関数論 2 の小テストについて

2012 年 1 月 10 日, 2012 年 1 月 16 日修正

小テストの解答については授業で解説しているが、そのノートを WWW (`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/`) で公開する。ただしノートは授業のための下書きであって、ミス・誤植が残っている可能性がある (なるべく直すつもりだけど)。

関数論 1 の内容は当然要求されている。

(a) 有理関数、指数関数 exp、三角関数 cos, sin、対数関数 Log、べき乗 a^b をしっかり扱える必要がある。知っていると甘く見てはいけない (複素関数なので高校数学ではない)、恐れてもいけない (部分分数分解と等比級数の和の公式と、$\exp(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$, $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $r>0$ と $\theta\in\mathbf{R}$ に対して $\log re^{i\theta}=\log r+i(\theta+2n\pi)$ $(n\in\mathbf{Z})$, $a\neq 0$ と $b\in\mathbf{C}$ に対して、$a^b=\exp(b\log a)$ 程度を覚えておけば良い)。

(b) $z^n=1$, $z^n=-1$, $\exp z=1$, $\exp z=-1$, $\sin z=0$ などの方程式はすらすら解けること。

関数論 2 のここまでの授業でキーワードをただ一つ選ぶと「留数定理」である。そのことが理解出来ていなければいけない。(Laurent 展開というのも良く出て来たが、細かいことに目をつむって断定すると、それは留数を定義したり、留数定理を証明するために導入されたようなものだ。) 留数定理とその基本的な応用が身につくことを第一に考えてほしい。それが出来ていないと単位を取得するのは難しい。

- 問 1 は関数論 1 の範囲の復習。方程式 $z^n=-1$ や、やさしい複素線積分 (原始関数を用いる、定義から計算できる)
- 問 2 も関数論 1 の範囲の復習。複素線積分で、Cauchy の積分定理、積分路変形の原理あるいは Cauchy の積分公式を用いると解ける問題 (単純な計算問題ではない)。
- 問 3 は有理関数の Taylor 展開 (等比級数の和の公式を用いる)。
- 問 4 も実は関数論 1 の範囲の復習で、exp, 三角関数の簡単な方程式。
- 問 5 は有理関数の Laurent 展開 (等比級数の和の公式を用いる)。
- 問 6 は exp のからむ lim (∞ は exp の真性特異点なので、案外と複雑な挙動を示す。)
- 問 7 は極の位数の判定と留数を求める計算 (有理関数については公式)。非常に重要。$f=\dfrac{Q}{P}$ の孤立特異点 c について、f の極としての位数と分母 P の 0 点としての位数は、$Q(c)\neq 0$ ならば一致するが、$Q(c)=0$ ならば一致しないので、f の極 c の位数を求めるには、分子 $Q(c)$ のチェックが必要不可欠である。留数を求める場合は、高々何位の極か分かれば十分である場合が多いので、$Q(c)$ のチェックが不要なこともある。

  答合わせ用の結果: (1) $\pm i$ は 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;i)=\mathrm{Res}(f;-i)=\dfrac{1}{2}$. (2) $a=0$ のとき、0 は 4 位の極で、$\mathrm{Res}(f;0)=0$. $a=\pm i$ のとき、1 は 2 位の極で $\mathrm{Res}(f;1)=-\frac{1}{4}$, -1 は

1 位の極で $\mathrm{Res}(f;-1)=\dfrac{1}{4}$. $a\neq 0,\pm i$ のとき、$\pm ai$ は 2 位の極で、$\mathrm{Res}(f;ai)=-\dfrac{i}{4a^3}$, $\mathrm{Res}(f;-ai)=\dfrac{i}{4a^3}$. (3) 0 は 2 位の極で $\mathrm{Res}(f;0)=0$. $n\pi$ $(n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\})$ は 1 位の極で $\mathrm{Res}(f;n\pi)=\dfrac{(-1)^n}{n\pi}$.

