \operatorname{Res}(f; c_j).$$

証明 簡単である。■

F.5 個人的な感想

回転数を用いない従来のやり方では、定理の中で「曲線」の前に「任意の」という言葉をつけようとして、(まったく無条件では成り立たないため) 適当な条件を設定する必要が生じ、そこで苦労が発生している、という面がある。実際の応用では、ほとんどの場合、特定の単純な曲線が考察の対象となるので、苦労が大きな無駄になっている感じがする。

[110] 0 に等しいことを示すのに、円盤領域の場合は、任意の閉曲線 C に沿う積分が 0 であることを使い、ここでは領域を一般にする代わりに、C が Ω に関して 0 にホモローグという条件を課した。

これに対して、回転数を用いるやり方では、曲線の回転数が定理の結果の式に現れる。実際に用いる個々の曲線について回転数を計算すれば良いので、曲線が単純な場合は (そして大抵の場合はそうなっている) ほとんど苦労がない。

このやり方を初めて知ったときは、責任を回転数に上手く押し付けた、ずるい！と一瞬感じたが、そもそも、そんな苦労をする必要はなかったのだ、と気づく。

0 にホモローグというホモロジーの概念が、回転数という具体的な積分で表現できることに気づいたのは Artin であるらしいが、慧眼と言うしかない。

Dixon の証明をもう少しかみ砕いて説明できるようにして、それから具体的な閉曲線の回転数の計算が簡単に出来るような解説を書けば、本文に持っていけるかもしれない。

G　有理式の部分分数分解

有理式の部分分数分解が良く分かっていない人もいるようなので、簡単に説明しておく。

有理式

$$f(z)=\frac{z^3-7z^2+26z-30}{z^3-5z^2+3z+9} \tag{106}$$

を例に取り上げる。

分子の多項式 $z^3-7z^2+26z-30$ を分母の多項式 z^3-5z^2+3z+9 で割ると、商と剰余はそれぞれ $1, -2z^2+23z-39$ であるから

$$f(z)=\frac{1\cdot(z^3-5z^2+3z-9)+(-2z^2+23z-39)}{z^3-5z^2+3z+9}=1+\frac{-2z^2+23z-39}{z^3-5z^2+3z+9}. \tag{107}$$

こうして、$f(z)$ を多項式 1 と、分子の次数 $<$ 分母の次数である有理式 $\dfrac{-2z^2+23z-39}{z^3-5z^2+3z+9}$ の和に分解できた。

この例と同じ手順で、一般の有理式が、多項式と、分子の次数 $<$ 分母の次数である有理式の和に分解できることが分かる。

次に $\dfrac{-2z^2+23z-39}{z^3-5z^2+3z+9}$ の分母は

$$z^3-5z^2+3z+9=(z+1)(z-3)^2$$

のように 1 次多項式の積の形に因数分解できる (代数学の基本定理によって、任意の多項式は “原理的には” 1 次多項式の積の形に因数分解できる— もっとも具体的な形で求めることができるかどうかは、また別の問題である)。

注　微積分で、実係数有理式の不定積分を計算する場合は、実係数多項式の範囲で因数分解する必要があるが、複素関数では、実係数多項式に限る必要はなく、複素係数多項式を用いることが出来るので、1 次多項式の積の形に分解できる。

ゆえに

$$f(z)=1+\frac{-2z^2+23z-39}{(z+1)(z-3)^2}. \tag{108}$$

ここで次の定理が成り立つことに注意する。

定理 G.1 (分母が互いに素な因数の積であれば分解できる) $f_1(x)$, $f_2(x)$ は、x の多項式で、0 でなく、互いに素であるならば、任意の多項式 $r(x)$ に対して、ある多項式 $g_1(x)$, $g_2(x)$ が存在して

$$\frac{r(x)}{f_1(x)f_2(x)}=\frac{g_1(x)}{f_1(x)}+\frac{g_2(x)}{f_2(x)}$$

が成り立つ。特に左辺で、分子の次数 $<$ 分母の次数であれば、右辺の各項についてもそうなるような $g_1(x)$, $g_2(x)$ が存在する。

証明　一般に、$d(x)$ が $f_1(x)$, $f_2(x)$ の最大公約多項式であるとき

$$f_1(x)h_1(x)+f_2(x)h_2(x)=d(x)$$

を満たす多項式 $h_1(x)$, $h_2(x)$ が存在する (常識的なことなので認めることにする)。$f_1(x)$, $f_2(x)$ が互いに素である場合は、$d(x)=1$ と選べるので、

