

# 複素関数練習問題 No. 3

桂田 祐史

2017年11月13日, 2023年8月31日

## 複素関数の実部・虚部, 正則性, Cauchy-Riemann の関係式

問題 48. 正則関数の定義を述べよ。

問題 49. (複素指数関数を  $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$  で定義するとき)  $f(z) = e^z$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) は正則であり、 $f'(z) = e^z$  を満たすことを示せ。

問題 50. 複素関数の実部・虚部とは何か、説明せよ。

問題 51. Cauchy-Riemann 方程式とは何か、説明せよ。

問題 52. 以下の各  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $f$  の実部・虚部  $u, v$  を求め、 $u_x, u_y, v_x, v_y$  を計算せよ。

(a)  $f(z) = z^3$  ( $z \in \Omega := \mathbb{C}$ ) (b)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$  ( $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ ) (c)  $f(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$  ( $z \in \Omega := \mathbb{C}$ )  
(ヒントにはならないが、(c) の  $f(z)$  は実は  $\cos z$  であることが後で分かり、結果もそれなりに重要である。)

問題 53.  $z$  の関数として、 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \bar{z}$  は正則でないことを確かめよ。

問題 54.  $u, v$  がそれぞれ正則関数  $f$  の実部・虚部であるとするとき、 $u$  と  $v$  は偏微分可能で、 $u_x = v_y, u_y = -v_x$  を満たすことを示せ。

(出題の意図: 「 $f$  が正則  $\Leftrightarrow u$  と  $v$  は微分可能で Cauchy-Riemann 方程式を満たす」という定理の証明は少し難しいが、この簡略版の定理くらいは自力で証明が書けた方が良い。)

問題 55.  $\mathbb{C}$  の開集合  $\Omega$  上で定義された正則関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  の実部  $u$  と虚部  $v$  が Laplace 方程式

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

を満たすことを示せ。 $u$  と  $v$  が  $C^2$  級であることは認めて良い。

(後で一般に正則関数は冪級数展開出来ることを証明するので、その系として  $u$  と  $v$  は  $C^\infty$  級であることが得られる。Laplace 方程式を満たす関数は調和関数 (harmonic function) と呼ばれるので、この命題は「正則関数の実部虚部は調和関数である」と書くことが出来る。常識とされる命題で、「証明せよ」は良く出題される。)

問題 56.  $\Omega$  が  $\mathbb{C}$  の領域 (弧連結な開集合)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則とするとき、以下の (1)~(4) を証明せよ。

(1)  $\Omega$  で  $f' = 0$  が成り立つならば、 $f$  は定数関数である。

(2)  $\Omega$  で  $|f|$  が定数関数ならば、 $f$  そのものが定数関数である。

(3)  $\Omega$  で  $f$  が実数値しか取らない ( $(\forall z \in \Omega) f(z) \in \mathbb{R}$ ) ならば、 $f$  は定数関数である。

(4)  $\Omega$  で  $f$  が純虚数値しか取らない ( $(\forall z \in \Omega) \frac{1}{i}f(z) \in \mathbb{R}$ ) ならば、 $f$  は定数関数である。

(ヒント: すべて条件を  $f$  の実部・虚部  $u, v$  を用いて表す。)

問題 57.  $f(x) = \cos x + i \sin x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) とするとき、 $f(0) = f(2\pi)$ ,  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) \neq 0$  が成り立つことを確かめよ。(これから複素数値関数では、平均値の定理は成り立たない。)

**問題 58.**  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^2$  の領域とする。  $C^1$  級の  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき、

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

を満たす連続関数  $v$  は、もし存在するならば、定数差を除いて一意に定まる (2つあれば、その差は定数という意味) ことを示せ。(以下はベクトル解析を既習の人向け) その場合に  $v$  を  $u$  を用いて表示する式を求めよ。

**問題 59.**  $u$  は  $\mathbb{R}^2$  の開集合で定義された調和関数とする ( $u$  は  $C^2$  級で  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  を満たす)。この  $u$  に対して、  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  を満たす  $v$  が存在するとき、  $v$  は  $u$  の共役調和関数であると言う。このとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1)  $v$  は調和関数であることを示せ。 (2)  $u$  は  $v$  の共役調和関数であるかどうか答えよ。