- 問 8 は留数を用いた定積分の計算

  答合わせ用の結果: (1) $\dfrac{2\pi}{3}$ (2) $\dfrac{3\pi}{16}$.
  $z^6=-1$ の解は $z=c=e^{\frac{\pi}{6}i}$, $e^{\frac{3\pi}{6}i}$, $e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $e^{\frac{9\pi}{6}i}$, $e^{\frac{11\pi}{6}i}$. このうち $\operatorname{Im}c>0$ を満たすものは $e^{\frac{\pi}{6}i}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $e^{\frac{3\pi}{6}i}=i$, $e^{\frac{5\pi}{6}i}=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$.
  それはさておき、使った定理がきちんと書けること、その証明も出来るようにしておくこと (少しハード目だが)。

- 問 9 は留数を用いた定積分の計算

  (1) $\dfrac{\pi}{2e}$ (2) $\dfrac{2\pi}{3}$ (3) $\dfrac{\pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
  ちなみに
  $$\int_0^\infty\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx$$
  は問題ないが、
  $$\int_0^\infty\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx\neq\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx$$
  であるから、
  $$\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^2+1}\,dx=\operatorname{Re}\int_0^\infty\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx$$
  と書くのはは微妙 (実は正しいけれど説明が難しい)。

  次の定理を使うことになると思う (問 8 とは違う定理である！)。

  $a>0$, $P(z),Q(z)\in\mathbf{C}[z]$, $\deg P(z)\geq\deg Q(z)+1$, $\forall x\in\mathbf{R}$ $P(x)\neq 0$ ならば、
  $$\int_{-\infty}^\infty\frac{Q(x)}{P(x)}e^{iax}\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)}e^{iaz};c\right).$$

  a, $P(z)$, $Q(z)$ をどう選ぶか明記することが大事。

- 問 10 は無限遠点 ∞

- $\sqrt{a^2} = a$ でない、言えるのは $\pm\sqrt{a^2} = \pm a$ (適当に符号を選ぶ) くらい、ということは多くの人が分かっていると信じたいが (ちなみに複素数の世界では $\sqrt{a^2} = |a|$ でもない、念のため)、どうも $\sqrt{-a^2} = ia$ と勘違いしている節がある。複素数 a に対しては、$\sqrt{a}$ はただ一つに定まらないので、そういう式はありえない ($\sqrt{-1^2} = i$ も $\sqrt{-(-1)^2} = -i$ もおかしい)。$\pm\sqrt{-a^2} = \pm ia$ (適当に符号を選ぶ) は正しい。

- 極と零点を勘違いしている人がちらほら。

  - c が f の零点 $\Leftrightarrow f(x) = 0$
  - c が f の極 $\Leftrightarrow$ (c が f の孤立特異点で) $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$.

  多分、「P と Q が c の近傍で正則、$f = \frac{Q}{P}$ で $Q(c) \neq 0$ のとき、c が f の極 $\Leftrightarrow$ c が P の零点」という定理がその勘違いの出所だと思うが、「c は◯の零点、c は□の極」の◯は P, □は f で、対象が違っている。

関数論 2 小テスト No. 1　(2011 年 9 月 27 日, 10 月 4 日提出予定)

__ 年 16 組 ____ 番　氏名 ______________　　　　明日 9 月 28 日はお休みです。

問 1

(1) $z^4 = -1$ を解け。

(2) C: $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi/2])$ とするとき、$\displaystyle\int_C z^2\, dz$ を求めよ。

(3) $r > 0$, $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n}$ を求めよ (n で場合分けが必要)。

(4) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z}$ と $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z}$ を求めよ。

- $z^n = c$ を解くのは苦手などと言ってはいけない。
- 本当は冪乗 e^z の形でなく、$\exp z$ と書くべきなのだが…
- $|z-a| = r$ は $z = a + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ というパラメーター曲線だとみなすこと。
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. 原点中心、半径 1 の円周 (単位円) $|z| = 1$ と、x 軸の正方向と角 θ をなす半直線との交点。
  θ が高校数学で良く現れる角度のとき、具体的な値が求まる。
  $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{2ni\pi} = 1$ $(n \in \mathbf{Z})$ などなど
- $(e^z)^n = e^{nz}$, $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.
- $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して、$\displaystyle\int e^{a\theta} d\theta = \frac{e^{a\theta}}{a} + C$ (C は積分定数).