$$\frac{1}{f_1(x)f_2(x)}=\frac{h_1(x)}{f_2(x)}+\frac{h_2(x)}{f_1(x)}$$

が成り立つ。これから主張が正しいことが導かれる。

以上、詳しくは、例えば桂田 [60] に載っている。■

この定理を用いると、

$$\frac{-2z^2+23z-39}{(z-3)^2(z+1)}=\frac{az+b}{(z-3)^2}+\frac{C}{z+1} \tag{109}$$

を満たす複素数 a, b, C が存在することが分かる。このとき

$$(\exists A,B\in\mathbb{C})\quad az+b=A(z-3)+B \tag{$\heartsuit$}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\frac{az+b}{(z-3)^2}=\frac{A(z-3)+B}{(z-3)^2}=\frac{A}{z-3}+\frac{B}{(z-3)^2}$$

を満たす A, B が存在する。($\heartsuit$) が成り立つことは少し考えれば分かる。より一般に、有理式

$$R(z)=\frac{Q(z)}{(z-c)^m},\quad Q(z)=m-1\text{ 次以下の多項式}$$

に対して、ある複素数 $A_1,\cdots,A_m$ が存在して

$$Q(z)=A_1(z-c)^{m-1}+A_2(z-c)^{m-2}+\cdots+A_m,$$

ゆえに

$$R(z)=\frac{A_1}{z-c}+\frac{A_2}{(z-c)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(z-c)^m}$$

が成り立つことが、次の定理から証明できる。

定理 G.2 x の多項式 $f(x)$ と任意の数 a に対して、ある多項式 $g(x)$ が存在して、

$$f(x)=g(x-a)$$

が成り立つ。

証明　$y=x-a$ とおくと、$x=y+a$. $f(x)=f(y+a)$ が成り立つが、$f(y+a)$ が y の多項式になることは明らかであろう。それを $g(y)$ とおくと

$$f(x)=g(y)=g(x-a).■$$

例 G.3 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$, $a=1$ とする。$f(x)$ を $x-1$ の多項式で表すには、$y=x-1$ とおき、$x=y+1$ から

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^3+2x^2+3x+4\\
&=(y+1)^3+2(y+1)^2+3(y+1)+4\\
&=y^3+3y^2+3y+1+2y^2+4y+2+3y+3+4\\
&=y^3+5y^2+10y+10\\
&=(x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+10.
\end{aligned}$$

(別法 1) f を $x=1$ のまわりで Taylor 展開する。3 次多項式なので $f^{(4)}(x)=0$ であることに注意すると、4 次の剰余項は 0 になることが分かる。ゆえに

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

これに $f(1)=1$, $f'(1)=10$, $f''(1)=10$, $f'''(1)=6$ を代入すると

$$f(x)=1+10(x-1)+\frac{10}{2}(x-1)^2+\frac{6}{6}(x-1)^3=(x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+1.$$

(別法 2) $x-1$ で割ることを繰り返して、あまりを逆向きに拾う。

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
1 & & 1 & 3 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 6 & \boxed{10} & \\
1 & & 1 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{10} & & \\
1 & & 1 & & & \\
\hline
 & \boxed{1} & \boxed{5} & & &
\end{array}$$

これから $x^3+2x^2+3x+4=(x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+10$ である。実際、

$$\begin{aligned}
x^3+2x^2+3x+4&=(x^2+3x+6)(x-1)+10,\\
x^2+3x+6&=(x+4)(x-1)+10,\\
x+4&=(x-1)+5.
\end{aligned}$$

ここから逆に

$$\begin{aligned}
x^2+3x+6&=((x-1)+5)(x-1)+10=(x-1)^2+5(x-1)+10,\\
x^3+2x^2+3x+4&=(((x-1)+5)(x-1)+10=\left[(x-1)^2+5(x-1)+10\right](x-1)+10\\
&=(x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+10.
\end{aligned}$$

(実際的には、別法 2 が効率的である。) ■

以上から

$$\frac{-2z^2+23z-39}{(z-3)^2(z+1)}=\frac{A}{z-3}+\frac{B}{(z-3)^2}+\frac{C}{z+1} \tag{110}$$

