

複素関数・同演習 第6回

～ n 乗根(残り), 複素関数の微分、正則性、Cauchy-Riemann 方程式～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022年10月5日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 複素数の定義と基本的な性質 (続き)
 - n 乗根 (続き)
 - ± 1 の n 乗根 (続き)
 - よくあるよくない解答
 - 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について
 - 余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)
 - 余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて
 - 遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く
 - \mathbb{C} の距離、複素数列の収束
- 3 複素関数とその極限、連続性、正則性
 - 複素関数の実部・虚部
 - 定義
 - 例
- 4 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の §2.4, 2.5 を解説する。
§2.4 は「～と同様」ばかりで少しユルい話である (一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。
§2.5 の **Cauchy-Riemann** 方程式はいよいよ複素関数の本論に突入。目を覚まして聴いて下さい。§2.5 は少し長めの話になります。
- 宿題 3 を出します (締め切りは **10月13日 10:50** — 変更しました)。「複素関数演習」のレポートを見て下さい。今回から翌週解説するので、**原則提出の遅延は認めません。**

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (4)

④ $n = 5$ のとき。

$z^5 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。(以下の計算に注目)

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、 $X^2 + X - 1 = 0$ で、この解は $X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 + (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 + (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = 1, \frac{-(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (5)

一方、 $z^5 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{5}}$, $e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $e^{i\frac{5\pi}{5}} = -1$, $e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $e^{i\frac{9\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

$$z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、 $X^2 - X - 1 = 0$ で、この解は $X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 - (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 - (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = -1, \frac{(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

($n = 5$ を振り返り: 代数的に解くことで $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ の \cos , \sin が求まるのは注目に値する。)

1.11.1 ± 1 の n 乗根 (6)

- $n = 6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n = 7$ のとき。

$z^7 = 1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{i\frac{8\pi}{7}}, e^{i\frac{10\pi}{7}}, e^{i\frac{12\pi}{7}}$ 。

$z^7 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\frac{7\pi}{7}} = -1, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$ 。

これらは (1, -1 を除いて)、 $\sqrt{\quad}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。

- $n = 8$ のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。 \square

1.11.2 よくあるよくない解答

この講義では、 n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 5.3 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「 $z^5 = 1$ の解を求めよ」という問に対して

$$z^5 = 1 = 1e^{i \cdot 0} = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるから

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

これは結果は正しいけれど、論理が破綻しているので(「行間を埋められますか?」と尋ねたくなる)非常に抵抗を感じて、減点したくなって来る。

1.11.3 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、 $x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

$c < 0$ のときは? $n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似(?)をして、 $\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが…)。

c が虚数のとき、 $\sqrt[n]{c}$ が、 c の n 個の n 乗根のうちどれを表すか決めるための、一般的に使える良いルールがない。だからこの講義では無理にルールは決めないことにする。後で $w = \sqrt{z}$ という関数の話をするので、そのときもう一度取り上げる。 $\sqrt[n]{c}$ を使うときは、その都度適当なルールを選ぶこと。

2次方程式の解の公式を使う場合、 $(\pm\sqrt{D})$ の形なので) どのルールでも問題ない。

1.11.3 補足 $\sqrt[3]{c}$ という記号について Cardano の公式の場合

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[3]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3次方程式 $x^3 + px + q = 0$ に対する Cardano の公式

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \Delta := -(27q^2 + 4p^3)$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p, q \in \mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta \leq 0$ の場合は、 $\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルールで解釈して問題がない(ことが分かる)。

$\Delta > 0$ の場合は、 $\sqrt{\text{負の実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{虚数}}$ が現れて、その値をどう選択するか問題となる。(1) に2つある $\sqrt[3]{\quad}$ の値は、 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\quad}} = -\frac{p}{3}$ を満たすように選ばないと、 x は3次方程式の解にならない。それを考えると、(1) はむしろ

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}}$$

と書く方がいいのかもしれない(もちろん $\sqrt[3]{\quad} = \sqrt[3]{\quad}$ とする)。

p, q が虚数の場合も、 $\sqrt[3]{\quad}$ の値の選択をきちんとすれば、(1) の x は解となる。

余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、**定木とコンパスによる正 n 角形の作図**と関係がある。Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、 n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、 $n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。つまり正 17 角形は作図可能である¹。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2]、栗原 [3] をあげておく。

フェルマー素数とは、**フェルマー数** $F_m := 2^{2^m} + 1$ のうち、素数であるもののことである。 $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ はフェルマー素数であるが、 F_5 は素数でない ($F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解出来ることを Euler (1707–1783) が発見した)。

定木とコンパスで作図可能となる n は、小さい順に $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots$ □

定規とコンパスで任意の角の二等分ができるので 2^k がつくが、任意の角の三等分は出来ないので、2 つ以上の 3 があったら出来ない。

¹ $\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \right) = 0.932472229404355 \dots$

