

複素関数・同演習 第 25 回
～Laurent 展開, 孤立特異点, 留数 (2)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022 年 12 月 21 日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② Laurent 展開, 孤立特異点, 留数 (続き)
 - 孤立特異点, 孤立特異点の分類 (続き)
 - 極とその位数の特徴付け
- ③ 参考文献

本日の内容・連絡事項

- Laurent 展開の例をいくつかあげる。極とその位数の判定法を学ぶ (零点とその位数の特徴づけと関連が深いし、似ているところも多い、混同しないこと)。留数を求める話もいくつか出てくる。
- 宿題 12 を出します。
- 宿題のうち、 \times 切は過ぎたけれどまだ解説していないものについては、今週中に WWW で解答を発表します。フィードバックも順次行います。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

思い出してもらうため、前回終わり頃のスライドを再提示。

定義 25.1 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。 c が f の **孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、 f は $A(c; 0, \varepsilon)$ で正則であり、 $D(c; \varepsilon)$ では正則でないことをいう。

このとき、ある $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (z \in A(c; 0, \varepsilon))$$

が成り立つ (定理??)。

a_{-1} を f の c における **留数** (residue) と呼び、 $\text{Res}(f; c)$ で表す。

展開結果 (1) を用いて孤立特異点を 3 つに分類する。

① c が f の **除去可能特異点** (removable singularity) であるとは

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{-n} = 0 \quad (\text{つまり } f \text{ の Laurent 展開の主部が } 0)$$

が成り立つことをいう。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

定義 25.1 (つづき)

(ii) c が f の極 (pole) であるとは、

$$(\exists k \in \mathbb{N})(a_{-k} \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0)$$

$$\text{つまり } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}, \quad a_{-k} \neq 0.$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が有限個だけ存在する

が成り立つことをいう。またこのとき、 k を f の極 c の位数 (order) と呼び、 c は f の k 位の極であるという。

(iii) c が f の真性特異点 (essential singularity) であるとは

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} \neq 0$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が無数ある

が成り立つことをいう。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

注意 25.2

- ① この孤立特異点の定義は、教科書 (神保 [1]) の定義とは異なる。[1] では、「ある正の数 ε が存在して、 f が $A(c; 0, \varepsilon)$ で正則であること」となっていて、 f が $D(c; \varepsilon)$ で正則である (つまり悪い点でない, 特異性がない) 場合を除外していない。(我々は c が “悪い” 点でないときは孤立特異点とは言わない。こちらの方が多数派である。)
- ② (なぜ「除去可能特異点」と呼ぶか) (i) の場合、任意の $z \in D(c; \varepsilon)$ に対して

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

は収束するので、 \tilde{f} は (c を含んだ) $D(c; \varepsilon)$ で正則で、

$$f(z) = \tilde{f}(z) \quad (z \in A(c; 0, \varepsilon)), \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in A(c; 0, \varepsilon)) \\ a_0 & (z = c). \end{cases}$$

つまり、 $z = c$ で f の値を a_0 であるように定義を修正した \tilde{f} は、 $D(c; \varepsilon)$ で正則である。「除去可能」という言葉のニュアンスが分かる。なお、 $a_0 = \lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z)$ であることを注意する。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

注意 25.3 (つづき)

③ (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\lim_{\substack{z \rightarrow c \\ z \neq c}} f(z) = \infty$ が成り立つから。

実は、 c を f の孤立特異点とするとき、

- Ⓐ c が f の除去可能特異点 \Leftrightarrow 極限 $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$ が存在する。
- Ⓑ c が f の極 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$.
- Ⓒ c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow c} f(z)$ は確定しない (発散かつ $\neq \infty$)。

が成り立つ (\Rightarrow だけでなく、逆向き \Leftarrow も言えることが重要である)。

(a), (b) の \Rightarrow の証明は簡単である。実際、

- 収束冪級数は正則、特に連続なので $\lim_{z \rightarrow c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n = a_0$
- $\sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \sim \frac{a_{-k}}{(z - c)^k} \rightarrow \infty (z \rightarrow c)$.