**問題 60.** 正則関数  $f$  の実部・虚部  $u, v$  に対して、  $\mathbf{f}(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  とおくと、次式が成り立つことを示せ。

$$\det \mathbf{f}'(x, y) = u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2 = v_x(x, y)^2 + v_y(x, y)^2 = |f'(z)|^2$$

**問題 61.**  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  で  $C^2$  級の関数に対して、

$$F(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R})$$

で  $F$  を定めるとき、

$$F_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta, \quad F_\theta = -f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta \quad (0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}),$$

$$f_x = F_r \cos \theta - \frac{F_\theta \sin \theta}{r}, \quad f_y = F_r \sin \theta + \frac{F_\theta \cos \theta}{r} \quad (0 < r < 1, \theta \in \mathbb{R}),$$

$$f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} \quad (0 < r < 1, \theta \in \mathbb{R})$$

であることを示せ。

**問題 62.**  $n$  を任意の自然数とする。  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^n \cos n\theta, \quad v(r \sin \theta, r \sin \theta) = r^n \sin n\theta \quad (0 \leq r, \theta \in \mathbb{R})$$

で定めるとき、  $u$  と  $v$  は  $\mathbb{R}^2$  で調和であり、  $u$  の共役調和関数は  $v$  であることを示せ。また、  $v$  の共役調和関数を求めよ。

**問題 63.** 有界な数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して、

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) := \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

とおくと、  $u$  は  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  で調和であることを示せ。また  $u$  の共役調和関数を求めよ。

## misc. (No. 1 の残り物)

有名な Hamilton による  $\mathbb{C}$  の定義の導入部分を自分の手で確かめてみよう。

**問題 64.**  $K := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  に

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

で加法  $+$ , 乗法  $\cdot$  を定義したとき、可換体の公理を満たすことを確かめよ。

**問題 65.** 代数学の適当なテキストを探して、可換環とその極大イデアルの定義、実係数多項式環  $\mathbb{R}[x]$  を学び、

$$I = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid (\exists q(x) \in \mathbb{R}[x]) p(x) = (x^2 + 1)q(x)\} \quad (\text{要するに } x^2 + 1 \text{ の倍数の全体})$$

が  $\mathbb{R}[x]$  の極大イデアルであることを示せ。(すると剰余環  $\mathbb{R}[x]/I$  は体になるが、これを  $\mathbb{C}$  の定義とすることが出来る。 — これは複素関数論からは離れるので、あくまで参考です。)

## 解答

解答 48. 複素平面  $\mathbb{C}$  の開集合  $\Omega$  を定義域とする複素数値関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  が、定義域の各点  $z$  で微分可能なとき、 $f$  は正則であるという。 $f$  が  $z$  で微分可能とは、極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

が存在することをいう。■

解答 49. (準備中)

解答 50.  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  とするとき、

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\}, \\ u(x, y) &:= \operatorname{Re} f(x + iy) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega}), \\ v(x, y) &:= \operatorname{Im} f(x + iy) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega})\end{aligned}$$

で定まる関数  $u, v$  をそれぞれ  $f$  の実部、虚部と呼ぶ。■

解答 51. 2つの実変数  $(x, y)$  に関する2つの関数  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  に関する連立微分方程式

$$(1) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

を Cauchy-Riemann 方程式と呼ぶ。任意の正則関数の実部・虚部  $u, v$  は、この方程式を満たすことが知られている。■

解答 52.

(a)

$$f(x + iy) = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x \cdot (iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

であるから、 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ .

(Mathematica では、ComplexExpand[(x+I y)^3] のようにすると分かりやすく計算してくれる。)

(b)

$$f(x + iy) = \frac{1}{(x + iy)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 - y^2 + 1 + 2ixy} = \frac{x^2 - y^2 + 1 - 2ixy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}$$

であるから

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}.$$

(c)

$$\begin{aligned}f(x + iy) &= \frac{1}{2} \left( e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} \right) = \frac{1}{2} (e^{-y} e^{ix} + e^y e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-y} (\cos x + i \sin x) + e^y (\cos x - i \sin x)) \\ &= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \sin x \frac{e^{-y} - e^y}{2} \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \blacksquare\end{aligned}$$

解答 53. (準備中)

解答 54.