解答 (2011/10/4)

(1) 与えられた $c \in \mathbf{C}$ に対して、 $z^n = c$ を解く必要が生じることがある。$c = 0$ の場合は $z = 0$ で簡単だから $c \neq 0$ とすると、$c = \rho e^{i\varphi}$ $(\rho > 0,\ \varphi \in \mathbf{R})$ となる $\rho,\ \varphi$ が取れる。$z = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbf{R})$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
z^n = c &\iff r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi} \\
&\iff r^n = \rho \quad \text{and} \quad e^{in\theta} = e^{i\varphi} \\
&\iff r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{and} \quad e^{i(n\theta - \varphi)} = 1 \\
&\iff r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{and} \quad \exists m \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad n\theta - \varphi = 2m\pi \\
&\iff r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{and} \quad \exists m \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad \theta = \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \\
&\iff \exists m \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right).
\end{aligned}
$$

最後の式は m について周期 n であるので、連続する n 個取ればすべてのものをつくす。ゆえに

$$
z = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\varphi + 2r\pi}{n}\right) \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1).
$$

…というような公式を丸暗記してもしようがない。n 乗すると、原点からの距離は n 乗、偏角は n 倍になるので、n 乗して $\rho e^{i\varphi}$ になる数として、$\sqrt[n]{\rho} \exp \dfrac{i\varphi}{n}$ がぱっと浮かぶようになって、後は円周上に n 個、円周を n 等分するように並ぶ ($e^{\frac{2\pi i}{n}}$ をかけていくと全部求まる)、と覚えるのがお勧め。(値より先に図が浮かんで来るのが望ましい。) $-1 = e^{\pi i}$ だから、一つの 4 乗根として、$z = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 後は i をかけて

$$
z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.
$$

あるいは偏角が $\dfrac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ずつ増えて、$e^{\pi i/4}$, $e^{3\pi i/4}$, $e^{5\pi i/4}$, $e^{7\pi i/4}$.

(2) $z = e^{i\theta}$ より $dz = ie^{i\theta}\, d\theta$ であるから、

$$
\int_C z^2\, dz = \int_0^{\pi/2} \left(e^{i\theta}\right)^2 \cdot ie^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{\pi/2} e^{3i\theta}\, d\theta = i \left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\left(e^{3\pi i/2} - e^0\right)}{3} = \frac{-i-1}{3}.
$$

(別解) $\dfrac{z^3}{3}$ が z^2 の原始関数であることに気がつくと、

$$
\int_C z^2\, dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{e^{i0}}^{e^{i\cdot\pi/2}} = \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^i = \frac{i^3 - 1^3}{3} = \frac{-i-1}{3}.
$$

(3) $|z - a| = r$ のパラメーターづけとして、

$$
\varphi(\theta) := a + re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, 2\pi])
$$

が取れる。$\varphi'(\theta) = ire^{i\theta}$ であるから、

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+re^{i\theta}-a)^n} \cdot rie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{in\theta}} \cdot rie^{i\theta} d\theta = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta.$$

$n \neq 1$ のとき

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (e^{i(1-n)\theta} \text{ は } 2\pi \text{ を周期としているから}).$$

(別解) $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-n} \cdot \dfrac{1}{(z-a)^{n-1}} \right) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$. つまり原始関数が存在するので、閉曲線上の線積分は (始点 = 終点なので) 0.

$n = 1$ のとき

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\theta = i \cdot 2\pi = 2\pi i.$$

(注意) $\dfrac{1}{z-a}$ は $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ では原始関数を持たない！少し工夫をすれば、次のシナリオで計算できる。簡単のため、平行移動して $a = 0$ とする。$\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ が目標。$\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$ では、$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$ が $\dfrac{1}{z}$ の原始関数である。これを使って極限操作すると、$\log r + i\pi - (\log r + i(-\pi)) = 2\pi i$ になることが導ける。

関数論 2 小テスト No. 2 (2011 年 10 月　日出題, 10 月　日授業開始時提出)

__年16組____番　氏名______________　(http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/)

問 2　(1) $\displaystyle\int_{|z-2|=1}\frac{dz}{z}$ と $\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{dz}{z}$ を求めよ。

