

2016 年度 複素関数, 複素関数演習 期末試験問題

2017 年 1 月 30 日 (月) 9:00~11:00 施行

担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

次の 7 問から 6 問を選択して解答せよ。解答の順番は自由である。

問 1. 次の方程式を解け。解は $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の形と、指数形式、両方で表わせ。

$$(1) z^2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad (2) z^6 = -1.$$

問 2. \mathbb{C} の領域 D で正則な関数 f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $f(z) = e^z$ であるとき、 u と v を求めよ。 (2) $u(x, y) = x^2 - y^2$ であるとき、 v を求めよ。

(3) Laplace 方程式 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ が成り立つことを示せ (u と v が C^2 級であることを認めて構わない)。

問 3. 正則関数 f が、0 のある近傍で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ を満たすとき、以下の問に答えよ。

(1) (一般に) 冪級数の収束半径、収束円の定義を述べよ。 (2) 上の冪級数の収束円を求めよ。また収束円周上の点において、この冪級数が収束するか発散するか調べよ。 (3) f の定義域が領域であり、2 を含むとき、 $f(2)$ を求めよ (理由をつけて答えよ)。

問 4. $f(z) := \frac{z^2 + 1}{(z+1)(3z-1)}$ について、以下のものを求めよ。(1) 0 のまわりの Taylor 展開

(2) $1/3 < |z| < 1$ における Laurent 展開 (3) i のまわりに Taylor 展開したときの収束半径

問 5. $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$ とするとき、以下のものを求めよ。

(1) $1 - \cos z$ の零点とその位数 (2) f の極とその位数、極における留数 (3) $\int_{|z|=10} f(z) dz$ の値

問 6. 次の定積分の値を求めよ。 (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^3} dx$

問 7. 以下から 1 つを選んで証明せよ (何か定理を用いる場合は、なるべくその定理を書くこと)。

(a) 正則な関数 f の実部 u 、虚部 v が Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

(b) Weierstrass の M-test

(c) $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ であり、 $f = \frac{Q}{P}$, P と Q は点 c の近傍で正則で、 $Q(c) \neq 0$, c が P の k 位の零点であるとする。このとき、 c は f の k 位の極である。

(d) f は c の近傍で正則、 c は g の 1 位の極とすると、 $\text{Res}(fg; c) = f(c) \text{Res}(g; c)$ 。

(e) 複素指数関数 e^z の指数法則 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. 複素指数関数の定義は自分で選んで良い。

(f) $\Omega := \{x + yi \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \setminus \{x + yi \mid -1/2 \leq x \leq 1/2, y \geq 0\}$ で定義される Ω は星型でない (Ω の図も描くこと)。

問1 解説 2次方程式を解く話 (宿題でやった $\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ とほぼ同じ) と、 n 乗根の話。

(1) (うっかりミスしてた。2/1修正。) $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{7\pi i/4}$ であるから、 $z = \pm e^{7\pi i/8} = e^{7\pi i/8}, e^{-\pi i/8}$ である。一方、 $(x+yi)^2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ を解いて、 $(x, y) = \pm \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)$ 。ゆえに

$$z = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}.$$

(2) -1 の極形式は $-1 = 1 \cdot e^{\pi}$ であるから、 -1 の6乗根は $z = \sqrt[6]{1} e^{(\frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{6})i} = e^{(2k+1)\pi i/6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). すなわち

$$z = e^{\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{5\pi}{6}i}, e^{\frac{7\pi}{6}i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}, e^{\frac{11\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, i, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

問2 解説 Cauchy-Riemann の方程式がテーマ。

(1) $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、 $f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x \cos y + ie^x \sin y$ であるから、 $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$.

(2) Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ に $u(x, y) = x^2 - y^2$ を代入すると、 $2x = v_y$, $v_x = 2y$. この条件を満たす関数として、 $V(x, y) := 2xy$ が見つかる。 $w(x, y) := v(x, y) - V(x, y)$ ($(x, y) \in D$) とおくと、 $w_x = v_x - V_x = 2y - 2y = 0$, $w_y = v_y - V_y = 2x - 2x = 0$. ゆえに、ある定数 C が存在して $w(x, y) = C$ ($(x, y) \in D$). ゆえに $v(x, y) = V(x, y) + C = 2xy + C$.