を満たす複素数 A, B, C が存在することが分かった。

ゆえに

$$A(z-3)(z+1)+B(z+1)+C(z-3)^2=-2z^2+23z-39\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,3\}).$$

2 次方程式の解は 3 個以上存在しないので、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$A(z-3)(z+1)+B(z+1)+C(z-3)^2 = -2z^2+23z-39 \tag{111}$$

が成り立つ。

(111) が恒等式になるような A, B, C を求めるのは簡単である。途中経過 ($z=3,-1$ を代入して、2 次の係数を比較して⋯) は省略して

$$A=2,\quad B=3,\quad C=-4.$$

ゆえに

$$f(z)=1+\frac{-2z^2+23z-39}{(z-3)^2(z+1)}=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}-\frac{4}{z+1}.\blacksquare$$

H 参考書案内

関数論は良い本がたくさんあります。

今回教科書に選んだ神保 [1] も当然良い本です。難しくならないように注意を払いつつ、なかなか洒落た結果にまで言及してある、楽しい本です。一部に注意すべきところもありますが (Laurent 展開の定義が、中心が原点の場合で説明されているなど— 学生はこういう何でもなさそうなところでつまづく)、現在入手が容易な本の中で教科書としてベストだと考えています。

授業とは別に何か一冊通読するのも良いと思います。そういう場合は、むしろ授業とは少し趣の違った本を選ぶと良いでしょう。図書館や大きな書店に行って何冊か手に取ってめくってみて、自分の好みに合ったものを探すことを勧めます。

私が知っている本からは、堀川 [32] を紹介しておきます。これは、一つの講義を、宿題や授業アンケートの内容まで込めて一冊の本に収録したというもので、ユニークな内容です。むやみな一般化を避けて、初心者にていねいに向き合っている、という印象を持ちます。Green の定理を使って Cauchy の積分定理を導くという方針で書かれていますが、その Green の定理の説明自体が素晴らしいと思います[111]。説明が非常に明晰で、読んでいてなるほどと思われることが満載で、この本を見かけたらぜひ手に取って一読してみることをお勧めします。

「大学では数学科に入ります」と高校の数学の先生 (年配者限定？) に言うと紹介されることがあったりする “ザ・古典” 高木貞治『解析概論』 [30] は、微積分入門用参考書として勧めようというつもりはあまりないのですが、関数論に関しては素敵な本だと思います。既に買ってあって積読しているような人は、この機会にもう一度ページをめくってみることを勧めます。ちょうど「複素関数」で講義しようと考えている内容が、コンパクトかつ華麗にまとめられています。それを読んで理解出来るなら (読みにくいという感想は時々聞かないでもない)、じっくりと取り組んでみて下さい。

何かひっかかった時に、頼りになるセカンド・オピニオン本としては、杉浦「解析入門 II」[31] を勧めます。書名に関数論、複素解析という語が入っていないし (これは解析概論も同じですね)、二巻本の末尾にあるので見過ごされがちですが、複素関数論の範囲について、特に充実した内容です。回転数を用いた、一般的な Cauchy の積分定理が書いてあります。

[111] Green の定理の説明はよその本に任せたり、むやみに一般的な形の Green の定理を使ったりする本が多い中で、この本では、Cauchy の積分定理の説明に必要十分な形の Green の定理に対して、独特のイメージの説明と、初等的な証明を与えています。

問題演習がしたいという人は、梶原 [43] をチェックしてみて下さい。計算練習用の問題から、理論的な問題 (大学院入試の問題から選んだようなもの) まで、豊富な問題が揃っていて、親切な解説がついています。

関数論について、どういうことが成り立つか、辞書的な情報を求めている場合は、演習書の体裁を取っているけれど辻・小松 [25], あるいは辻 [61] を見ると良いかもしれません。

関数論の深化に関わった楕円関数論の発達の歴史については、高木 [6] が有名な読み物ですが、それを読んで「何かすごそう」と思っても、実は良く分からないかもしれません。高瀬 [5] が分かりやすいです。

楕円関数を学ぶには、数学セミナーの連載をまとめた武部 [62] が良い入門書だと思います。梅村 [63] は堅実なテキストですが、かなり入手しにくいのが玉に瑕です。有名な古典である (今ではパブリック・ドメインに置かれている) 竹内 [64] を読むのも良いかもしれません[112]。

