複素関数・同演習 第 22 回

～Cauchy の積分定理 (3)～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/

2024 年 12 月 18 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 今回の講義の内容については、例年のそれとは変えてあります。具体的には、曲線の連続的変形の数学的定義と単連結領域の説明をバッサリ切りました。この段階でそれらの説明をするのが自然ですが、それをすると、適当な宿題を出せなくなるためです。これらは新年明けてから適当なタイミング (もしかしたら補講の際に) で解説します。

線積分で色々な曲線が登場するが、ある点からある点に至る線分がしばしば登場する。それを表す記号を準備する。

以下で $\mathbb{C}$ のところを $\mathbb{R}^n$ としてもほぼ同様のことが成り立つ。

$a, b \in \mathbb{C}$ とするとき

$$[a, b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$$

とする。a, b を端点とする線分と呼ぶ。

線積分を考えるとき、同じ記号 $[a, b]$ でパラメーター曲線 $\varphi(t) = (1-t)a + tb$ $(t \in [0, 1])$ を表すとする。

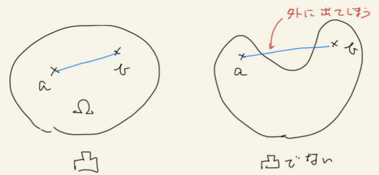
6.5.2 凸領域, 星型領域

定義 22.1 (凸, 星型)

Ω をベクトル空間 (ここでは $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{C}$ と思えば良い) の部分集合とする。

1. Ω が**凸** (**convex**) とは、
$$(\forall a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a, b] \subset \Omega.$$
(Ω 内の任意の 2 点を結ぶ線分が Ω に含まれる。)
2. Ω が**星型** (**star-shaped**) とは、
$$(\exists a \in \Omega)(\forall b \in \Omega) \quad [a, b] \subset \Omega.$$
(ある点 a にライトをおくと、Ω 内のどこも照らされる、という説明をされる。)

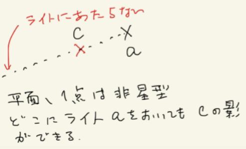
凸とは、直観的にはどこも凹んでないということで、凹んでいると凸にはならない。



6.5.2 凸領域, 星型領域

“星の形” Ω は、a を Ω の真ん中近くに取ると、Ω のどこも照らすことができるので、星型である。

一方、平面から 1 点 c を除いた $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{c\}$ では、$a \in \Omega$ をどこにとっても、c の影になるところが存在し、そこにある b は照らされない。



6.5.2 凸領域, 星型領域

凸、星型の定義からすぐ分かること。

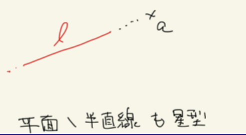
(a) 空集合でない凸集合は星型である。
(実際、Ω が空集合でないことから、$a \in \Omega$ となる a が存在する。凸集合であることから、任意の $b \in \Omega$ に対して $[a, b] \subset \Omega$.)

(b) 星型ならば弧連結である。
(実際、$(\forall b \in \Omega)$ $[a, b] \subset \Omega$ であれば、任意の $b_1, b_2 \in \Omega$ は $[b_1, a] + [a, b_2]$ で結ばれる。)
弧連結開集合は領域となるので、「凸領域」、「星型領域」という言葉が頻繁に登場する。

$\Omega = \mathbb{C}$, $\Omega = D(c; r)$ (ただし $r > 0$), $\Omega =$ 三角形 などは凸であり、したがって星型である。

既に紹介した "星の形" は凸ではないが、星型である。

ℓ を $\mathbb{C}$ 内の半直線とするとき、$\Omega := \mathbb{C} \setminus \ell$ は凸でないが、星型である。

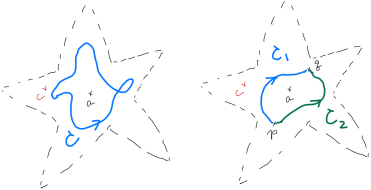


6.6 星型領域における Cauchy の積分定理

定理 22.2 (星型領域における Cauchy の積分定理)

Ω は $\mathbb{C}$ の**星型領域** (例えば円盤領域)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則 とするとき、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

1. f の原始関数 F が存在する。
2. Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0.$
3. 任意の $p, q \in \Omega$ に対して、p, q をそれぞれ始点、終点とする Ω 内の任意の区分的 C^1 級曲線 C_1, C_2 に対して、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ が成り立つ。



