

複素関数・同演習 第3回

～平方根 (続き), 複素平面, 絶対値, 共役複素数～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/>

2022年9月27日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 複素数の定義と基本的な性質
 - 平方根 (続き)
 - 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$ (念のため再収録)
 - 関数論における $\sqrt{\quad}$
 - 2次方程式
 - 共役複素数
 - 実係数多項式の根
 - 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$ との比較)
 - 余談 Hamilton の四元数
 - 複素 (数) 平面, Gauss 平面
 - 絶対値
- ③ 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 宿題 1 の解答を説明します。

(1) は、主に高校の数学 III の内容で、単なる計算ですね。

$$z_1 + z_2 = 6 - 2i, \quad z_1 - z_2 = 2 - 4i, \quad z_1 z_2 = 11 - 2i, \quad z_1/z_2 = 1 - 2i, \\ |z_1| = 5, \quad \operatorname{Re} z_1 = 4, \quad \operatorname{Im} z_1 = -3, \quad \bar{z}_1 = 4 + 3i.$$

(2) については途中は省略して、結果は $\pm \frac{\sqrt{3-i}}{\sqrt{2}}$.

- 今日は、講義ノート [1] の §1.3~1.7 の内容を講義します。
- 明日 9 月 28 日に宿題 2 を出します (Oh-o! Meiji の「複素関数演習」のレポートを見て下さい。×切 10 月 4 日 13:30)。
- (重要) 複素関数、複素関数演習は両方履修するように勧めています。もしも複素関数のみを履修する人は、宿題の提出は次のようにして下さい。水曜日の段階で

「授業 WWW サイト」

にアクセスして宿題の課題文を読みレポートを作成し、翌週の火曜 13:30 までに Meiji メールを使って、katurada あつと meiji ドット ac どつと jp までに送って下さい。

1.5 平方根 (続き) 1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

前回、複素数の平方根を定義し (拡張し)、定理 (存在、 $\sqrt{\text{正の数}}$ で表せる) を示した。
 $\sqrt{\text{複素数}}$ を導入したい。
中学校で次のことを学んだ。

- ① 0 の平方根は 0 のみ。
- ② $c > 0$ の平方根は 2 つ存在し、一方が正、もう一方はその -1 倍。
- ③ $c < 0$ の平方根は \mathbb{R} の範囲には存在しない。

((2) の証明は、 $f(x) = x^2 - c$ に中間値の定理を適用すれば良い。)

定義 $c \geq 0$ に対して、非負の平方根を \sqrt{c} と表す。

系 $c \geq 0$ の平方根は $\pm\sqrt{c}$ 。

問 1 $c_1, c_2 \geq 0$ のとき $\sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{c_1} \sqrt{c_2}$ を示せ。

注意 高校では、 $c < 0$ のとき $\sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ としたが、この講義では採用しない。

中学校で学んだ $\sqrt{\text{非負実数}}$ という記号は使い続けるが、
高校で学んだ $\sqrt{\text{負数}}$ という記号は断りなしに使わない。

問 2 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した場合、 $\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ とは限らないことを示せ。

(解答はこのスライド PDF の最後に置いておく。)

1.5.4 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

複素数 c に対して \sqrt{c} という記号を導入する。

\sqrt{c} が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

実際、色々な場合がある。

- Ⓐ \sqrt{c} で c の平方根のうち特定の1つを (何かルールを決めて) 表す。
- Ⓑ \sqrt{c} で c の平方根のうちどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない, ルールを書かない)。
- Ⓒ \sqrt{c} で c の平方根の両方を表す。

ただし、 $c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、 \sqrt{c} は (これまで通り) c の非負の平方根を表すことにする。

(本当は $\sqrt[c]{\quad}$ とか、記号を変えて区別した方が良いのかもしれないけれど、そういう面倒なことはしないのが相場になっています。)

例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}i$ かもしれないし、 $-\sqrt{3}i$ かもしれないし、 $\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。

次の2次方程式の解の公式では、 $\sqrt{\quad}$ は $\pm\sqrt{\quad}$ という形で現れるので、(1)~(3) のどの流儀を採用しても同じ内容を表すことになる。

1.5.5 2次方程式

系 3.1 (複素係数2次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

$$(1) \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2つある場合、どちらを選んでも、 z は同じものを表す)。

$D := b^2 - 4ac$ とするとき、 $D \neq 0$ なら2つ、 $D = 0$ ならば1つ (重根)。

証明 (実係数2次方程式のときと同様に、平方完成を行って移項すると)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$b^2 - 4ac$ の平方根のうちの任意の1つを $\sqrt{b^2 - 4ac}$ と表すとき、 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ の平方根は

$$\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (\because \left(\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{(\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2})$$

ゆえに $z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. 移項して z が求まる。 □

1.6 共役複素数 定義と基本的性質

$$(2) \quad z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) \bar{z} を次式で定める。

$$(3) \quad \bar{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

$$(4) \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

$$(5) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

(3つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4つ目は3つ目を利用する。)

$$(6) \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{すなわち} \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

ゆえに「 x, y で表せるものは、 z, \bar{z} で表せる」。

$$(7) \quad z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

1.6 共役複素数 実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1 + 2i$ が $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) の解ならば、 $1 - 2i$ も解である。
- $1 + 2i$ が $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) の解ならば、 $1 - 2i$ も解である。

定理 3.2 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して $f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ と置く。
 $c \in \mathbb{C}$ が $f(c) = 0$ を満たすならば、 $f(\bar{c}) = 0$ 。