関数論からは離れてしまうけれど、楕円関数を使って微分方程式の問題に挑戦する四ッ谷・村井 [66] は別の面白さのある本です。物理学者の書いた戸田 [67] も面白いです。

もう少し先まで勉強したい人に

田村 [42] は、装丁が地味で目立たないけれど、少し進んだ内容 (解析接続、素朴な Riemann 面、等角写像、楕円関数 — 要するに解析関数の基礎) をやさしい語り口で解説してあります。

笠原 [38] は、進んだ話題 (リーマン面, 正則関数・有理関数の存在問題, ポアンカレ計量, 楕円関数・モジュラー関数) を凝縮して詰め込んだ感じのする本です。版元在庫切れなので勧めにくかったのですが、2016 年にちくま学芸文庫に入ったのでしばらくは入手できると思われます (気軽に勧められそうです)。

読み物が欲しい人に

久しぶりに本棚の本をパラパラめくる時間的余裕が出来て、志賀 [68] を手に取った。ずっと以前 1 年生ゼミで使ったことがある。この本は演習問題がなかったり、いわゆる教科書向きではないと思うが、初学者の理解のヒントになりそうなことが色々書いてある。副読本に良いのではないかと思った。

(脱線になるが、微積分で、小林 [69], [70] なども似たようなところがある。学生がこういう本を自発的に手に取るようになるといいのだけど。)

より新しい本から

藤本 [71] は、教科書に採用した神保 [1] と同じくらいのボリュームですが、記述は簡潔で明解、内容はとても多い (つまり [1] は噛み砕いて書いてあるということです)。[1] も [71] も岩波講座からの単行本化ですが、絶妙の取り合わせのような気がします。易しい方の [1] が売れて、難しい方の [71] がそれほど売れないのは仕方がないかもしれないけれど、[71] が現在新刊で購入できないのはもったいない (何とかして欲しい)。

プリンストンの解析学講義のシリーズとして出版されたスタイン&シャカルチ [72] は、複素解析の数学の他分野との関連が色々見えるように配慮された本で、参考になります。

[112] 国立国会図書館がネットで公開しているし、パブリック・ドメインのはずだと考えているのですが、簡単には入手できなくなっているようですね。何か問題があったのかな。代替として同じ竹内先生の [65] の下巻はいかがでしょう。こちらはオンデマンド出版で、今でも入手可能です。

多変数関数論は、昔は一松 [73] (それとちょっと気付きにくい梶原 [74]) くらいしか和書がありませんでしたが (ヘルマンダー [75] は東京図書で絶版状態だし)、最近は、若林 [76], 大沢 [77], 野口 [78] など、色々出版されています。大沢 [79] は、半分は数学読み物で楽しく読めるかもしれません。

いわゆる工学的な応用のためにはどういうところを勉強するかについては、東京大学工学教程というシリーズの藤原 [80], [81] が参考になります。数学用語の定義の記述などにツッコミを入れたくなるところもありますが[113]、色々なことがコンパクトに記述されているのは得難い長所だと思います。

最近は、WWW 上に講義ノートの類が色々公開されていますが、その中には素晴らしいものがあります。通常の関数論の講義の先を扱った大島 [83], 斎藤 [84] は大いに参考になるでしょう。

私はどのように関数論を学んだか

何かの参考になるかもしれないので、ここでは、自分 (桂田) がどういう本を読んで勉強したかを書いておく。

はじめて関数論に触れたのは、高木 [30] の通読にチャレンジしていたときである。この本はもともと東大数学科の学生に、1 年間、週 3 回実質 $30 \times 3 = 90$ 分[114]の講義で、微積分、関数論、Fourier 級数の初歩を解説する講義の内容をまとめたもので、関数論にあてられたページ数はわずかであるが、要領よくまとめられていると思う。読んでいても面白かった。ここに書いてあることをきちんと身に付けていたら、この段階での関数論の知識はそれで十分と言えるが、それは平均的な学生には案外難しいような気がする。

というわけで、実質的には、吉田 [44] を読んで勉強した (吉田先生は「零の発見」 ([85]) の著者としても有名である)。これは評判の良い本で、日本語で数学を書くときの良い手本とまで評した人もいたりする。版型が小さかったので、散歩に行くにも持ち歩くことが容易で、しばらく肌身離さず読む生活をした。細かいセクションに分かれているので、少しずつ丹念に読んで行くのに便利であった。