証明　Ω は星型であるから、ある $a\in\Omega$ が存在して、

$$(\forall z\in\Omega)\quad [a,z]\subset\Omega$$

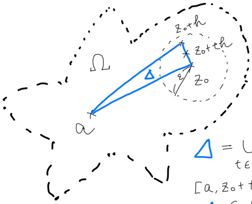
が成り立つ。

$$F(z):=\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta\quad (z\in\Omega)$$

とおくと、$F'=f$ が成り立つ。

　実際、任意の $z_0\in\Omega$ に対して、ある $\varepsilon>0$ が存在して、$D(z_0;\varepsilon)\subset\Omega$. $0<|h|<\varepsilon$ を満たす任意の $h\in\mathbb{C}$ に対して、$[z_0,z_0+h]\subset D(z_0;\varepsilon)$. ゆえに $[z_0,z_0+h]\subset\Omega$. これは任意の $t\in[0,1]$ に対して、$z_0+th\in\Omega$ ということ。星型の仮定より $[a,z_0+th]\subset\Omega$.

　$\Delta:=\displaystyle\bigcup_{t\in[0,1]}[a,z_0+th]$ は、3 点 a, z_0, z_0+h を頂点とする三角形で、$\Delta\subset\Omega$ を満たす。



$\Delta=\bigcup_{t\in[0,1]}[a,z_0+th]$

$[a,z_0+th]\subset\Omega$ だから

$\Delta\subset\Omega$

6.6 星型領域における Cauchy の積分定理　証明

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim の定理) から $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0.$

$\partial\Delta = [a, z_0] + [z_0, z_0 + h] - [a, z_0 + h]$ であるから

$$\int_{[a,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_0,z_0+h]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[a,z_0+h]} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

ゆえに

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_{[z_0,z_0+h]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

この後は前回の定理の証明と同様に $F'(z_0) = f(z_0)$ が示せる。念のため書いておく:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} - f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} f(\zeta)\, d\zeta - f(z_0)\cdot\frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} d\zeta\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_{[z_0,z_0+h]} (f(\zeta)-f(z_0))\, d\zeta\right| \\
&\le \max_{\zeta\in[z_0,z_0+h]} |f(\zeta)-f(z_0)|\,\frac{1}{|h|}\int_{[z_0,z_0+h]} |d\zeta| \\
&= \max_{\zeta\in[z_0,z_0+h]} |f(\zeta)-f(z_0)| \to 0 \quad (h\to 0).
\end{aligned}$$

これは $F'(z_0) = f(z_0)$ であることを示している。 □

積分路の変形

f が正則な範囲で曲線 C_1 が曲線 C_2 に変形出来るならば、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$

詳しく言うと、ここで言う変形には次の 2 つの場合がある。

- ⓐ 積分路の始点と終点は変えずに (固定して)、被積分関数が正則な範囲で (赤いところに触らずに) 積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。
- ⓑ 積分路が閉曲線の場合は (始点、終点は気にせず)、被積分関数が正則な範囲で (赤いところに触らずに) 積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。

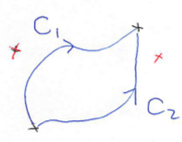


図 1: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

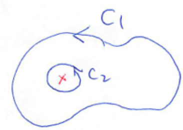


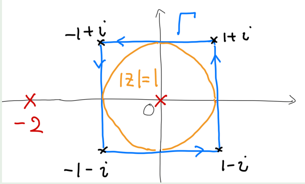
図 2: $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$

例 22.3 (ある年度の宿題から)

$\mathbb{C}$ で 4 点 $\pm 1 \pm i$ を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する閉曲線を Γ とするとき、

$$(\heartsuit) \qquad \int_\Gamma \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2}.$$

を示せ (この後、円盤における Cauchy の積分公式から、この積分の値が簡単に求まる)。

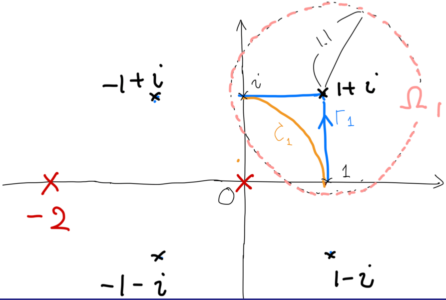


(解答) 大まかに言うと「被積分関数 $\dfrac{1}{z(z+2)^2}$ は、領域 $\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$ で正則であり、その範囲で積分路 Γ は円周 $|z| = 1$ に変形できる」ということである。

