

複素関数練習問題 No. 2

桂田 祐史

2017年10月3日, 2024年8月4日

この文書では、 i は虚数単位を表す。さらに記号の復習: $a \equiv b \pmod{c} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) a - b = kc$.

複素指数関数

複素数 $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、 $e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y)$ により e^{x+iy} を定める。これは (高等学校で学んだ) 実変数の指数関数 e^x の拡張である。特に $\theta \in \mathbb{R}$ のとき、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。

問題 25. $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ のときに $e^{i\theta}$ の値を求めよ。

問題 26. 任意の複素数 z_1, z_2 に対して、 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ が成り立つことを示せ。

問題 27. 任意の複素数 z に対して、以下の (1)~(4) が成り立つことを示せ。

$$(1) e^z \neq 0, \frac{1}{e^z} = e^{-z} \quad (2) \text{ 任意の } n \in \mathbb{Z} \text{ に対して } (e^z)^n = e^{nz} \quad (3) \overline{e^z} = e^{\bar{z}} \quad (4) |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

問題 28. 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、 $|e^{i\theta}| = 1, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ が成り立つことを示せ。

問題 29. 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ が成り立つことを示せ。

問題 30. 次のことを示せ。

(1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $e^z = 1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = 2k\pi i$. (ゆえに e^z の周期は $2\pi i$.)

(2) 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、 $e^z = e^w \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) w = z + 2k\pi i$.

問題 31. 次の方程式を解け (複素数の範囲の解をすべて求めよ)。

$$(1) e^z = -1 \quad (2) e^z = i \quad (3) e^z = 0$$

問題 32. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^z$ が単射であるか、全射であるか、それぞれ理由をつけて答えよ。

ド・モアブルの公式と等比数列の和

ド・モアブルの公式 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ は、複素指数関数を用いると、 $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ と書き直せる。等比数列の和の公式 $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$ (ただし $r \in \mathbb{C}, r \neq 1$ とする) がしばしば利用される。

問題 33. $\cos 3\varphi, \cos 4\varphi, \sin 5\varphi$ を $\cos \varphi$ と $\sin \varphi$ で表せ。

問題 34. $\cos \frac{\pi}{8}$ と $\sin \frac{\pi}{8}$ の値を求めよ。(三角関数の半角の公式を使って求められるが、複素数を用いて。)

問題 35. $n \in \mathbb{N}$ とするとき、 $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$ を求めよ。

問題 36. 2 以上の任意の自然数 N に対して、 $\omega = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N}$ とおくと、任意の整数 p に対して、次の式が成り立つことを示せ。

$$1 + \omega^p + \omega^{2p} + \cdots + \omega^{(N-1)p} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = \begin{cases} N & (p \equiv 0 \pmod{N} \text{ のとき}) \\ 0 & (p \not\equiv 0 \pmod{N} \text{ のとき}). \end{cases}$$

問題 37. $A = 1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$ と $B = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi$ を簡単にせよ。
(やや難しいが、Fourier 解析に重要な応用のある問題であり、有名である。)

極形式, 偏角

複素数 z を $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ を用いて $z = re^{i\theta}$ と表したとき、右辺を z の極形式と呼ぶ。 r, θ は、 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) としたときの、 (x, y) の極座標である。 $r = |z|$ である。以下 $z \neq 0$ と仮定する¹。このとき、 θ は 2π の整数倍の差を除いて定まる。その θ を z の偏角 (an argument of z) と呼び、(一意的には定まらないが) 記号 $\arg z$ で表す。 $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲に限定すると、 θ はただ一つに定まり、それを z の偏角の主値と呼び、 $\text{Arg } z$ で表す。

問題 38. $z = -1 + \sqrt{3}i$ の極形式を求めよ。また z^{15} の値を求めよ。

問題 39. 次の各複素数の偏角の主値と極形式を求めよ。(6) は逆三角関数を用いて答えよ。

(1) 1 (2) i (3) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ (4) $1 + i$ (5) $-1 - \sqrt{3}i$ (6) $4 + 3i$