(3) Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy}.$$

v が C^2 級であるから $v_{xy} = v_{yx}$ が成り立つので、 $u_{xx} + u_{yy} = 0$. ■

問3 解説 $\sum n^2 z^n$ は宿題で、収束半径を求めることと、和を求めること、両方を行っている。最後に一致の定理を使って、収束円の外にある点での値が求まるという問題。

(1) 任意の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、 $0 \leq \rho \leq +\infty$ を満たす ρ が一意的に存在して、 $|z-c| < \rho$ ならば収束、 $|z-c| > \rho$ ならば発散する。このとき、 $\rho, \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を、それぞれ (この冪級数の) 収束半径、収束円と呼ぶ。

(2) $a_n := n^2$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = 1$. ゆえに収束半径は 1 であり、収束円は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. $|z| = 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |n^2 z^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ であり、一般項 $n^2 z^n$ は 0 に収束しないので、冪級数は収束しない。

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

微分して z をかけ、微分して z をかけると、

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{-z(z+1)}{(z-1)^3} \quad (|z| < 1).$$

一致の定理により、 f の定義域全体で $f(z) = -\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$. ゆえに $f(2) = -\frac{2 \cdot 3}{(2-1)^3} = -6$. ■

問4解説 有理関数を、部分分数分解してから、等比級数の和の公式を用いて、Taylor展開、Laurent展開しようという問題と、収束半径が実際に展開しなくても分かることがある、という話。

f を部分分数分解する。割算して $z^2 + 1 = \frac{1}{3} \cdot (z + 1)(3z - 1) + \frac{4}{3} - \frac{2z}{3}$ であるから、

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(3z - 1)} = \frac{1}{3} + \frac{2(2 - z)}{3(z + 1)(3z - 1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2(z + 1)} + \frac{5}{6(3z - 1)}.$$

(1) $|z| < 1/3$ のとき、

$$\frac{1}{z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1), \quad \frac{1}{3z - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n \quad (|z| < 1/3)$$

などを使って、

$$f(z) = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [(-1)^n + 5 \cdot 3^{n-1}] z^n \quad (|z| < 1/3).$$

(2) $1/3 < |z| < 1$ のとき、

$$\frac{1}{3z - 1} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3z}} = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \frac{1}{z^n}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + \frac{5}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \frac{1}{z^n} \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n + \frac{5}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \frac{1}{z^n} \quad (1/3 < |z| < 1). \end{aligned}$$

(3) $\rho = \min \{ |-1 - i|, |\frac{1}{3} - i| \} = \min \{ \sqrt{2}, \sqrt{1 + \frac{1}{9}} \} = \frac{\sqrt{10}}{3}$. ■

問5解説 難しいのも出題してみようかと思ったのだけど、ちょっとやり過ぎたかな。

(解答) $P(z) := 1 - \cos z$, $Q(z) := z$ とおく。 P, Q ともに \mathbb{C} 全体で正則である。

(1) $P(z) = 0$ の解は (ちょっとスキップして) $z = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$). $P'(z) = \sin z$, $P''(z) = \cos z$, $P'(2n\pi) = \sin 2n\pi = 0$, $P''(2n\pi) = \cos 2n\pi = 1 \neq 0$ であるから、 $2n\pi$ は P の 2 位の零点である。

(2) $c_n = 2n\pi$ とおく。

$c_0 = 0$ は分母 P の 2 位の零点であり、分子 Q の 1 位の零点であるから、 f の 1 位の極である。

$$\text{Res}(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{2 \sin^2(z/2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(z/2)^2}{\sin^2(z/2)} = 2.$$

($1 - \cos z = 2 \sin^2(z/2)$ のかわりに $1 - \cos z = \frac{z^2}{2} + O(z^4)$ としても極限の計算が出来る。この方が見通しが良いかもしれない。)

$n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対する c_n については、 $Q(c_n) = 2n\pi \neq 0$ であるから、 c_n は f の 2 位の極である。

平行移動して、 \cos の周期性、 Res の線形性を用いると

$$\begin{aligned}\text{Res}(f; c_n) &= \text{Res}(f(z + c_n); 0) \\ &= \text{Res}\left(\frac{z + c_n}{1 - \cos(z + c_n)}; 0\right) = \text{Res}\left(\frac{z + c_n}{1 - \cos z}; 0\right) \\ &= \text{Res}\left(\frac{z}{1 - \cos z}; 0\right) + c_n \text{Res}\left(\frac{1}{1 - \cos z}; 0\right).\end{aligned}$$

上で示したように $\text{Res}\left(\frac{z}{1 - \cos z}; 0\right) = \text{Res}(f; 0) = 2$.

