

複素関数・同演習 第 11 回
～ 冪級数 (3) 収束半径 (続き), 一様収束 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022 年 10 月 25 日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 冪級数 (続き)
 - 収束円 (続き)
 - 収束半径の求め方の考え方
 - Cauchy-Hadamard の公式
 - ratio test
 - 例
 - 一様収束
 - 目的の説明: 項別積分, 項別微分
 - 各点収束, 一様収束の定義
 - 例
- 3 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 宿題 5 の提出先の準備が遅れたので (うっかりしていましたが)、宿題 5 の \times 切は 10 月 26 日 10:50 とします。そのため、宿題 5 の解説は 10 月 26 日の 2 限に行います。
- 先週やるはずだった、宿題 4 の解説をします。
- 宿題 6 は次回 (10 月 26 日 2 限) に出します。
- 冪級数の 3 回目。まず 3.2.2 (1 枚) を済ませた後、3.2.3 を飛ばして、3.2.4 の定理 11.3 の証明を済ませる。それから 3.3 「一様収束」に飛ぶ。

3.2.2 収束半径の求め方の考え方

冪級数の収束について、次のように考えることを勧める。

冪級数は等比級数に近いので、等比級数と比べて収束半径を求める

$a_n(z - c)^n \sim r^n$ とみなす。 $|r|$ に相当するものがどのようにして求められるか？

Ⓐ 比を取る ($|r^{n+1}| / |r^n| = |r|$)。

$$|r| \sim \frac{|a_{n+1}(z - c)^{n+1}|}{|a_n(z - c)^n|} = |z - c| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ が存在するならば、それが役に立ちそう。実際

$$|z - c| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

が 1 より小さければ収束、1 より大きければ発散である (d'Alembert, ratio test)。

Ⓑ n 乗根を取る ($\sqrt[n]{|r^n|} = |r|$)。

$$|r| \sim \sqrt[n]{|a_n(z - c)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} |z - c|$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するならば、それが役に立ちそう。実際

$$|z - c| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

が 1 より小さければ収束、1 より大きければ発散である。実は \lim を \limsup とすることが出来て、究極の答えになる (Cauchy-Hadamard の公式)。

0月25日の講義では次の3.2.3を飛ばして進みます。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので強くは推めないが、紹介はしておく。

定理 11.1 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法))

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、 $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ という約束の元で

$$(1) \quad \rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

ここで \limsup は上極限を表す (定義は次のスライド)。

- 任意の数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するので、すべての冪級数に対して公式 (1) が適用できる。これは大きな長所である。
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ をどうやって求めるかは問題として残る。この講義では、 \limsup を求める練習に時間をかけられないので、この定理を使わない方法を推奨することにする。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

一応 \limsup (上極限) の定義を書いておく。簡単な場合は、定義から $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が

すぐ求められるかもしれない。(例えば $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n} \right] = 1$.)

上極限の定義

$\{a_n\}$ を実数列, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$ とは、次の 2 条件を満たすことをいう。

- ① $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) a_n < \lambda + \varepsilon$.
これは十分大きい任意の n に対して $a_n < \lambda + \varepsilon$ が成り立つ、ということ。
- ② $(\forall \varepsilon > 0) (\forall N \in \mathbb{N}) (\exists n \in \mathbb{N}: n \geq N) a_n > \lambda - \varepsilon$.
これは $a_n > \lambda - \varepsilon$ を満たす n は無限個ある、ということ。

● $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ とは、任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して、 $a_n > U$ を満たす n が無限個存在する、ということ。

● $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ とは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ を満たす、ということ。

上極限について、詳しいことが知りたければ、例えば杉浦 [1] V.1 を見よ。

3.2.3 Cauchy-Hadamard の公式

Cauchy-Hadamard の公式の簡略化バージョンを掲げておく。

系 11.2 (Cauchy-Hadamard の公式 簡略版)

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散) するならば、収束半径 ρ は、 $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ という約束の元で

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明.

「 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ が確定すれば $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 」 (これは簡単に示せる) が成り立つから。 □

今後、収束半径の議論をしているとき、つねに次のように約束しておく。

$$\frac{1}{0} = +\infty, \quad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

次の 3.2 .4 「ratio test」は、定理 11.3 の証明以外は、前回 (10 月 18 日) の授業で解説済みである。このスライドには、読みやすさを考えて、前回説明した分も合わせて収録しておく。

3.2.4 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 11.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ が確定するならば、 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ の収束半径は } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

証明 $c = 0$ の場合に証明すれば良い。

$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。 $|z| < \rho$ ならば収束し、 $|z| > \rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z| < \rho$ を満たすとする。 $|z| < R < \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > R$ が成り立つ。