問題 40. $z = re^{i\theta}$ とするとき、 \bar{z} と $\frac{1}{z}$ (ただし $z \neq 0$ とする) の極形式を求め、図示せよ。

n 乗根 (2 項方程式)

問題 41 は、何も見ないでも解けるようにしておくこと (非常に重要)。後はおまけ。

問題 41. 極形式を利用することで、 $n = 2, 3, \dots, 8$ に対して、 $z^n = 1$ と $z^n = -1$ の解を求め、図示せよ。可能ならば代数的な式変形でも解いてみよ。

問題 42. 2 以上の自然数 N に対して、 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ とおくと、次式が成り立つことを示せ。

$$z^N - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{N-1}).$$

問題 43. 1 の 5 乗根, 10 乗根を三角関数を使わずに $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) の形で表せ。

問題 44. 複素数 c の 3 乗根は、 $c = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$) として、 $\sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{3}}, \sqrt[3]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3})}, \sqrt[3]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3})}$ と表せるが、 $c = \alpha + i\beta, z = x + iy$ ($\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$) とおいて、 $(x + iy)^3 = \alpha + i\beta$ から得られる連立方程式 $x^3 - 3xy^2 = \alpha, 3x^2y - y^3 = \beta$ を解いて求めようとする、どうなるか考察せよ (平方根の求め方の真似)。

問題 45. 定木とコンパスによる正 n 角形の作図について、Gauss が発見したことを調べよ。

問題 46. 2 以上の任意の自然数 N に対して、 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ とおく。 (j, k) 成分 ($j, k \in \{1, \dots, N\}$) が $\omega^{(j-1)(k-1)}$ に等しい N 次正方行列を W とするとき²、 $\frac{1}{\sqrt{N}} W$ はユニタリ行列であることを示せ。

($W^*W = WW^* = NI$ (I は N 次の単位行列) を確認すればよい。 W は離散 Fourier 変換と呼ばれる。)

¹ そうしないと、 θ は何でも良いことになってしまい、議論が少し面倒になる。 0 の偏角は定義しないのが普通である。

² 行列を成分で定めるとき、 (i, j) 成分を指定するのが普通だが、複素数が関係するときは、虚数単位と記号がかぶるので、 i は使わず、 j, k を指定する本がある。そのやり方を採用した。

misc.

2 以上の自然数 n と正数 ρ に対して、 ρ の (実数の範囲の) n 乗根 $\sqrt[n]{\rho}$ というものを用いたので、念のため根拠を確認する。

問題 47. 中間値の定理を用いて、次の (1), (2) を証明せよ。

(1) $n \in \mathbb{N}$ が偶数ならば、任意の $\rho \geq 0$ に対して、 $r^n = \rho, r \geq 0$ を満たす r が一意的に存在する。

(2) $n \in \mathbb{N}$ が奇数ならば、任意の $\rho \in \mathbb{R}$ に対して、 $x^n = \rho, x \in \mathbb{R}$ を満たす x が一意的に存在する。

解答 25. $e^{i0} = 1, e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, e^{i\pi/2} = i, e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$
 $e^{i3\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, e^{i\pi} = -1, e^{i3\pi/2} = -i, e^{i2\pi} = 1.$

解答 26. $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ ($x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$) とおくと、 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ であるから、

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{z_1} e^{z_2}. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 27.