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \frac{(u(a+h_x, b+h_y) + iv(a+h_x, b+h_y)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_x + ih_y}$$

特に  $h_y = 0$  という条件を加えて極限を取ると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{(u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{h_x} \\ &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \left( \frac{u(a+h_x, b) - u(a, b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x, b) - v(a, b)}{h_x} \right) = u_x(a, b) + iv_x(a, b). \end{aligned}$$

一方  $h_x = 0$  という条件を加えて極限を取ると、

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{(u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)) - (u(a, b) + iv(a, b))}{ih_y} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h_y \rightarrow 0} \left( \frac{u(a, b+h_y) - u(a, b)}{h_y} + i \frac{v(a, b+h_y) - v(a, b)}{h_y} \right) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b)). \\ f'(c) &= u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i} (u_y(a, b) + iv_y(a, b)) \end{aligned}$$

から

$$u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b). \blacksquare$$

解答 55.  $C^2$  級の関数の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらないので、

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y = \frac{\partial}{\partial x} v_y + \frac{\partial}{\partial y} (-v_x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0, \\ v_{xx} + v_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = \frac{\partial}{\partial x} (-u_y) + \frac{\partial}{\partial y} u_x = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 56.  $f$  の実部虚部を  $u, v$  とする。すなわち

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\}, \\ u(x, y) &:= \operatorname{Re} f(x + iy) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega}), \\ v(x, y) &:= \operatorname{Im} f(x + iy) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega}). \end{aligned}$$

(1) 任意の  $z \in \Omega$  に対して、 $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) とすると、

$$0 = f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{1}{i} (u_y(x, y) + iv_y(x, y)).$$

これから

$$u_x(x, y) = u_y(x, y) = v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0.$$

$\Omega$  は領域 (連結開集合) であるから、 $u, v$  は  $\tilde{\Omega}$  で定数に等しい。ゆえに  $f = u + iv$  も  $\Omega$  で定数に等しい。

(2) 仮定より  $(\exists C \in \mathbb{R}) |f(z)| \equiv C$ . もしも  $C = 0$  ならば  $f(z) \equiv 0$  であるから、 $f(z)$  そのものが定数である。以下  $C \neq 0$  とする。 $u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = C^2$  を偏微分して  $uu_x + vv_x = 0$  かつ  $uu_y + vv_y = 0$ .

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

もしも行列式が 0 でないならば  $u = v = 0, C = 0$  となり仮定に矛盾するので、

$$u_x v_y - v_x u_y = 0.$$

Cauchy-Riemann の関係式  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  を用いると、

$$u_x v_y - v_x u_y = u_x u_x - (-u_y) u_y = (u_x)^2 + (u_y)^2, \quad u_x v_y - v_x u_y = v_y v_y - v_x (-v_x) = (v_x)^2 + (v_y)^2$$

であるから、

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 \equiv 0, \quad (v_x)^2 + (v_y)^2 \equiv 0.$$

これから  $u_x \equiv u_y \equiv v_x \equiv v_y \equiv 0$ . 以下 (1) と同様にして、 $f$  は定数関数である。

(別解)  $2uu_x + 2vv_x = 0$ ,  $2uu_y + 2vv_y = 0$  を導くのは上と同じ。そこから Cauchy-Riemann の方程式を使って

$$uu_x - vv_x = 0, \quad vv_x + uu_y = 0.$$

これは

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ということで、この連立 1 次方程式の係数行列の行列式は

$$u \cdot u - (-v) \cdot v = u^2 + v^2 = C^2.$$

$C = 0$  ならば  $u = v = 0$  で、 $f = u + iv = 0$  も定数。 $C \neq 0$  ならば (逆行列をかけて)  $u_x = u_y = 0$  で、再び Cauchy-Riemann の方程式を使うと  $v_x = v_y = 0$  も導かれ、 $u$  も  $v$  も定数である。ゆえに  $f = u + iv$  も定数。— この答の方が見通しが良いような気がする