数学科に進学が内定して、いよいよ授業で関数論を学ぶことになった際に、教科書に指定されたのが有名な Ahlfors [27] であった。英語であったので読めるか心配したが (まだ笠原先生の翻訳が出ていなかった。翻訳本はなぜか英語版よりも安いし、今勉強する人がうらやましい。お勧めである。)、もともと数学の本は 1 行 1 行意味を考えながら読むしかないので、案外苦にはならなかった。しかし、後になって「あれはどこに書いてあるのか？」パラパラめくって探すのは、日本語の本に比べてかなり難しかった気はする。この本は高木 [30] と比べると、行間があまり空いていなくて、かなりの正確さできちんと書かれていると思うが、その分、重要なところに到達するまでのページ数が多く (著者の方針が、読者が最初に初等関数の性質によく慣れてから、Cauchy の積分定理に進む、というものであったせいも多少はあるかな)、この本を時間内に読み切ることは当時の自分には難しかった (要するに間に合わない)。猫に小判だったのかもしれない。

関数論を学ぶ際は、計算テクニックの習得も重要である。そのために吉田 [44] は案外と使いにくかった。そもそも留数計算により定積分の値を求めるという定番の問題に対する解説

[113] こういうことを書くと、数学者の嫌味ととられそうだけれど、寺澤 [82] (有名な古典!) などは、工学者が書いた本であるけれど、その手の文句のつけようがない。そのあたり、現代の方が甘くなっている (後退している) ような面がある。

[114] 何でも、1 コマ 90 分で、正規の時間より 15 分は遅れていくものだという “アカデミック・クウォーター” を二重に適用して、定刻より 30 分遅れて講義を始め、そのうちの半分は前回の後半部分の内容と一緒というやり方で講義したと言う伝説がある (だから学生は 1 回おきに出席して 60 分の話を聴けば、すべての内容を聴くことが出来たとか)。

が乏しい。Ahlfors などはかなりページ数を割いているのだが。結局、その手の計算練習には小堀 [46] を用いた。これは割と使い易かった。本屋で色々な本を手に取って比べた末に選んだと記憶しているが、良い選択だった。最近これをめくってみて、あまり今風の書き方ではないけれど、大事なことがちゃんと身に付くような内容であり、改めて良い本であると思った。各科目にこういう本がそろっていると良いんだけどね。

しかし、関数論の授業の演習にはいわゆる証明問題が多く、計算問題はほとんどなかった。これはとても辛かった。当時配られたプリントを見ると、いわゆる有名な定理の証明問題が並んでいて、こういうのを自力で解けなかったことは無理もなかったと思う。それらの定理を関数論の参考書 (例えば辻・小松 [25]) で探し出して、そこに書いてある証明を理解し、その授業の流れの中で無理のないように書き換えるようにすべきであった、と現在の自分は分かるが、当時はそういうことは思いもよらなかった。まあ、要するに未熟で苦戦していたわけだ。

辻・小松 [25] は今となっては書き方が古くて、そのままではまずいと思うが、大事なところはもちろんちゃんとしている。色々な結果が 1 冊にまとめられている問題解答辞典 (というよりは定理辞典) で、非常に便利な本である。ただし、載っている問題を端から順に解いていって、ドリルのように使う本ではない。そういうことは高校を出てからそれほど時間がたっていない自分は、まだ良く分かっていなかった (ちなみにアマゾンの読者評では、[25] はひどい点をつけられている— それは目的を間違えた使い方で…、ちょっと不当な評だ)。

(2021/9/23 追記 Amazon から古い評が消えて、現在は高評価になっている。おかしな評価が正されて良いことではあるが、古い評価を単に削除するというのはいかがなものか。)

そういうわけで消化不良を起こしていたが、計算だけでも出来れば単位はくれるもので、とりあえず前進。

3 年生になって関数論の続きが必修であった。3 時間の講義と 2 時間の演習付き。内容は Riemann の写像定理とか、モノドロミーとか。前者はともかく (色々な本に載っている…何を読んだっけ？)、後者は授業の内容に沿った本が見つけられなかった。少し脱線して、久賀 [86] を読んだりしたのは懐かしい。この時期はルベーグ積分や微分幾何 (+多様体)、ガロア理論など自分にとって重量級の授業が並んでいて、関数論の勉強に十分な時間がさけなかったことが惜しまれる。