(1) $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$ であるから、 $e^z \neq 0, \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$

(2) $n \geq 0$ に対して、帰納法で $(e^z)^n = e^{nz}$ を示そう。

(i) $n = 0$ のとき $(e^z)^0 = (e^z)^0 = 1, e^{n \cdot z} = e^{0 \cdot z} = e^0 = 1$ であるから成り立つ。

(ii) $n = k$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$) のとき成り立つと仮定すると、

$$(e^z)^{k+1} = (e^z)^k \cdot e^z = e^{kz} e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}.$$

$n = k + 1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より任意の $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ に対して成り立つ。 $n < 0$ のときは、 $m := -n$ とおくと、 $n = -m, m \in \mathbb{N}$ であるから、

$$(e^z)^n = (e^z)^{-m} = \frac{1}{(e^z)^m} = \frac{1}{e^{mz}} = e^{-mz} = e^{nz}.$$

(3) $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

であるから、

$$\overline{e^z} = e^x \cos y - i e^x \sin y = e^x \cos(-y) + i e^x \sin(-y) = e^x (\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.$$

(4) $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、

$$|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = \sqrt{1} = 1$$

であるから、

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x \cdot 1 = e^x = e^{\operatorname{Re} z}. \blacksquare$$

解答 28. 実質的に前問で済んでいるが、ここでは直接証明しておく。 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} |e^{i\theta}| &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1, \\ \overline{e^{i\theta}} &= \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}, \\ \frac{1}{e^{i\theta}} &= \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} = \frac{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = e^{-i\theta}. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 29.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

を $\cos \theta, \sin \theta$ についての連立 1 次方程式とみなして解くと、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \blacksquare$$

解答 30.

(1) $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow e^x (\cos y + i \sin y) = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \wedge \cos y + i \sin y = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge \cos y = 1 \wedge \sin y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge ((\exists k \in \mathbb{Z}) y = 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = 2k\pi i. \end{aligned}$$

(注: \Leftrightarrow の \Rightarrow では、まず $e^x (\cos y + i \sin y) = 1$ の両辺の絶対値を取って $e^x = 1$ を得てから、それを代入して $1 \cdot (\cos y + i \sin y) = 1$.)

(注) 複素対数関数を学んだ後ならば、次のように解答して良い。1 の極形式が $1 = 1e^{i0}$ (つまり $r = 1, \theta = 0$) であることから、

$$z = \log 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(2)

$$e^z = e^w \Leftrightarrow 1 = e^w e^{-z} \Leftrightarrow e^{w-z} = 1 \Leftrightarrow ((\exists k \in \mathbb{Z}) w - z = 2k\pi i). \blacksquare$$

解答 31.

(1) $e^{i\pi} = -1$ であるから、

$$\begin{aligned} e^z = -1 &\Leftrightarrow e^z e^{i\pi} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{z+i\pi} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z + i\pi = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = (2k - 1)\pi i. \end{aligned}$$

(2) $e^{i\pi/2} = i$ であるから

$$\begin{aligned} e^z = i &\Leftrightarrow e^z / e^{i\pi/2} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{z-i\pi/2} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z - i\pi/2 = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = (2k + 1/2)\pi i. \end{aligned}$$

(3) 任意の z に対して $e^z \neq 0$ である。このことは既に証明済みであるが、念のためもう一度書くと、

$$e^z \cdot e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$$

であるから、 $e^z \neq 0$ 。ゆえに方程式 $e^z = 0$ の解は存在しない。■

解答 32. (念のため、単射、全射を復習しておく。定義は

$$f \text{ が単射} \Leftrightarrow [(\forall z_1, z_2)z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)],$$

$$f \text{ が全射} \Leftrightarrow (\forall w)(\exists z)w = f(z)$$

であるから、

$$f \text{ が単射でない} \Leftrightarrow [(\exists z_1, z_2)z_1 \neq z_2 \wedge f(z_1) = f(z_2)],$$

$$f \text{ が全射でない} \Leftrightarrow (\exists w)(\forall z)w \neq f(z).$$

である。)

単射ではない。実際、 $z_1 = 0, z_2 = 2\pi i$ とおくと、 $z_1 \neq z_2$ であるのに $e^{z_1} = 1 = e^{z_2}$.

全射ではない。実際、 $0 \in \mathbb{C}$ であるが、 $e^z = 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ は存在しない。■

(後で指数関数の定義域、終域を適当に制限して、その逆関数である“複素対数関数”を定義することになる。)

解答 33.