また実は (次に示すように) $\text{Res}\left(\frac{1}{1 - \cos z}; 0\right) = 0$ であるので

$$\text{Res}(f; c_n) = 2 + c_n \cdot 0 = 2.$$

($\text{Res}\left(\frac{1}{1 - \cos z}; 0\right) = 0$ の証明) 色々やり方がありますが、どれも今年度の「複素関数」では例を見せそこないました (ちよつとうっかり)。

(i) 2位の極であることから、

$$\begin{aligned}\text{Res}\left(\frac{1}{1 - \cos z}; 0\right) &= d \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^2 \cdot \frac{1}{1 - \cos z} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(1 - \cos z) - z^2 \sin z}{(1 - \cos z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(z^2/2 + O(z^4)) - z^2(z - O(z^3))}{(z^2 + O(z^4))^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{O(z^5)}{(z^2 + O(z^4))^2} = 0.\end{aligned}$$

(ii) 冪級数展開 $1 - \cos z = z^2/2 - z^4/24 + \dots$ の逆数を計算して、 $\frac{1}{1 - \cos z} = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{120}z^2 + \dots$

と Laurent 展開できるので、 $\text{Res}\left(\frac{1}{1 - \cos z}; 0\right) = 0$.

(iii) $\frac{1}{1 - \cos z}$ は偶関数であるから、0 における Laurent 展開は、偶数次の項しか含まず (特に z^{-1} の項はないので)、留数は 0.

(3) c_n のうち、 $|z| = 10$ の囲む範囲にあるものは $0, 2\pi, -2\pi$ であり、他のものは $|z| = 10$ の囲む範囲の外部にある。留数定理によって

$$\int_{|z|=10} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f; 0) + \text{Res}(f; 2\pi) + \text{Res}(f; -2\pi)) = 2\pi i(2 + 2 + 2) = 12\pi i. \blacksquare$$

問 6 解説

(1)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} &= 2\pi i \left(\text{Res}\left(\frac{1}{z^6 + 1}; \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{z^6 + 1}; i\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{z^6 + 1}; \frac{-\sqrt{3} + i}{2}\right) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{(z^6 + 1)'} \Big|_{z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}} + \frac{1}{(z^6 + 1)'} \Big|_{z=i} + \frac{1}{(z^6 + 1)'} \Big|_{z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{6} \left(\frac{1}{z^5} \Big|_{z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}} + \frac{1}{z^5} \Big|_{z=i} + \frac{1}{z^5} \Big|_{z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}} \right) \\ &= -\frac{\pi i}{3} \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} + i + \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \right) = -\frac{\pi i}{3} \cdot 2i = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^3} dx &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^3}; i \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{d}{dz} \right)^{3-1} \left[(z-i)^3 \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^3} \right] \\ &= \pi i \left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^3} \right)'' \Big|_{z=i} = \pi i \left(12(z+i)^{-5} - 6i(z+i)^{-4} - (z+i)^{-3} \right) e^{iz} \Big|_{z=i} \\ &= \frac{\pi i}{e} \left(\frac{12}{(2i)^5} - \frac{6i}{(2i)^4} - \frac{1}{(2i)^3} \right) = \frac{\pi}{e} \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{7\pi}{8e} \blacksquare\end{aligned}$$

問7解説 最後の (f) は宿題の答案を見ていて思いついたもの (星型の例をあげなさい、という問題に対して、実際には星型でないものを星型という人もいて、やはり証明してもらおうのが良いけれど、こういう問題に証明をつけるのは難しいかな、と思ったら、簡単で (証明も多分難しくない) 例を書いてきた人がいたので、とりあげた。来年度は授業のネタにしようと思っている。)

(a) $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \Omega$ とする。 $c = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とおく。 $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ であるが、特に $h \in \mathbb{R}$ に限定すると、

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \rightarrow 0}} \frac{u(a+h, b) - u(a, b) + i(v(a+h, b) - v(a, b))}{h} \\ &= u_x(a, b) + iv_x(a, b).\end{aligned}$$

$h = ih'$ ($h' \in \mathbb{R}$) に限定すると

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{\substack{h' \in \mathbb{R} \\ h' \rightarrow 0}} \frac{f(c+ih') - f(c)}{ih'} = \frac{1}{i} \lim_{\substack{h' \in \mathbb{R} \\ h' \rightarrow 0}} \frac{u(a, b+h') - u(a, b) + i(v(a, b+h') - v(a, b))}{h'} \\ &= \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b)).\end{aligned}$$

以上から

$$u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b)).$$

ゆえに

$$u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b).$$

(b) 以降は気が向いたら書きます。まずは採点作業だ。 ■