5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは　Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $C\colon z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ 連続) とする。

1. $\varphi([\alpha,\beta])=\{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ を **C の像**または**跡**と呼び、C^* と表す。
2. C が **C^1 級**とは、φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、φ' が連続) であることをいう。
3. C が **C^1 級正則**とは、C が C^1 級かつ $(\forall t\in[\alpha,\beta])$ $\varphi'(t)\neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)
4. C が**区分的 C^1 級**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$
かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。
5. C が**区分的 C^1 級正則**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$
かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級かつ $\varphi'(t)\neq 0$ (ただし $t=t_{j-1},t_j$ では片側微分係数である。) であることをいう。

6. C が**閉曲線**とは、$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
7. C が**単純** (Jordan arc) $\Leftrightarrow$ 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha, \beta)$ で単射であることをいう。
   要するに「自分自身と交わらない」こと。
8. 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** $\Leftrightarrow$ 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理**「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を 2 つの領域 (一方は有界、もう一方は非有界) にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

例 20.4 (円周)

$C: z = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ は、C^1 級正則単純閉曲線である。C の像は中心 c, 半径が r の円周で、C は正の向きである。単に $|z - c| = r$ と書いたら、この曲線のこととみなす (慣習)。

例 20.5 (正方形の周)

図の正方形の周。

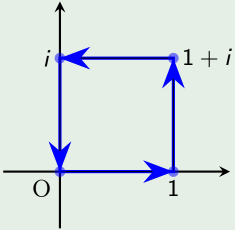

図 1: 正方形の周を正の向きに一周する

$$C\colon z=\varphi(t):=\begin{cases} t & (t\in[0,1]) \\ 1+i(t-1) & (t\in[1,2]) \\ 1+i-(t-2) & (t\in[2,3]) \\ i-i(t-3) & (t\in[3,4]) \end{cases}$$

このとき、C^* = 正方形の周. 区分的に C^1 級正則、単純閉曲線、正の向き。
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。 □

5.3 曲線に関する用語の定義

定義 20.6 (逆向きの曲線 $-C$, 曲線の和 C_1+C_2)

1. 逆向きの曲線 $-C$: $z=\varphi(-t)$ ($t\in[-\beta,-\alpha]$)
2. C_1 の終点$=C_2$ の始点のとき。C_1+C_2 を次のように定義する。

$$\varphi(t):=\begin{cases}\varphi_1(t) & t\in[\alpha_1,\beta_1]\\ \varphi_2(t-\beta_1+\alpha_2) & t\in[\beta_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2]\end{cases}$$

教科書は C_2C_1 と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では C_1+C_2 と表す (その方がふつう)。後で終点=始点でない場合にも使う。

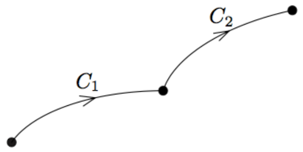

図 2: C_1 の終点 $=C_2$ の始点ならば C_1+C_2 が作れる