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \operatorname{Re}(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = \operatorname{Re}[(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3] \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi + i^2 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi) \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4\varphi &= \operatorname{Re}(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) = \operatorname{Re}[(\cos \varphi + i \sin \varphi)^4] \\ &= \operatorname{Re}(\cos^4 \varphi + 4i \cos^3 \varphi \sin \varphi + 6i^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + 4i^3 \cos \varphi \sin^3 \varphi + i^4 \sin^4 \varphi) \\ &= \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 5\varphi &= \operatorname{Im}(\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) = \operatorname{Im}[(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5] \\ &= \operatorname{Im}(\cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi + 10i^2 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 10i^3 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5i^4 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i^5 \sin^5 \varphi) \\ &= 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 34. $z = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ とおくと、 $z = e^{i\pi/8}$.

$$z^2 = e^{2 \cdot i\pi/8} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、 $z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}}$. これを解いて

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right).$$

$\cos \frac{\pi}{8} > 0, \sin \frac{\pi}{8} > 0$ であるから、

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \blacksquare$$

解答 35. (準備中)

解答 36. $\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp}$ は初項 1, 公比 ω^p の等比数列の和である。 $p \equiv 0 \pmod{N}$ のとき $\omega^p = 1$ であるから

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N.$$

$p \not\equiv 0 \pmod{N}$ のとき $\omega^p \neq 1$ であるから、

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kp} = 1 \cdot \frac{(\omega^p)^N - 1}{\omega^p - 1} = \frac{(\omega^N)^p - 1}{\omega^p - 1} = \frac{1^p - 1}{\omega^p - 1} = 0. \blacksquare$$

解答 37. $A + iB$ は公比 $e^{i\varphi}$ の等比数列の和であるので

$$A + iB = 1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \cdots + e^{in\varphi} = \sum_{k=0}^n e^{ik\varphi} = \sum_{k=0}^n (e^{i\varphi})^k = \frac{1 - (e^{i\varphi})^{n+1}}{1 - e^{i\varphi}}.$$

分母を実数になるように変形する。分母分子に $1 - e^{i\varphi}$ の共役複素数をかけても良いが、 $e^{-i\varphi/2}$ をかけるのが手っ取り早い³。

$$A + iB = \frac{e^{-i\varphi/2} (1 - e^{in\varphi})}{e^{-i\varphi/2} (1 - e^{i\varphi})} = \frac{e^{-i\varphi/2} - e^{i(n-1/2)\varphi}}{e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}}.$$

右辺の分母は $-2i \sin \varphi/2$, 分子は

$$\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} - (\cos(n-1/2)\varphi + i \sin(n-1/2)\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} - \cos(n-1/2)\varphi - i \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \sin(n-1/2)\varphi \right).$$

であるから、

$$A + iB = i \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \cos(n-1/2)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} + \frac{\sin \frac{\varphi}{2} + \sin(n-1/2)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

ゆえに

$$A = \frac{\sin \frac{\varphi}{2} + \sin(n-1/2)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad B = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \cos(n-1/2)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

解答 38. $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$

$$\frac{z}{|z|} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \theta + i \sin \theta$$

を満たす θ として $\theta = \frac{\pi}{3}$ が取れる。ゆえに

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

これから

$$z^{15} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{15} = 2^{15}e^{15 \cdot i\frac{\pi}{3}} = 2^{15}e^{5\pi i} = 2^{15} \cdot e^{\pi i} = -2^{15} = -32768. \blacksquare$$

解答 39. (準備中)

³細かい工夫のようだが、この問題は実は Fourier 解析では非常に重要であるので、覚えた方が良いかもしれない。

解答 40.

$$\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = \bar{r}e^{-i\theta} = re^{-i\theta},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

ゆえに \bar{z} , $\frac{1}{z}$ の極形式はそれぞれ、 $\bar{z} = re^{-i\theta}$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$. 図示については準備中。 ■