解答

(1) (a) ($|z-2|=1$ は、2 を中心とする半径 1 の円周であり、$\dfrac{1}{z}$ が正則でない点 0 はその円の外部にあることに注意する[1]。)

$\mathscr{D}:=\{z\in\mathbf{C};|z-2|<1\}$ は $\mathbf{C}$ の領域で、単純閉曲線 $|z-2|=1$ で囲まれている。$\overline{\mathscr{D}}$ を含む領域 $\Omega:=\{z\in\mathbf{C};|z-2|<2\}$ で $f(z):=\dfrac{1}{z}$ は正則である (0 は Ω に含まれないことに注意)。ゆえに Cauchy の積分定理 (教科書の定理 3.20) から

$$\int_{|z-2|=1}\frac{dz}{z}=\int_{\partial\mathscr{D}}f(z)\,dz=0.$$

(b) ($|z-1|=2$ は、1 を中心とする半径 2 の円周であり、$\dfrac{1}{z}$ が正則でない点 0 をその円の内部に含んでいることに注意する。今度は Cauchy の積分定理で 0、とはならない。かといって、定義に基づいて線積分を計算するのは大変である[2] は困る。)

(解答 1) 積分路変形の原理から、

$$\int_{|z-1|=2}\frac{dz}{z}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}.$$

上の (3) の結果から右辺は $2\pi i$ である。— もう少しゆっくりやると、曲線 $|z-1|=2$ を C_1, 曲線 $|z|=1$ を C_2 とする。領域 $\mathscr{D}:=\{z\in\mathbf{C};|z|>1\quad\text{かつ}\quad|z-1|<2\}$ は、閉曲線 C_1-C_2 で囲まれている ($\partial\mathscr{D}=C_1-C_2$ であり、C_1-C_2 は正の向きである)。$f(z)=1/z$ は、$\overline{\mathscr{D}}$ を含む開集合 $\Omega:=\mathbf{C}\setminus\{0\}$ で正則である。ゆえに Cauchy の積分定理から、

$$0=\int_{\partial\mathscr{D}}\frac{dz}{z}=\int_{C_1-C_2}\frac{dz}{z}=\int_{C_1}\frac{dz}{z}-\int_{C_2}\frac{dz}{z}.$$

ゆえに

$$\int_{|z-1|=2}\frac{dz}{z}=\int_{C_1}\frac{dz}{z}=\int_{C_2}\frac{dz}{z}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}. \tag{1}$$

つまり積分路が C_1 から C_2 に変形できた、ということである。(3) の結果から、この値は $2\pi i$ である。

(解答 2) Cauchy の積分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\quad(z\in D(c;R))$$

において、$f(\zeta)\equiv1$ (定数関数), $c=1$, $R=2$, $z=0$ とすると、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-1|=2}\frac{1}{\zeta-0}\,d\zeta=f(0)=1.$$

[1]「図を描く」というヒントは一体何の図を描くのかと質問されましたが、曲線の像 (形) と、被積分関数の正則でない点 (特異点) を描きます。両者の位置関係を確認するのが目的です。

[2]これは、実際にやってみて、無理っぽさを見てもらうのが良い。$\displaystyle\int_{|z-2|=1}\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{2+e^{i\theta}}d\theta$

分母を払って ζ を z と書き換えると、

$$\int_{|z-1|=2} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i. \blacksquare$$

(2) (省略)

関数論 2 小テスト No. 3　(2011 年 10 月 12 日出題, 10 月 18 日授業開始時提出)

__年16組____番　氏名______________　(`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/`)

問 3　(1) 次の各関数を 0 のまわりでテーラー展開 (冪級数展開) し、収束半径を求めよ。

(a) $\dfrac{1}{z+4}$　(b) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$　(c) $\dfrac{1}{z^2+1}$　(d) $\mathrm{Tan}^{-1} z$　(e) $\dfrac{z^3-3z^2-z+5}{z^2-5z+6}$

((b),(d) は微分積分を考えてみる。(e) は部分分数分解すると簡単になる。)

(2) $\dfrac{1}{z+3}$ を 1 のまわりでテーラー展開し、収束半径を求めよ。

解答　(1) (なるべくゆっくりと式変形する。目標は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の形にする (a_n を求める) ことである。)

(a) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ $|$ 公比 $|$ $< 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$ であるから、収束半径は 4.