この条件を満たす N を一つとる。 $m \geq 0$ とするとき

$$\left| a_{N+m} z^{N+m} \right| = \left| a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}} z^N z^m \right| \leq \left| a_N z^N \right| \left(\frac{|z|}{R} \right)^m.$$

言い換えると任意の $n \geq N$ に対して

$$\left| a_n z^n \right| \leq \left| a_N z^N \right| \left(\frac{|z|}{R} \right)^{n-N}.$$

(次のスライドに続く)

3.2.4 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \leq n \leq N-1) \\ |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $|a_n z^n| \leq b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{|a_N z^N|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理 (定理 9.2) より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、 $|z| > \rho$ とする。 $|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \geq |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

$|z|/R > 1$ であるから、 $a_n z^n$ は 0 に収束しない。ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

以上から、 ρ は収束半径である。

□

次の 3.25 「例」は、前回 (10 月 18 日) の授業で解説済みであるので、今回は (もちろん) 説明しないが、話の順番としてはこの後続くべきものなので、スライドには再録しておく。

3.2.5 例

収束半径を求める例をいくつか示す。

冪級数の中心を c , 係数を a_n , 収束半径を ρ と表すことにする。

例 11.4 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad \rho = 1. \quad \text{収束円は } D(0; 1).$$

これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、 $|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0, a_n = 1$ である。

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ であるから、Cauchy-Hadamard の判定法により $\rho = \frac{1}{1} = 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ であるから、ratio test により $\rho = 1$.

3.2.5 例

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 11.5 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - c_0}{R} \right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \frac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

(別解) これは公比が $\frac{z - c_0}{R}$ の等比級数であるから、

$$\text{収束} \Leftrightarrow \left| \frac{z - c_0}{R} \right| < 1 \Leftrightarrow |z - c_0| < R.$$

ゆえに ($|z - c_0| < R$ で収束、 $|z - c_0| > R$ で発散するので) 収束半径は R .
収束円は $D(c_0; R)$. □

3.2.5 例

例 11.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n. \quad \text{このとき } c = 0, a_n = \frac{1}{n^2} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ である。}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

例 11.7

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n. \quad \text{このとき } c = 0, a_n = n^2 \ (n \in \mathbb{N}) \text{ である。}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

3.2.5 例

例 11.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \quad \text{このとき } c = 0, a_n = \frac{1}{n!} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ である。}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho = +\infty$. 収束円は \mathbb{C} .

例 11.9

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n. \quad \text{このとき } c = 0, a_n = n! \ (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \text{ であるので}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 0$. 収束円は \emptyset .

3.2.5 例

(簡単なまとめ)

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は同じ。収束円の中心が c , 0 という違いがある。
- k を定数とするとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ の収束半径は、 k が何であっても 1 .
- $c \neq 0$ とするとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$ の収束半径は $\frac{1}{|c|}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ の収束半径はそれぞれ 0 , $+\infty$.

3.2.5 例

例 11.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n} (z-1)^n.$$

このとき $c = 1$, $a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), $a_0 = 0$ である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-2)^{n-1}/n|}{|(-2)^n/(n+1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに ratio test より $\rho = \frac{1}{2}$. 収束円は $D(1; 1/2)$.

3.2.5 例 特にマスターして欲しい例

例 11.11

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}. \quad (\text{実は } \sin z \text{ の Taylor 展開だがそのことは使わない}).$$

$$c = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \text{ は奇数, } k \text{ を } n = 2k + 1 \text{ で定めて}) \\ 0 & (n \text{ は偶数}). \end{cases}$$

$a_n = 0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。

$\zeta := z^2$ とおくと^a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \zeta^k.$$

^a共通因数 z をくくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に (0 以外の) 定数かけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しいことが分かる。

3.2.5 例 特にマスターして欲しい例

例 11.11 (つづき)

そこで

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(*)$ の収束半径は $+\infty$ 。ゆえに $(*)$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。

ゆえに元の級数は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho = +\infty$ 。

3.2.5 例 特にマスターして欲しい例

例 11.11 (つづき 別解)

Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 11.2) を使って示すことも出来る。

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n \text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{次のスライドで証明})$$

であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. ゆえに系 11.2 の公式から、 $\rho = \frac{1}{0} = +\infty$ である。

3.2.5 例 ratio test の使えない例

例 11.12 (ratio test の使えない例)

$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \dots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}) n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、 $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、 $|a_n (z - c)^n| \leq |z|^n$ であり、 $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理

により、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ も収束する。

一方、 $|z| > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z - c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because n$ が平方数のとき $|a_n (z - c)^n| = |z|^n > 1$)、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1。□

別解 上極限の定義から $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ 。ゆえに Cauchy-Hadamard の公式より、収束半径は $1/1 = 1$ 。□

3.3 一様収束 3.3.0 言葉の説明: 項別積分, 項別微分

簡単のため、まず \mathbb{R} の区間 $[a, b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり \lim と積分の順序交換)

注 $f_n = \sum_{k=1}^n a_k$ のような級数の場合は $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx$.