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

注意 25.4 (つづき)

- ③ (続き) (c) の \Rightarrow の証明には準備 (例えば Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の \Leftarrow は一斉に証明できる。
- ④ 真性特異点という言葉は、孤立特異点でない場合にも使われる。ここの条件が成り立つ場合は「孤立真性特異点とは」と呼ぶ方が紛れがないかもしれない。 □

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

第 25 回 (2022/12/21) の実質的内容はこのスライドからです。

以下、Laurent 展開の例を紹介する。

- 実際に孤立特異点の周りで Laurent 展開してみて、それで 3 つのうちの特異点であるかを判定する例から始める。
- 有理関数の場合は、冪級数展開のときと同様に、部分分数分解してか

ら、 $\frac{1}{(z-a)^m}$ については

- $m=1$ の場合は

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-c) - (a-c)} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a-c}{z-c}}$$

としてから等比級数の和の公式を使う。

- $m > 1$ の場合は、まず $\frac{1}{z-a}$ を展開してから、 $m-1$ 回微分する (級数は項別微分できる)。
- 初等関数などは既知の Taylor 展開などが利用できる。
- 極の位数や留数を知るため、Laurent 展開することをサボるやり方を考える。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.5

$f(z) = \frac{1}{z-2}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$). f は $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ で正則である。ゆえに 2 は f の孤立特異点で、それ以外に孤立特異点は存在しない。

$\mathbb{C} \setminus \{2\}$ は円環領域 $A(2; 0, +\infty)$ である。 f の 2 のまわりの Laurent 展開は $f(z) = \frac{1}{z-2}$ (f 自身) である。実際、

$$a_{-1} := 1, \quad a_n := 0 \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

とすると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-2)^n} \quad (z \in A(2; 0, +\infty)).$$

この Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z-2}$. $\text{Res}(f; 2) = a_{-1} = 1$. 2 は f の 1 位の極である。 □

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.6

$$(2) \quad f(z) = \frac{3}{(z-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

f は $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ で正則である。ゆえに 1 は f の唯一の孤立特異点である。

$\mathbb{C} \setminus \{1\}$ は円環領域 $A(1; 0, +\infty)$ である。(2) 自身が f の 1 のまわりの Laurent 展開である。実際、

$$a_{-2} := 3, \quad a_n := 0 \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\})$$

とすると

$$\frac{3}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-1)^n} \quad (z \in A(1; 0, +\infty)).$$

この Laurent 展開の主部は $\frac{3}{(z-1)^2}$. $\text{Res}(f; 1) = a_{-1} = 0$. 1 は f の 2 位の極である。 □

以下、一般の有理関数を考えよう。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.7 (有理関数の極の位数、留数)

有理関数 $f(z) = \frac{z^3 - 7z^2 + 26z - 30}{z^3 - 5z^2 + 3z + 9}$ について、まず部分分数分解する。

$$f(z) = 1 + \frac{2}{z-3} + \frac{3}{(z-3)^2} - \frac{4}{z+1}.$$

f は $\mathbb{C} \setminus \{3, -1\}$ で正則であり、 3 と -1 は孤立特異点である。

$1 - \frac{4}{z+1}$ は $D(3; 4)$ で正則であり、 3 の周りに冪級数展開できる (やり方は説明済み):

$$1 - \frac{4}{z+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n} (z-3)^n \quad (z \in D(3; 4) \text{ すなわち } |z-3| < 4).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n} (z-3)^n + \frac{2}{z-3} + \frac{3}{(z-3)^2} \quad (0 < |z-3| < 4).$$

これは f の 3 の周りの Laurent 展開である。ゆえに 3 は f の 2 位の極であり、 $\text{Res}(f; 3) = 2$ 。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.7 (有理関数の極の位数、留数 (続き))

一般に、有理関数は分母が 0 となる点 c を孤立特異点に持ち (分母と分子に共通因数がないとする)、 c の周りに Laurent 展開できることが分かる。Laurent 展開が求まれば、それから c の極としての位数や留数 $\text{Res}(f; c)$ が得られる。

しかし、極の位数や留数を求めるだけならば、Laurent 展開を具体的に求める必要はない。孤立特異点 -1 について、それを実行してみよう。

$1 + \frac{2}{z-3} + \frac{3}{(z-3)^2}$ は $D(-1; 4)$ で正則であるから、 -1 の周りに冪級数展開できる:

$$(\exists \{a_n\}_{n \geq 0}) \quad 1 + \frac{2}{z-3} + \frac{3}{(z-3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n \quad (z \in D(-1; 4) \text{ すなわち } |z+1| < 4).$$

これから

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n - \frac{4}{z+1} \quad (0 < |z+1| < 4).$$

これが f の -1 の周りの Laurent 展開である。 a_n を具体的に求めていないが、 -1 は f の 1 位の極で、 $\text{Res}(f; -1) = -4$ であることがわかる。結局、部分分数分解をした段階で、これらが分かることに注意しよう。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.8 (有理関数以外の極の例)