(b) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i+z} = \frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{1+iz} = i\cdot\frac{1}{1-(iz)} = i\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} z^n$$

である。収束 $\Leftrightarrow$ $|$ 公比 $|$ $< 1 \Leftrightarrow |-iz| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1. これから、

$$\frac{1}{(z-i)^2} = -\left(\frac{1}{z-i}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} i^{n+1} n z^{n-1}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m i^{m+2}(m+1)z^m = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+2}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} i^n (n+1) z^n.$$

収束半径は項別微分しても変わらないので、1.

(c) 等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

a_n を

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k\ (k = 0, 1, \dots)) \end{cases}$$

で定めると、

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ $|$ 公比 $|$ $< 1 \Leftrightarrow |-z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ であるから、収束半径は 1.

(d) $\left(\mathrm{Tan}^{-1} z\right)' = \frac{1}{z^2+1}$ である。特に $\mathrm{Tan}^{-1} z$ は 0 の近傍で正則であるから、$z = 0$ のまわりで Taylor 展開できる:

$$\mathrm{Tan}^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (|z| < \exists r).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}z^n = \left(\mathrm{Tan}^{-1}z\right)' = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

ただし a_n は (c) で出て来たものである。ゆえに

$$(n+1)b_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ (-1)^k & (n = 2k\ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \dfrac{(-1)^k}{2k+1} & (n = 2k+1\ (k = 0, 1, \dots)). \end{cases}$$

(e) $f(z) := \dfrac{z^3 - 3z^2 - z + 5}{z^2 - 5z - 6}$ とおく。$f(z)$ の分子 $z^3 - 3z^2 - z + 5$ を分母 $z^2 - 5z - 6$ で割ると、商 $z + 2$, 余り $3z - 7$ であるから、

$$f(z) = z + 2 + \frac{3z - 7}{z^2 - 5z - 6}.$$

右辺第 3 項の分母は $z^2 - 5z - 6 = (z-2)(z-3)$ と因数分解できるので、

$$\frac{3z - 7}{z^2 - 5z - 6} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

を満たす定数 A, B が存在する。これから $A = 1$, $B = 2$. ゆえに

$$f(z) = z + 2 + \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

$z + 2$ の Taylor 展開はそれ自身である。

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2).$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 3).$$

$f(z)$ の $z = 0$ のまわりの Taylor 展開の収束半径は、0 と $\{2, 3\}$ との距離 2 である。そして、

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^2} - 2 \cdot \frac{1}{3^2}\right) z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n \\ &= \frac{5}{6} + \frac{19}{36} z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n. \end{aligned}$$

(授業中に $\dfrac{19}{36}$ を $\dfrac{25}{36}$ と書いてしまった。)

(2) 目標は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ の形に表すことである。

等比級数の和の公式を用いて、

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.$$

収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{z-1}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 4$ であるから、収束半径は 4.

関数論 2 小テスト No. 4　(2011 年 10 月 19 日出題, 10 月 25 日授業開始時提出)

__年16組____番　氏名______________　(http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/)

問 4　以下の方程式を ($\mathbf{C}$ 内で) 解け ((1)–(3) は解を答えるのは難しくないが、それだけしかないことをきちんと示せ)。

(1) $\exp z = 1$　(2) $\exp z = -1$　(3) $\sin z = 0$　(4) $\sin z = 2$

ヒント: (1) $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ を用いて、実関数 e^x, $\cos y$, $\sin y$ の話に持ち込む (高校生が知っていることは使ってよい)。(2) は (1) を用いる。(3) はノーヒント。

解答

(1) z の実部と虚部をそれぞれ x, y と表す。$\exp z = \exp(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$ で、$|\exp z| = e^x$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
\exp z = 1 &\Leftrightarrow e^x(\cos y + i\sin y) = 1\\
&\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{and} \quad \cos y + i\sin y = 1\\
&\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{and} \quad \cos y = 1 \quad \text{and} \quad \sin y = 0\\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{and} \quad \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad y = 2n\pi\\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = 2n\pi i.
\end{aligned}$$