一方

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

が成り立つとき、**項別微分可能**という。(つまり \lim と微分の順序交換)

注 級数の場合は $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

冪級数の微分・積分を扱うのに、単なる各点収束では不十分。**一様収束が便利**。

3.3.1 各点収束, 一様収束の定義

定義 11.13 (各点収束, 一様収束)

Ω は空でない集合、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は各 n に対して $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

- ① $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が f に Ω で (Ω 上) **各点収束** (単純収束) するとは、

$$(\forall z_0 \in \Omega) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0)$$

が成り立つことをいう。

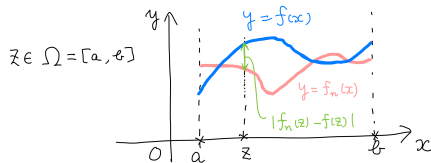
- ② $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が f に Ω で (Ω 上) **一様収束** するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

が成り立つことをいう。

3.3.1 各点収束, 一様収束の定義

- (Ω が \mathbb{R} の区間であるとき、グラフを用いた説明)



$\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)|$ (赤線で描き込んでみよう) は、 f_n と f の距離のようなもの、それが 0 に収束するということが、一様収束は自然な概念である。

- 一般に「 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が f に一様収束するならば、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に各点収束する」が成り立つ。実際、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0)$ が成り立つ。

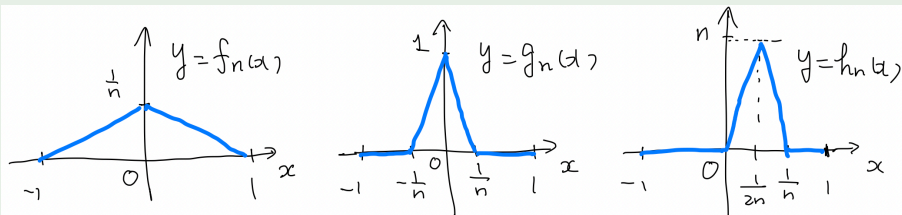
(注意 極限が共通であるので、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が一様収束するか調べるには、各点収束の極限 f を求めて、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が f に一様収束するかを調べれば良い。)

しかし、逆「各点収束するならば一様収束する」は一般には成り立たない。

3.3.2 例

例 11.13 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1, 1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次のように定める。



いずれも各点収束する。実際、任意の $x \in [-1, 1]$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) := \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0), \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x) := 0.$$

($\because \{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について証明しよう。 $-1 \leq x \leq 0$ であれば、任意の n に対して $h_n(x) = 0$ 。
 $0 < x \leq 1$ であれば、十分大きな n に対して $\frac{1}{n} < x$ であるから $h_n(x) = 0$ 。ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0$ 。この真似をして $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ が示せる。)

3.3.2 例

例 11.13 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分 続き)

一様収束するか

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}, \quad \sup_{x \in [-1,1]} |g_n(x) - g(x)| = 1, \quad \sup_{x \in [-1,1]} |h_n(x) - h(x)| = n.$$

($\because x \neq 0$ のとき、 $|g_n(x) - g(x)| = g_n(x)$. ここで $x \rightarrow 0$ とすると 1 に収束することに注意する。)

ゆえに $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は一様収束するが、 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は一様収束しない。

項別積分可能であるか

$$\int_{-1}^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = \int_{-1}^1 f(x) dx, \quad \int_{-1}^1 g_n(x) dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = \int_{-1}^1 g(x) dx,$$
$$\int_{-1}^1 h_n(x) dx = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = \int_{-1}^1 h(x) dx.$$

ゆえに $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は項別積分可能であるが、 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は項別積分可能でない。

極限は連続か $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限関数 f, h は連続であるが、 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限関数 g は連続ではない。

3.3.2 例

例 11.13 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分 続き)

表にまとめると

	収束の種類	項別積分可能か	極限関数は連続か
$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	一様収束	○	○
$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	各点収束のみ	×	○
$\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	各点収束のみ	○	×

実は、一様収束していれば、項別積分可能であり、かつ極限関数の連続性も成り立つ (後で証明する)。

各点収束だけでは、項別積分可能性や極限関数の連続性は成り立たない (上の例が反例になっている)。

- [1] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843>
でアクセスできる。この eBook まともな目次を付けてほしい。