大学院の入試準備を始めることになり、高橋 [22] を読み始め、梶原 [43], [87] を用いて演習問題を解いた。大学院の入試では、線形代数と関数論の準備が肝であると感じていた。後から振り返って、関数論でかなりの得点をかせぐことが出来たと思う。

高橋 [22] は短いページ数の中に多くの内容が書かれていて、濃密な感じがする。最初に読むのは難しいと思われるが、一度勉強した者が知識の再整理をするために読むのに適当だと思う。冗長さが無く、簡潔性が保たれているのは気持ちが良いし、何より読んでいて楽しい本であった。

梶原 [43], [87] も関数論の復習のために大変役立った。大学院の入試問題等から問題を集めて、一通りの学習が出来るようにする、というのは面白いアイディアであり、成功していると思う。入試対策として今でも適切であるかどうかは知らないが、勉強のやり方としては今でも通用すると思う。

研究者としての道を歩み始めて、役に立ちそうなものは何でも目を通してみる、という考え方をするようになった。読みにくかろうが、書き方が現代的でなかろうが、知っていれば自分の問題が解決できるはずの知識を知らないでいるのは馬鹿馬鹿しい。となると、標準的な内容をカッコよく説明してある本よりは、色々なことが載っている本が有益で面白い。既に紹介した辻・小松 [25] はそういう面でも良い本であるが、本屋で、辻 [61] を発見して購入できたのは幸運だったと思う。

I　おまけ: ± 1 の 6 乗根, 8 乗根

「おまけ: ± 1 の 6 乗根, 8 乗根」は公開版には含めないことにしています。

参考文献

[1] 神保道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.

[2] 一松信：函数論入門, 培風館 (1957).

[3] Klein, F.: クライン：19 世紀の数学, 共立出版 (1995), 彌永昌吉 監修, 足立恒雄・浪川幸彦・石井省吾・渡辺弘 訳. Felix Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, Springer (1926) の邦訳.

[4] Smith, D. E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover Publications (1959), https://ia800307.us.archive.org/10/items/sourcebookinmath00smit/.

[5] 高瀬正仁：リーマンに学ぶ複素関数論 — 1 変数複素解析の源流 —, 現代数学社 (2019/6/20).

[6] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談 復刻版」として復刻されている。 また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。

[7] 河田敬義：ガウスの楕円関数論：高木貞治先生著"近世数学史談"より, 上智大学数学講究録, no. 24, 上智大学数学教室 (1986.11), この初めの部分を "敷衍した" 解説が、 小平邦彦編「数学の学び方」岩波書店 (1987) に収録された 「数学の帰納的な発展 — Gauss の楕円関数論 —」である。

[8] 岡本久, 長岡亮介：関数とは何か — 近代数学史からのアプローチ, 近代科学社 (2014/7/28).

[9] 高瀬正仁：リーマンと代数関数論: 西欧近代の数学の結節点, 東京大学出版会 (2016/11/23), ファニャーノのレムニスケートの研究の詳細、 アーベルとルジャンドルの書簡など、筆者には初めての情報が多かった。 高瀬先生は原典を丹念に解読した成果を分かりやすく伝えてくれる著作が多く、 とても参考になる。

[10] 一松信：複素数と複素数平面, 森北出版 (2010).

[11] 飯高茂：大学生にきちんと虚数を教えよう — コーシーの定理を教える前に — (第４９回公私立数学系学科懇談会の活動報告), 数学通信, Vol. 15, No. 1, pp. 46–53 (2010 年 3 月 26 日), http://mathsoc.jp/publication/tushin/1501/1501iitaka.pdf.

[12] 堀源一郎：ハミルトンと四元数 人・数の体系・応用, 海鳴社 (2007).

[13] 今野紀雄：四元数, 森北出版 (2016/12/1).

[14] 株式会社 セガ開発技術部：基礎線形代数講座 線形代数・回転の表現, https://drive.google.com/file/d/1vU7BCI1arG_ZyUYkAEvLi1LH1ou0pULu/view (2021/6/15).

[15] 一松信：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。

[16] 金子晃：関数論講義, サイエンス社 (2021/4/25).

[17] 小松 勇作編：数学 英和・和英辞典 増補版, 共立出版 (1979/7/16, 2016/2/25), 丸善 eBook に入っている。明治大学の学生は https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/Viewer/Id/3000033529 で閲覧できる。

[18] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく: 正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ, 数学書房 (2017/5/15).