(2) $\exp \pi i = -1$ であるから、

$$\begin{aligned}
\exp z = -1 &\Leftrightarrow \exp z \exp \pi i = 1\\
&\Leftrightarrow \exp(z + \pi i) = 1\\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z + \pi i = 2n\pi i\\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = (2n-1)\pi i.
\end{aligned}$$

(3) $\sin z = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\sin z = 0 &\Leftrightarrow \exp(iz) - \exp(-iz) = 0\\
&\Leftrightarrow \exp(2iz) = 1\\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad 2iz = 2n\pi i\\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = n\pi.
\end{aligned}$$

(あるいは $w := \exp(iz)$ について $w - \frac{1}{w} = 0$ から、$w^2 - 1 = 0$. これから $w = 1$ または $w = -1$. 前者から $z = 2n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$, 後者から $z = (2m-1)\pi$ $(m \in \mathbf{Z})$. まとめて $z = n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$.)

(4) $\sin z = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ であるから、途中で $w := \exp(iz)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\sin z = 2 &\Leftrightarrow \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = 2\\
&\Leftrightarrow \exp(iz) - \exp(-iz) = 4i\\
&\Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 4i\\
&\Leftrightarrow w^2 - 4iw - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow w = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 - (-1)} = (2 \pm \sqrt{3})i = (2 \pm \sqrt{3})e^{\pi i/2}.
\end{aligned}$$

ただし、$a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ とするとき、

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が成り立つことを用いた。

$r > 0, \theta \in \mathbf{R}$ とするとき、

$$\exp z = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

であることを使うと、

$$\begin{aligned}\sin z = 2 &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad iz = \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - i\log\left(2 \pm \sqrt{3}\right). \blacksquare\end{aligned}$$

関数論 2 小テスト No. 5　(2011 年 10 月 25 日出題, 11 月 1 日授業開始時提出)

__年16組____番　氏名______________　(http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/)

問 5　(1) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)}$ について、以下のものを求めよ。
(a) 0 のまわりの Laurent 展開　(b) 3 のまわりの Laurent 展開　(c) $3<|z|<\infty$ における Laurent 展開
(2) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z+2)}$ について、以下のものを求めよ。
(a) $|z|<1$ における Taylor 展開　(b) $1<|z|<2$ における Laurent 展開　(c) $2<|z|<\infty$ における Laurent 展開

とにかく！ f の $R_1 < |z-c| < R_2$ における Laurent 展開というのは、

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \qquad (R_1 < |z-c| < R_2)$$

という形の式のこと。一意性があるので、この形の式 $(*)$ に持って行けば (ちゃんと収束して、等号が成り立つことの確認はもちろん必要) OK. 具体的な解き方は**一通りではない**。ひょっとすると、それを理解することが一番大事かもしれない (計算テクニックはくだらないと言ってしまったら身も蓋もないけれど、それを覚えることが大事だと強調するつもりはない)。

(1) 「点 c のまわりの」「点 c における」は、$R_1 = 0$, つまり $0 < |z-c| < R_2$ ということ。
(a) は適当な $R > 0$, $\{a_n\}$ について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \quad (0 < |z| < R)$$

の形にする。(b) では適当な $R > 0$, $\{a_n\}$ について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-3)^n} \quad (0 < |z-3| < R)$$

の形にする。(c) では適当な $R > 0$, $\{a_n\}$ について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \quad (R < |z| < \infty)$$

(2) (a) では、適当な $\{a_n\}$ について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1)$$

の形にする。(b) では、適当な $\{a_n\}$ について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \quad (1 < |z| < 2)$$

の形にする。(c) では、適当な $\{a_n\}$ について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} \quad (2 < |z| < \infty)$$

の形にする。

解答　(1) まず $f(z)$ を部分分数分解すると、

$$f(z)=\frac{1}{z(z-3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z}\right).$$