積分路変形をどう正当化するか色々なやり方がある。代表的なものを 3 つ示す。

例 22.3 (つづき)

1. 星型領域内では、始点と終点が変わらないならば曲線を置き替えて良い、という定理を使って、正方形の周を円周に替えるためには、次の 4 つの段階を踏めば良い。
   例えば第 1 象限の部分は、$1+i$ を中心として、半径が 1.1 (1 より大きく、$1+i$ と 0 との距離 $\sqrt{2}$ よりは小さい) の円盤領域 (これは星型) Ω_1 を考える。Ω_1 で被積分関数は正則です (0, -2 は含まないから)。そして、正方形の周 Γ の右上部分 Γ_1 と、円周 C の右上部分 C_1 が Ω_1 に含まれる。ゆえに、Γ_1 を C_1 に置き換えられる。
   第 2 象限 (Γ_2 を C_2), 第 3 象限 (Γ_3 を C_3), 第 4 象限 (Γ_4 を C_4) でも同様。

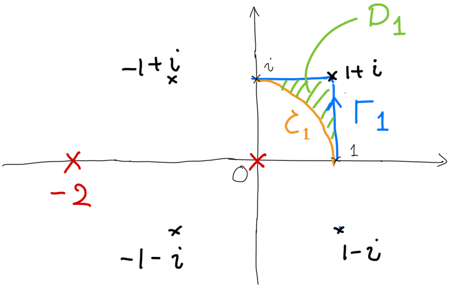


例 22.3 (つづき)

2. 各 j に対して、$\Gamma_j - C_j$ は縦線領域 (D_j とする) を囲むので、縦線領域版の Green の定理を用いた Cauchy の積分定理 (第 17 回授業参照) から

$$\int_{\Gamma_j} f(z)dz - \int_{C_j} f(z)dz = \int_{\partial D_j} f(z)dz = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\Gamma_j} f(z)dz = \int_{C_j} f(z)dz$$

とする手がある。Green の定理をちゃんと分かっているという人には、この方法は簡単に思えるかもしれない。



例 22.3 (つづき)

3. 「連続的変形」で説明されることも多い。$\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$ の中で、正方形の周を円周まで連続的に変形する写像 (ホモトピー写像と呼ぶ) を作る。(この例の場合は簡単。原点に向かって縮める感じ (図 3)。ホモトピー写像があれば、積分路を置き換えられる、という定理は、講義ノートの付録 E.4 節, 定理 E.3。ちょっと背伸び？

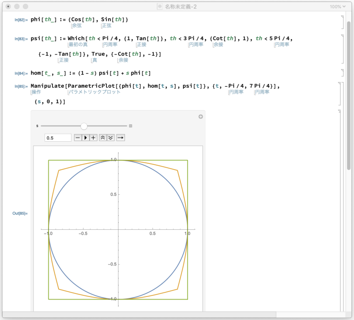


図 3: 正方形の周 Γ を円周 C に連続的に変形する

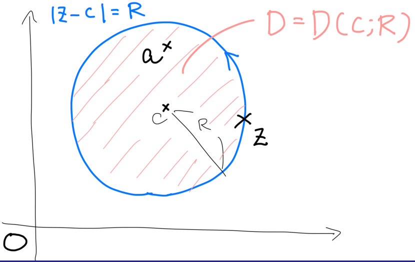
いよいよ主役 Cauchy の積分公式の登場である。まずは円盤の場合から。

定理 22.4 (円盤における Cauchy の積分公式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ とする。このとき任意の $a \in D$ に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

円周上の f の値から円盤内の点での f の値が求まる。



この定理 22.4 の証明のために補題を 2 つ用意する。

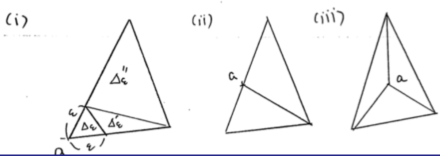
補題 22.5 (三角形版, 星型領域版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「$f:\Omega\to\mathbb{C}$ は正則」を「$f:\Omega\to\mathbb{C}$ は連続かつ $(\exists a\in\Omega)$ f は $\Omega\setminus\{a\}$ で正則」と弱くしても $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz=0$ が成り立つ。
星型領域版 Cauchy 積分定理でも同様である。