[19] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史, 共立出版 (2005), 上野 健璽・三浦伸夫 監訳, 中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡 翻訳. 原著は、Victor J. Katz, A History of Mathemaitcs, A: An Introdunction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998).

[20] 桂田祐史：数学解析, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf (2014 年〜).

[21] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる． この eBook まともな目次を付けてほしい.

[22] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された．丸善 eBook では、 https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441 でアクセスできる．

[23] 遠山 啓(ひらく)：数学入門 (上, 下), 岩波新書 G4, G5, 岩波書店 (1959/11/17, 1960/10/20), 丸善 eBook に入っています。

[24] 宮永望：遠山啓『数学入門』を読む, 数学文化, Vol. 028, pp. 54–64 (2017).

[25] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、 祐乗坊瑞満(ゆうじょうぼうずいまん)、 水本久夫。

[26] Graham, O., Knuth, R. L. and Patashnik, D. E.: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley Professional (1994/2/28).

[27] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).

[28] Maehara, R.: The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 91, No. 10, pp. 641–643 (Dec., 1984), https://www.jstor.org/stable/2323369?seq=1#metadata_info_tab_contents.

[29] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).

[30] 高木貞治(ていじ)：解析概論 改訂第 3 版, 岩波書店 (1961), https://linesegment.web.fc2.com/books/mathematics/zouteikaisekigairon/ に『増訂解析概論』の現代仮名遣い版があります.

[31] 杉浦光夫：解析入門 II, 東京大学出版会 (1985), 丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046844 でアクセスできる.

[32] 堀川穎二（えいじ）：複素関数論の要諦, 日本評論社 (2003/3/10, 2015/8/25).

[33] E. ハイラー, G. ヴァンナー：解析教程 上, 下, シュプリンガーフェアラーク東京 (1997), “Analysis by its History” の邦訳. Wanner は元は「ワナー」と綴っていた.

[34] 一松信：解析学序説 上, 裳華房 (1962).

[35] Kabaya, K. and Iri, M.: Sum of uniformly distributed random variables and a family of nonanalytic C^∞-functions, *Japan Journal of Applied Mathematics*, Vol. 4, pp. 1–22 (1987).

[36] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).

[37] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信：ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店 (2001).

[38] 笠原乾吉：複素解析, 1 変数解析関数, 実教出版 (1978), 2016 年にちくま学芸文庫に入った (ファンとして非常に嬉しい)。 新井仁之先生の書評が http://researchmap.jp/joqp1cgc9-1782088/ にある。 ついに Kindle 化されたので買えなくなることはなくなったが、 数式の見栄えが poor である。文庫に入ったのは最近のことなのに、なぜこうなる？？

[39] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).

[40] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」), https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/pde2013.pdf (1997 年〜).

[41] 一松信：微分積分学入門第四課, 近代科学社 (1991).

[42] 田村二郎：解析関数, 裳華房 (初版 1962, 新版 1983).

[43] 梶原壌二：関数論入門 — 複素変数の微分積分学 —, 森北出版 (1980).

[44] 吉田洋一：函数論 第 2 版, 岩波書店 (1965).

[45] Schiff, J. L.: *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (1999/10/14).

[46] 小堀憲：複素解析学入門, 朝倉書店 (1966).

[47] L. シュヴァルツ：シュヴァルツ解析学 1 集合・位相, 東京図書 (1970).

[48] 小堀憲：大数学者, 筑摩書房 (2010), 1966 年に出版されたものの文庫化.

[49] 森正武, 杉原正顯：複素関数論, 岩波書店 (2003).

[50] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis Volume 1: Power Series Integration Conformal Mapping Location of Zero*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons Inc (1977, 1988 (Paperback)).

[51] 桂田祐史：多変数の微分積分学 1 講義ノート, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu1-2013/tahensuu1-2011.pdf (2011).

[52] 一松信：解析学序説 下, 裳華房 (1963).

[53] 小平邦彦：複素解析, 岩波書店 (1978).

[54] 加藤昌英：複素関数論, 朝倉書店 (2003).

[55] 野村隆昭(たかあき)：複素関数論講義, 共立出版 (2016).

[56] Dixon, J. D.: A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 29, No. 3, pp. 625–626 (1971).