余談2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、 30° , 45° , 60° の \sin , \cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、 36° , 72° の \sin , \cos の値も求めたことがあるかもしれない(大学入試のネタになるし、 ± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、 18° , 15° の \sin , \cos も $\sqrt{\quad}$ で表せる。加法定理を使うと、 $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の \sin , \cos も $\sqrt{\quad}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の \sin , \cos はどうだろうか?もしこれが $\sqrt{\quad}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の \sin , \cos が $\sqrt{\quad}$ で表される。

この問題は、「[角の三等分](#)」とも関係があり、(結論を天下りに述べると) 1° の \sin , \cos を $\sqrt{\quad}$ で表すことは出来ないことが知られている。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380–1429, ペルシャの数学者・[天文学者](#)) は、3次方程式 $\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$ を数値的に解くことによって ($\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ に注意)、 $\sin 1^\circ$ を求めた (カッツ [4])。

遊び(脱線)の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で3乗根を求めてみよう。 $z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは $((x + yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{}$ で表せる ($z = -i, \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$)。

ところが $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。30°の三等分は、実数の $\sqrt[3]{}$, $\sqrt{}$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

一方、これを書いているときに気づいたのだけど、今の Mathematica は、 $z^{17} = 1$ を $\sqrt{}$ で解けるようになっている (Mathematica 12 で確認)。

```
ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]  
ToRadicals[%]
```

(そのうち Mathematica が $z^{257} = 1$ を解けるようになるだろうか?)

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

前のスライドの最後の結果はごちゃごちゃしているけれど、本当に 17 等分点だろうか？

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
plotpoints[l_]:=Show[g0,ListPlot[l,PlotStyle->Directive[Red,PointSize[Large]]]
points17={Re[z],Im[z]}/.ToRadicals[ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]]
regular17gon=plotpoints[points17]
```

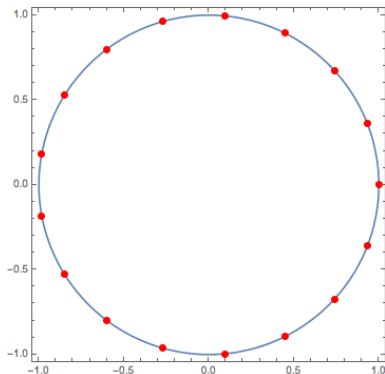


図 1: $z^{17} = 1$ の解を図示

1.12 \mathbb{C} の距離、複素数列の収束

一言でまとめると： **\mathbb{R}^2 と同じ**。複素数列の収束は \mathbb{R}^2 の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。 \mathbb{R}^2 については「知っている」ことになっているので、 \mathbb{C} についても「同様に分かる」ことにする。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) となる x, y を取って、 $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $z \in \mathbb{R}^2$ であり

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

これから、 \mathbb{C} における 2 点の距離と、 \mathbb{R}^2 における対応する 2 点の距離は等しい:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

\mathbb{C} と \mathbb{R}^2 は距離まで込めて対応している。

複素数列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$x_n := \operatorname{Re} z_n, \quad y_n := \operatorname{Im} z_n, \quad z_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと、 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{R}^2 の点列、 $z \in \mathbb{R}^2$ であり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c &\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \end{aligned}$$

2 複素関数とその極限、連続性、正則性

2.1 複素関数の実部・虚部

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

定義 6.1 (複素関数の実部・虚部)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ とする。関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f の**実部** u 、**虚部** v を

$$(2) \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega}).$$

で定める。ただし

$$(3) \quad \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}.$$

$u: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ である。(メモ: 面倒がらずに $\tilde{\Omega}$ は図を描いて説明すること。)

こうして実部・虚部に分解してしまえば、極限と連続性については、実2変数の関数のそれと同じである(数学解析を復習すると良い。桂田 [5] を見よ。)

2.1 複素関数の実部・虚部

例 6.2

① $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}$, $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

② $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$)

$$f(x + yi) = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

ゆえに

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

2.1 複素関数の実部・虚部

例 6.2 (つづき)

③ $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x + yi) = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

ゆえに

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

次回、任意の正則関数 f の実部・虚部 u, v について、Cauchy-Riemann 方程式と呼ばれる微分方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つことを証明する。上にあげた例で、この方程式が成り立つことは容易に確認できる。□

参考文献 I

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf> (2014～).
- [2] 高木貞治：近世数学史談及雑談，共立出版(1946)，1996年に「近世数学史談・数学雑談 復刻版」として復刻されている。また1995年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。
- [3] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく：正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ，数学書房 (2017/5/15).
- [4] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史，共立出版 (2005)，上野 健 璽・三浦伸夫 監訳，中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡 翻訳. 原著は、Victor J. Katz, A History of Mathematics, A: An Introduction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998).

- [5] 桂田祐史：数学解析, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年～).