ここで右辺第 1 項の $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}$ は、$0<|z|<\infty$ における (ゆえに $0<|z|<3$ においても、$3<|z|<\infty$ においても) 自分自身の Laurent 展開である ($(z-c)^n=(z-0)^n=z^n$ の和の形だから — たったの 1 項だけれど)。

(a) $|z|<3$ のとき、$|z/3|<1$ であるから、

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z/3}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\quad(|z|<3).$$

ゆえに、f の 0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z)=\frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\frac{1}{z}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}\quad(0<|z|<3).$$

(別解) $f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^{n+1}}=-\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}.$

$$f(z)=-\frac{1}{3z}-\frac{1}{9}-\frac{z}{27}-\frac{z^2}{81}-\cdots\quad(0<|z|<3).$$

(b) $\frac{1}{z-3}$ の 3 のまわりの Laurent 展開は、自分自身 $\frac{1}{z-3}$ $(0<|z-3|<\infty)$. 一方、

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-3)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^n.$$

これが収束するためには、$\left|-\frac{z-3}{3}\right|<1$, すなわち $|z-3|<3$ であることが必要十分である。ゆえに

$$f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}(z-3)^n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-3}\quad(0<|z-3|<3).$$

(別解) $f(z)=\frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^{n-1}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}(z-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}(z-3)^n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-3}.$

$$f(z)=\frac{1}{3(z-3)}-\frac{1}{9}+\frac{z-3}{27}-\frac{(z-3)^2}{81}+\cdots\quad(0<|z-3|<3).$$

(c) $|z| > 3$ のとき、$|3/z| < 1$ であるから、

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z(1-3/z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} \quad (3 < |z| < \infty).$$

ゆえに $3 < |z| < \infty$ での Laurent 展開は、

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{z^n} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{z^n} \quad (3 < |z| < \infty).$$

(別解) $f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{z^n} \ (3 < |z| < \infty).$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{9}{z^4} + \cdots \quad (3 < |z| < \infty).$$

(2) これは、小松・辻 (編), 大学演習函数論, 裳華房、という演習書から拝借した問題です。まず部分分数分解しよう。実係数の範囲までだったら、

$$\frac{1}{(z^2+1)(z+2)} = \frac{az+b}{z^2+1} + \frac{c}{z+2}$$

とおいて、分母を払って…

$$\frac{1}{(z^2+1)(z+2)} = \frac{1}{5}\left(-\frac{z-2}{z^2+1} + \frac{1}{z+2}\right).$$

ちなみに複素数係数の範囲までだったら、

$$\frac{1}{(z^2+1)(z+2)} = \frac{2i-1}{10}\cdot\frac{1}{z+i} - \frac{2i+1}{10}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+2} \quad \text{(検算済み)}.$$

(a) $|z| < 1$ のとき、$|-z^2| < 1$, $|z/2| < 1$ であるから、

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{1-(-z^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-z/2)}\right] = \frac{1}{5}\left[-(z-2)\sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}2(-1)^k z^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right] \\
&= \frac{1}{5}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^{k+1} - \frac{1}{2^{2k+2}}\right]z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k 2 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right]z^{2k}\right\} \\
&= \frac{1}{5}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^{k+1} - \frac{1}{4^{k+1}}\right]z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^k}\right]z^{2k}\right\} \quad (|z| < 1)
\end{aligned}$$

となる[3]。初めの数項を表示すると

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{5}\left[\left(2+\frac{1}{2}\right) + \left(-1-\frac{1}{4}\right)z + \left(-2+\frac{1}{8}\right)z^2 + \left(1-\frac{1}{16}\right)z^3 + \left(2+\frac{1}{32}\right)z^4 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}z^2 + \frac{3}{16}z^3 + \frac{13}{32}z^4 - \frac{13}{64}z^5 - \cdots
\end{aligned}$$

[3] 一応検算済み。

(b) $1<|z|<2$ のとき、$|-1/z^2|<1,\ |-z/2|<1$ であるから、

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2(1+1/z^2)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-z/2)}\right]=\frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^k+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n\right]\\
&= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right]=\frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2}{z^{2k+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right]\\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2}{z^{2k}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right]\quad (1<|z|<2)
\end{aligned}$$