解答 41. $n = 6, 8$ 以外は講義ノートに書いてあるので、ここでは省略する。 $n = 8$ の場合は (詳しいことは省略するが)

- $z^8 = 1$ の解は、極形式で $e^{ik\pi/4}$ ($k = 0, 1, \dots, 7$) であり、 $\pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (複号は任意の組み合わせを許す)。
- $z^8 = -1$ の方は、実は宿題で $e^{i\pi/8}$ を求めてあり、後はそれに $z^8 = 1$ の解をかけたものになる。 ■

解答 42. $z = \omega^k$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) は互いに相異なり (従って個数は N)、 $z^N - 1 = 0$ を満たす。ゆえに

$z^N - 1 = 0$ のすべての根である。ゆえに $z^N - 1 = a \prod_{k=0}^{N-1} (z - \omega^k)$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在するはずだが、 z^N の係数を両辺で比較することにより $a = 1$. ゆえに $z^N - 1 = \prod_{k=0}^{N-1} (z - \omega^k) = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2) \cdots (z-\omega^{N-1})$. ■

解答 43. (準備中)

解答 44. (準備中)

解答 45. (参考書案内をした方が良くかな…)

解答 46. $\bar{\omega} = \omega^{-1}$ であることに注意する。 W の (j, k) 成分は $\omega^{(j-1)(k-1)}$. W^* の (k, ℓ) 成分は \bar{W} の (ℓ, k) 成分であり、 $\overline{\omega^{(\ell-1)(k-1)}} = \bar{\omega}^{(\ell-1)(k-1)} = \omega^{-(\ell-1)(k-1)}$. ゆえに WW^* の (j, ℓ) 成分は

$$\sum_{k=1}^N \omega^{(j-1)(k-1)} \omega^{-(\ell-1)(k-1)} = \sum_{k=1}^N \omega^{(j-\ell)(k-1)} = \sum_{k'=0}^{N-1} \omega^{(j-\ell)k'} = \begin{cases} N & (j-\ell \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$1 \leq j \leq N, 1 \leq \ell \leq N$ のとき、 $j - \ell \equiv 0 \pmod{N}$ は $j = \ell$ と同値であるから、 WW^* の (j, ℓ) 成分は $N\delta_{j\ell}$ である。すなわち $WW^* = NI$. ゆえに $UU^* = I$. これは U が unitary 行列であることを示している。 ■

解答 47. (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ とするとき、 $f(x)$ は x の多項式であるから f は連続である。 $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ ($x > 0$) であるから f は $[0, \infty)$ で狭義単調増加であるから単射である。したがって、任意の $\rho \in [0, \infty)$ に対して、 $f(r) = \rho, r \geq 0$ を満たす r は存在しても一意である。一方、存在することは以下のように場合分けして示される。

- $\rho = 0$ のとき、 $x = 0$ とすると $x \in [0, \infty), f(x) = \rho$.
- $\rho = 1$ のとき、 $x = 1$ とすると $x \in [0, \infty), f(x) = \rho$.
- $\rho > 1$ のとき、 $f(0) = 0 < \rho, f(\rho) = \rho^n > \rho$ であるから、中間値の定理から $f(x) = \rho$ の解が $(0, \rho)$ 内に存在する。
- $0 < \rho < 1$ のとき、 $f(0) = 0 < \rho, f(1) = 1 > \rho$ であるから、中間値の定理から $f(x) = \rho$ の解 $(0, 1)$ 内に存在する。

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ とするとき、(1) とほぼ同様にして、 f は連続かつ狭義単調増加かつ単射である (n が奇数であることから、 $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ ($x \neq 0$) となるので、負の範囲も含めて狭義単調増加になることに注意)。任意の $\rho \in [0, \infty)$ に対して $f(r) = \rho$ となる r が存在することは、(1) と同様に示される。 $\rho < 0$ の場合は、 r を $f(r) = -\rho$ を満たす数とすると、 $f(-r) = \rho$ が成り立つ。 ■