$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

\sin の 0 のまわりの冪級数展開 $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ ($z \in \mathbb{C}$) から

$$(*) \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} + \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である。実際

$$c = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \geq 0, n \text{ は奇数のとき。} k = \frac{n+1}{2} \text{ とおくと } k \in \mathbb{Z}, n = 2k-1) \\ 1 & (n = -1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とおくと、(*) の右辺は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ の形をしている。また、この

Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z}$ であり、 0 は f の 1 位の極、 $\text{Res}(f; 0) = a_{-1} = 1$ 。 □

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.9 (除去可能特異点)

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

0 の周りの Laurent 展開は

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \quad (z \in A(0; 0, +\infty)).$$

上とほとんど同じなので、議論を少しスキップして、主部は 0 であるから、 0 は f の除去可能特異点である。 □

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.10 (孤立真性特異点)

$f(z) = \exp \frac{1}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

$$\exp \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \zeta^n \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

であるから

$$f(z) = \exp \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

これは f の 0 のまわりの Laurent 展開である (実際、 $a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), $a_0 = 1$, $a_{-n} = \frac{1}{n!}$ ($n \in \mathbb{N}$) とすると...)。

この Laurent 展開の主部は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ であり、(0 でない項が無数個あるので) 0 は f の真性特異点である。また $\text{Res}(f; 1) = a_{-1} = \frac{1}{1!} = 1$. □

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

例 25.11 (孤立特異点でない「特異点」)

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}.$$

f は $z = 0$ で定義されない (明らか)。

それ以外に $\sin \frac{1}{z} = 0$ となる z に対しても定義されない。つまり、この f は、 $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n\pi} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ に属する点では定義されない。

0 は f の孤立特異点ではない。しかし、これも真性特異点と呼ばれる。 □

Laurent 展開を求めるのは結構大変というか手間がかかる。なるべく求めずに色々なことを分かりたい (特異点の種類、極の場合のその位数、留数が分かれば十分が多い)。

10.3 極とその位数の特徴付け

定理 25.12 (k 位の極であるための条件)

$c \in \mathbb{C}$, U は c のある開近傍、 f は $U \setminus \{c\}$ で正則、 $k \in \mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$ ($z \in U \setminus \{c\}$) かつ $g(c) \neq 0$ 。

証明 (i) \Rightarrow (ii) c が f の k 位の極とすると

$$(\exists R > 0)(\exists \{a_n\}_{n \geq -k}) \quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R), \quad a_{-k} \neq 0.$$

このとき

$$(z-c)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'-k} (z-c)^{n'} \quad (0 < |z-c| < R).$$

$$g(z) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z-c)^n & (z \in D(c; R)) \\ (z-c)^k f(z) & (z \in U \setminus D(c; R)) \end{cases}$$

とおくと、 g は条件を満たす ($g(c) = a_{-k} \neq 0$ に注意)。

10.3 極とその位数の特徴付け

証明 (続き) (ii) \Rightarrow (i) ある正の数 R が存在して、 $D(c; R) \subset U$. g は $D(c; R)$ で正則であるから、 $\{b_n\}_{n \geq 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - c)^n \quad (z \in D(c; R)).$$

このとき

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z - c)^k} = \frac{b_0}{(z - c)^k} + \frac{b_1}{(z - c)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z - c) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k} (z - c)^n + \sum_{n=1}^k \frac{b_{k-n}}{(z - c)^n}, \end{aligned}$$

$\frac{1}{(z - c)^k}$ の係数は $b_{k-n} = b_0 = g(c) \neq 0$. ゆえに c は f の k 位の極である。 \square

k 位の零点と対比して覚えることを勧める ($f(z) = (z - c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$).

Laurent 展開をしなくても、極かどうか、その位数は何か、分かることが重要である。

10.3 極とその位数の特徴付け

例 25.13

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？

0 は f の 3 位の極。1 は f の 2 位の極。2 は f の 1 位の極。

それでは

$$g(z) = \frac{(z-2)(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

は？実は、2 は f の除去可能特異点である。実際

$$h(z) := \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2}$$

とおくと、 $g(z) = h(z)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$) であり、 h は 2 の近傍 $D(2; 1)$ で正則であるから、

$$(\exists \{a_n\}_{n \geq 0}) h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n \quad (z \in D(2; 1)).$$

ゆえに $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ ($z \in A(2; 0, 1)$)。ゆえに 2 は g の除去可能特異点である。 □

参考文献

- [1] じんぼう 神保 道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063> でアクセスできる.