- (3) 仮定は  $v \equiv 0$  ということであるから、 $v_x = v_y = 0$  in  $\tilde{\Omega}$ . Cauchy-Riemann の方程式  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  から、 $u_x = u_y = 0$ . ゆえに  $u$  は定数関数であり、 $f = u + iv = u$  も定数関数である。
- (4) 仮定は  $u \equiv 0$  ということであるから、 $u_x = u_y = 0$  in  $\tilde{\Omega}$ . Cauchy-Riemann の方程式  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  から、 $v_x = v_y = 0$ . ゆえに  $v$  は定数関数であり、 $f = u + iv = iv$  も定数関数である。■

**解答 57.**  $f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$ ,  $f(2\pi) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 + i \cdot 0 = 1$  であるから、 $f(0) = f(2\pi)$ .  $f'(x) = -\sin x + i \cos x$  より、 $|f'(x)| = \sqrt{(-\sin x)^2 + \cos^2 x} = \sqrt{1} = 1 \neq 0$  であるから、 $f'(x) \neq 0$ . ■

**解答 58.**

$$u_x = v_y = V_y, \quad u_y = -v_x = -V_x$$

を満たす連続関数  $v, V$  があったとすると、 $w := v - V$  は

$$w_x = v_x - V_x = (-u_y) - (-u_y) = 0, \quad w_y = v_y - V_y = u_x - u_x = 0$$

を満たす  $C^1$  級関数である。ゆえに  $(\exists C \in \mathbb{R}) (\forall (x, y) \in \Omega) w(x, y) = C$ . ゆえに  $v(x, y) = V(x, y) + C$  ( $(x, y) \in \Omega$ ).

$v$  は  $(v_x, v_y)$  というベクトル場のポテンシャルであるから、 $\Omega$  内の任意の点  $(a, b)$  を固定するとき、

$$v(x, y) = v(a, b) + \int_{C(x, y)} (v_x dx + v_y dy)$$

が成り立つ。ただし、 $C(x, y)$  は、 $(a, b)$  を始点、 $(x, y)$  を終点とする区分的に  $C^1$  級の  $\Omega$  内の曲線である。条件  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  により、

$$v(x, y) = v(a, b) + \int_{C(x, y)} (-u_y dx + u_x dy).$$

これが求める式である。(1) で見たように、もともと定数だけの不定さがあるので、 $v(a, b)$  は任意定数とすれば良い。すなわち

$$v(x, y) = C + \int_{C(x, y)} (-u_y dx + u_x dy). \blacksquare$$

解答 59.

(1) Laplacian の定義に  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  を代入すると

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy}.$$

$u$  は  $C^2$  級であるので、偏微分の順序交換が可能であるから、 $u_{yx} = u_{xy}$ . ゆえに  $\Delta v = 0$ .

(2)  $u$  は  $v$  の共役調和関数ではない。実際  $U = v, V = u$  とおくと、

$u$  が  $v$  の共役調和関数  $\Leftrightarrow V$  が  $U$  の共役調和関数

$$\Leftrightarrow U_x = V_y, \quad U_y = -V_x$$

$$\Leftrightarrow v_x = u_y, \quad v_y = -u_x.$$

これは  $v$  が  $u$  の調和関数である条件  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  と似ているが違う。この条件が同時に成り立つとすると  $u_x = v_y = -u_x, u_y = -v_x = -u_y$  より  $u_x = u_y = 0, v_x = v_y = 0$  が得られるので、 $u$  と  $v$  の両方が定数関数という特殊な場合しかない。もちろん定数でない共役調和関数の組が存在するので、「 $v$  が  $u$  の共役調和関数  $\Rightarrow u$  が  $v$  の共役調和関数」は一般には成り立たない。 ■

解答 60.  $f'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$  であるから、 $\det f' = u_x v_y - u_y v_x$ .  $u$  の偏導関数で表すと

$$\det f' = u_x u_x - u_y (-u_y) = u_x^2 + u_y^2.$$

$v$  の偏導関数で表すと

$$\det f' = v_y v_y - (-v_x) v_x = v_x^2 + v_y^2.$$

$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$  であるから、

$$\det f'(x, y) = u_x u_x - (-v_x) v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2. \blacksquare$$

解答 61. 合成関数の微分法から

$$F_r = f_x x_r + f_y y_r, \quad F_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta.$$