証明

$$\begin{aligned}\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n} \\ &= \overline{a_0z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \dots + \overline{a_{n-1}z} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0}(\bar{z})^n + \overline{a_{n-1}}(\bar{z})^{n-1} + \dots + \overline{a_{n-1}}\bar{z} + \overline{a_n} \\ &= a_0(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \dots + a_{n-1}\bar{z} + a_n \\ &= f(\bar{z})\end{aligned}$$

が成り立つので

$$f(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f(c)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\bar{c}) = 0. \quad \square$$

1.3 順序その他 (他の体 \mathbb{Q} , \mathbb{R} , ... との比較)

\mathbb{C} は**順序体**ではない。

その代わり (?) 大きなアドバンテージがある: **代数的閉体** (1 次以上の任意の代数方程式がその中に根を持つ \therefore **代数学の基本定理**が成立)。

\mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} について。

- \mathbb{Q} は可換体かつ順序体だが完備ではない。
- \mathbb{R} は可換体かつ順序体かつ完備であるが、代数的閉体ではない (2 次方程式の解すら存在しないこともある)。注: 完備性は解析学にとっては非常に有効
- \mathbb{C} は可換体かつ完備かつ代数的閉体であるが、順序体ではない。

(参考) Hamilton の四元数体 \mathbb{H} は、体ではあるが可換性は成り立たない。順序体でもない。

1.3.1 余談 Hamilton の四元数

(このスライドの内容は「時間があれば話そう」と思っていたのですが、2022年度の講義では省略しました。)

Hamilton (1805–1865) は三元数を探して成功しなかったが、^{しげんすう}四元数 (quaternion) を発見した。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

(これから $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ が導かれる。)

\mathbb{H} は実は非可換体である。四元数体 (the skew field of Hamilton quaternions) と呼ばれる。

多項式の割り算がこれまでのようには出来ず、因数定理も成り立たない。 $z^2 = -1$ の解が $\pm i$ 以外にも存在する。

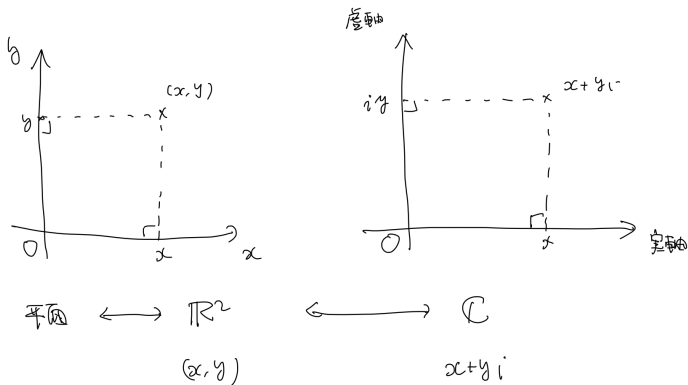
四元数については、例えば堀 [2], 今野 [3] を見よ。

最近は結構応用されている (今野 [3])。

1.4 複素(数)平面, Gauss 平面

2つ並べて図を描く。

\mathbb{C} は拡張 \mathbb{R}^2 だから、本質的には座標平面の話と同じ。「実軸」, 「虚軸」



1.5 絶対値

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

$$(8) \quad |z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する \mathbb{R}^2 の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。複素平面で、点 z と原点との距離を意味する。

$$(9) \quad |-z| = |z|, \quad |\bar{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみる}),$$

さらに

$$(10) \quad z\bar{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

ゆえに $z \neq 0$ ならば

$$(11) \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

1.5 絶対値

定理 3.3 (絶対値の性質)

- ① $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
- ② $|z + w| \leq |z| + |w|$ (三角不等式)
- ③ $|zw| = |z| |w|$. (系として、 $w \neq 0$ のとき $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$)
- ④ $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

証明

- ① \mathbb{R}^2 のノルムについての「 $\|\mathbf{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 」と同じ。
- ② \mathbb{R}^2 のノルムについての「 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ 」と同じ。
- ③ $z = a + bi$, $w = c + di$ において、左辺&右辺を計算して比較するか、 $|zw|^2 = zw\overline{z\overline{w}} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$ の $\sqrt{\quad}$ を取る。
- ④ $|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$ であるから $|z| - |w| \leq |z - w|$.
 z と w を入れ替えて $|w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|$.
まとめると $||z| - |w|| = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \leq |z - w|$.
(任意の実数 x について、 $|x| = \max\{x, -x\}$ であることを用いた。)

□

問

- ① 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ であることを示せ。
- ② 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した場合、 $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ とは限らないことを示せ。

解答

- ① $(\sqrt{c_1}\sqrt{c_2})^2 = (\sqrt{c_1})^2 (\sqrt{c_2})^2 = c_1c_2$. すなわち $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}$ は、 c_1c_2 の (1つの) 平方根である。

また $\sqrt{c_1} \geq 0, \sqrt{c_2} \geq 0$ であるから、 $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \geq 0$.

ゆえに (非負の平方根であるから) $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$.

- ② $c_1 = -1, c_2 = -1$ とするとき

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = i \cdot i = -1, \quad \sqrt{c_1c_2} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

であるから $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \neq \sqrt{c_1c_2}$. □

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2022/complex2022.pdf> (2014～).
- [2] 堀源一郎：ハミルトンと四元数 人・数の体系・応用，海鳴社 (2007).
- [3] 今野紀雄：四元数，森北出版 (2016/12/1).