証明 (2024/12/18 証明は飛ばした。) (三角形版) $a\notin\Delta$ の場合は、前と同じ証明で良い。

$a\in\Delta$ の場合は、以下の 3 つのうちのいずれかが成り立つ。

1. a は Δ のある頂点
2. a は Δ のある辺上にあるが、頂点ではない
3. a は Δ の内部にある。



7.1 円盤における Cauchy の積分公式

(i) の場合、Δ の辺の長さより小さい任意の正数 ε に対して、図のように Δ を 3 つの三角形に分割する。a を含まない三角形 Δ'_ε, Δ''_ε では、周に沿う線積分の値は 0 であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta'_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta''_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

ゆえに ($\partial\Delta_\varepsilon$ の周の長さが 4ε 以下であることに注意して)

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\Delta}|f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \le 4\varepsilon \max_{z\in\Delta}|f(z)|.$$

$\varepsilon \to +0$ とすることで $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$

(ii), (iii) の場合も、図のように三角形を分割すると、各三角形で (i) が適用できて、線積分の値が 0 であることが導かれる。

(星型領域版)

定理 22.2 の中で、f が正則という仮定は、$F(z)=\int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$ が

$$F(z+h)-F(z)=\int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta$$

を満たすことの証明に使った。そこで三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) を用いたが、それが微分可能性を仮定しない点 (ただしその点での連続性は仮定) の存在を許せることが分かった。 □

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 22.6 (とても重要な線積分)

$a, c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & (|c-a| < r \text{ のとき}) \\ 0 & (|c-a| > r \text{ のとき}). \end{cases}$$

($|c-a| = r$ のとき、積分路の途中で $\dfrac{1}{z-a}$ の分母が 0 となるので、その場合は除外。)

補題 22.6 の証明　$|c-a| > r$ のとき。十分小さい ε を取ると、$a \notin D(c; R+\varepsilon)$ であるので、$\dfrac{1}{z-a}$ は $D(c; R+\varepsilon)$ で正則である。また円周 $|z-c| = r$ は $D(c; R+\varepsilon)$ 内の区分的 C^1 級閉曲線であるから、星型領域における Cauchy の積分定理により

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

$|c-a| < r$ のとき、積分路 $|z-c| = r$ を $|z-a| = \varepsilon$ ($z = a + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$)) に連続変形できるので、

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+re^{i\theta})-a} \cdot ire^{i\theta}\, d\theta = 2\pi i. \quad \square$$

定理 22.4 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、$g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で、$\Omega \setminus \{a\}$ で正則である。

十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $D(c; R + \varepsilon) \subset \Omega$. $|z - c| = R$ を C とおくと、C は $D(c; R + \varepsilon)$ 内の C^1 級の閉曲線である。補題 22.5 により

$$0 = \int_C g(z)\, dz = \int_C \frac{f(z)}{z - a}\, dz - f(a) \int_C \frac{dz}{z - a}.$$

補題 22.6 より、$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$ であるから

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad \square$$

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

例 22.7 (宿題 11 の類題)

$I = \displaystyle\int_{|z+3|=2} \frac{dz}{z(z+4)}$ を求めよ。

(解答) 被積分関数の "特異点" 0, -4 のうち、積分路である円周 $|z+3|=3$ の内部にあるのは -4 である。ゆえに $a=-4$ とすべきである。このとき $\dfrac{1}{z+4}=\dfrac{1}{z-a}$. ゆえに $f(z)=\dfrac{1}{z}$ とすれば $I=\displaystyle\int_{|z+3|=2}\frac{f(z)}{z-a}dz$.

$\Omega := D(-3;2.2)$ とすると、$|z+3|=2$ は Ω 内の曲線であり、$a\notin\Omega$ であるから、定理の仮定が満たされる。

$$I = 2\pi i f(-4) = \frac{2\pi i}{\cdot}\,\frac{1}{-4} = -\frac{\pi i}{2}. \quad \square$$

参考文献