[57] Loeb, P. A.: A Note on Dixon's Proof of Cauchy's Integral Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 98, No. 3, pp. 242–244 (1991).

[58] Loeb, P. A.: A Further Simplification of Cauchy's Integral Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 100, No. 7, pp. 680–681 (1993).

[59] Hanche-Olsen, H.: On Goursat's Proof of Cauchy's Integral Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 115, No. 7, pp. 648–52 (2008).

[60] 桂田祐史：基礎数学 III のための多項式ノート, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/note/polynomial.pdf, もとは「基礎数学 III のための多項式ノート」 https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kiso3/polynomial.pdf だった。 (2005/1/6〜).

[61] 辻正次：複素函数論, 槙書店 (1968).

[62] 武部尚志(たかし)：楕円積分と楕円関数 — おとぎの国の歩き方, 日本評論社 (2019/9/25).

[63] 梅村浩：楕円関数論, 東京大学出版会 (2000/7/5 (初版), 増補新装版 (2020/5/21)).

[64] 竹内端三(たけのうちたんぞう)：楕圓函數論, 岩波書店 (1936), 著者は 1945 年没。パブリック・ドメインにおかれている。 国立国会図書館の http://dl.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/1063357 とか (全コマ ダウンロード可能)。 組版し直した http://yx4.life.coocan.jp/books/oldbooks.html もあるけれど、ミスプリが散見される箇所もある。 現代仮名遣い版 https://linesegment.web.fc2.com/books/mathematics/daenkansuron/ もある。

[65] 竹内端三(たけのうちたんぞう)：関数論 上, 下, 裳華房 (1926, 新版 1966, POD 版 2015).

[66] 四ッ谷晶二, 村井 実(みのる)：楕円関数と仲良くなろう: 微分方程式の解の全体像を求めて, 日本評論社 (2013).

[67] 戸田盛和：楕円関数入門, 日本評論社 (1976, 2000).

[68] 志賀浩二：複素数 30 講, 朝倉書店 (1989).

[69] 小林昭七：微積分読本 1 変数, 裳華房 (2000/4/25).

[70] 小林昭七：続 微積分読本 多変数, 裳華房 (2001/8/25), 小まめに版を改めているようである. 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/Viewer/Id/3000077154 でアクセス可能である.

[71] 藤本孝坦(ひろたか)：複素解析, 岩波書店 (2006/5/10).

[72] エリアス・M. スタイン, ラミシャカルチ：複素解析, 日本評論社 (2009).

[73] 一松信(ひとつまつしん)：多変数解析函数論, 培風館 (1960).

[74] 梶原壌二：複素関数論, 数学ライブラリー (2), 森北出版 (1968).

[75] ヘルマンダー多変数複素解析：多変数複素解析学入門, 東京図書 (1973), 笠原乾吉訳.

[76] 若林功：多変数関数論, 数学のかんどころ, 共立出版 (2013).

[77] 大沢健夫：多変数複素解析 増補版, 岩波書店 (2018/6/13).

[78] 野口潤次郎：多変数解析関数論 — 学部生におくる岡の連接定理 — 第 2 版, 朝倉書店 (2019/9/4).

[79] 大沢健夫：岡潔／多変数関数論の建設, 現代数学社 (2014).

[80] 藤原毅夫：東京大学工学教程 基礎系 数学 複素関数論 I, 丸善出版 (2013).

[81] 藤原毅夫：東京大学工学教程 基礎系 数学 複素関数論 II, 丸善出版 (2014).

[82] 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論 増訂版改版, 岩波書店 (1983), 初版はいつ出たのやら⋯.

[83] 大島利雄：関数論 (複素解析 II の講義のためのノート), http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/CAMPUS/ca.pdf, さすがに server not found になりましたね (2003〜2008).

[84] 斎藤恭司：複素解析学特論, 1978 年に東大理学部数学科で行われた講義を当時のノートから復刻したものだそうです。https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/publication/documents/saito-lectures.pdf で公開されています。 (2009 年 3 月).

[85] 吉田洋一：零の発見 — 数学の生い立ち, 岩波書店 (1986), 1938 年に出版された。

[86] 久賀道郎：ガロアの夢 — 群論と微分方程式, 日本評論社 (1968/7/1), ちくま学芸文庫に入った (2023/12/11)。

[87] 梶原壌二：新修解析学, 現代数学社 (1980, 2005), 2019/3/21 に新装版が出版された.

索 引