これに  $x_r = \cos \theta, y_r = \sin \theta, x_\theta = -r \sin \theta, y_\theta = r \cos \theta$  を代入すると

$$F_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta, \quad F_\theta = -f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta.$$

これを  $f_x, f_y$  についての連立 1 次方程式として解くと、

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix}.$$

これから

$$f_x = F_r \cos \theta - \frac{F_\theta \sin \theta}{r}, \quad f_y = F_r \sin \theta + \frac{F_\theta \cos \theta}{r}.$$

一方 (また合成関数の微分法を用いて)

$$F_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + (f_{xy} + f_{yx}) \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta,$$

$$F_{\theta\theta} = f_{xx} r^2 \sin^2 \theta - (f_{xy} + f_{yx}) r^2 \cos \theta \sin \theta + f_{yy} r^2 \cos^2 \theta - f_x r \cos \theta - f_y r \sin \theta$$

であるから、

$$\begin{aligned} F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} &= f_{xx} \cos^2 \theta + (f_{xy} + f_{yx}) \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta \\ &\quad + \frac{1}{r} (f_x \cos \theta + f_y \sin \theta) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} (f_{xx} r^2 \sin^2 \theta - (f_{xy} + f_{yx}) r^2 \cos \theta \sin \theta + f_{yy} r^2 \cos^2 \theta - f_x r \cos \theta - f_y r \sin \theta) \\ &= f_{xx} + f_{yy}. \blacksquare \end{aligned}$$

**解答 62.**  $u(x, y) = \operatorname{Re}[(x + iy)^n]$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im}[(x + iy)^n]$  であり、 $z^n$  は  $\mathbb{C}$  で正則であるから、 $u, v$  は  $\mathbb{R}^2$  で調和である。また  $v$  は  $u$  の共役調和関数である。 $v$  の共役調和関数は  $-u + C$  ( $C$  は定数である。) ■

(別解)  $U(r, \theta) := u(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^n \cos n\theta$ ,  $V(r, \theta) := v(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^n \sin n\theta$  は、

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0, \quad V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\theta\theta} = 0$$

を満たすので、 $u$  と  $v$  は  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  で調和である。

Cauchy-Riemann の方程式を極座標で表現すると

$$(\#) \quad U_r = \frac{1}{r}V_\theta, \quad \frac{1}{r}U_\theta = -V_r \quad (r > 0, \theta \in \mathbb{R})$$

となる。実際、

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ -r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow U_r = \frac{1}{r}V_\theta \quad \text{かつ} \quad U_\theta = -rV_r. \end{aligned}$$

$U(r, \theta) = r^n \cos n\theta$ ,  $V(r, \theta) = r^n \sin n\theta$  は  $r > 0$  のとき (#) を満たすので、 $u$  と  $v$  は  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  で Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

$u$  と  $v$  は  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  で調和で、 $(0, 0)$  で連続であることから、 $\mathbb{R}^2$  全体で  $C^2$  級でかつ調和であることが分かる (これをきちんと証明するには、少し準備が必要である)。このことから、 $(0, 0)$  でも Cauchy-Riemann の方程式を満たす。 ■

**解答 64.** (略解) 可換体の公理とは次の (i)~(ix) である。

$$(i) \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ii) \quad (\exists 0_K \in K) \quad (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$$

$$(iii) \quad (\forall a \in K) \quad (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$$

$$(iv) \quad (\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$$

$$(v) \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(vi) \quad (\exists 1_K \in K) \quad (\forall a \in K) \quad a \cdot 1_K = 1_K \cdot a = a$$

$$(vii) \quad (\forall a \in K \setminus \{0_K\}) \quad (\exists a'' \in K) \quad a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1_K$$

$$(viii) \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(ix) \quad (\forall a, b \in K) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

(可換体の公理に (x)  $0_K \neq 1_K$  も含める場合があるが、今の場合はこの条件も満足している。)

基本的に計算して確認するだけである。∃ のついているものは、何であるか書いておくと、

- $0_K = (0, 0)$ .
- $a'$  は  $a = (x, y)$  のとき  $a' = (-x, -y)$ .

- $1_K = (1, 0)$ .

- $a''$  は  $a = (x, y)$  のとき  $a'' = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ . ■

解答 65. (準備中)