となる[4]。

(c) $2<|z|<\infty$ のとき、$|-1/z^2|<1,\ |2/z|<1$ であるから、

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2(1+1/z^2)}+\frac{1}{z(1+2/z)}\right]=\frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^k+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n\right]\\
&= \frac{1}{5}\left[-(z-2)\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+2}}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^n}\right]\\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2}{z^{2k+2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{z^n}\right]\\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+2^{2k}}{z^{2k+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2-2^{2k-1}}{z^{2k}}\right]\quad (2<|z|<\infty).
\end{aligned}$$

以下、複素係数の範囲までの部分分数分解

$$f(z)=\frac{2i-1}{10}\cdot\frac{1}{z+i}-\frac{2i+1}{10}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+2}$$

に基づいた展開を示す。

$|z|<1$ のとき、

$$f(z)=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2-i)i^{-n}+(2+i)i^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]z^n.$$

$1<|z|<2$ のとき、

$$f(z)=\frac{1}{10}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)i^n+(2+i)i^{-n}}{z^n}\right).$$

$2<|z|<\infty$ のとき、

$$f(z)=-\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+(2-i)i^n+(2+i)i^{-n}}{z^n}.$$

(案外すっきりしている。)

[4] これも検算済み。

$|z| < 1$ では、

$$f(z) = \frac{1}{10}\left\{5 - \frac{5z}{2} - \frac{15z^2}{4} + \frac{15z^3}{8} + \frac{65z^4}{16} - \frac{65z^5}{32} - \frac{255z^6}{64} + \frac{255z^7}{128} + \frac{1025z^8}{256} - \frac{1025z^9}{512} - \frac{4095z^{10}}{1024} - \cdots\right.$$

$1 < |z| < 2$ では、

$$f(z) = \frac{1}{10}\left[\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{16} - \cdots\right) - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{4}{z^4} - \frac{2}{z^5} + \frac{4}{z^6} + \frac{2}{z^7} - \frac{4}{z^8} - \frac{2}{z^9} + \frac{4}{z^{10}} + \cdots\right]$$

$2 < |z| < \infty$ では、

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \frac{3}{z^5} - \frac{6}{z^6} + \frac{13}{z^7} - \frac{26}{z^8} + \frac{51}{z^9} - \frac{102}{z^{10}} + \cdots .$$

関数論2 小テスト No. 6　(2011 年 11 月 9 日出題, 11 月 15 日授業開始時提出)

__年16組____番　氏名______________　(http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/)

問 6　以下の (1), (2), (3) を証明せよ (Casorati-Weierstrass の定理を使わずに証明せよ)。

(1) $\forall a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z \in A(0; 0, \varepsilon)$ s.t. $\exp \dfrac{1}{z} = a$.　(注: $z \in A(0; 0, \varepsilon) \Leftrightarrow 0 < |z| < \varepsilon$)

(2) $\exists \{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ s.t. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} z_n = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \exp \frac{1}{z_n} = 0$.

(3) $\exists \{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ s.t. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} z_n = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \exp \frac{1}{z_n} = \infty$.

おまけの問　f が $D(a;R)$ で正則とするとき、

$$g(z) := \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad (0 < |z - a| < R)$$

とおくと、a は g の除去可能特異点であることを示せ。

(問 6 のヒント: (1) は $a = re^{i\theta}$ とするとき、z を r, θ で具体的に表せ。(2) と (3) は具体的に $\{z_n\}$ の例が与えられる。$w_n = 1/z_n$ とおくと分かりやすいかも。)

復習　実数の世界では、$e^x = c$ を満たす x は一意的である。実際、

$$\forall c \in (0,\infty) \quad \exists! x \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad e^x = c.$$

複素数の世界では、

$$\forall c \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \quad \exists z \in \mathbf{C} \quad \text{s.t.} \quad \exp z = c$$

が成り立つが、与えられた c に対して、$\exp z = c$ を満たす z は一意的ではない。実際、

$$c = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\exp z = c &\iff e^x e^{iy} = re^{i\theta} \\
&\iff e^x = r \quad \text{and} \quad e^{iy} = e^{i\theta} \quad (\Longrightarrow \text{は両辺の絶対値を取る}) \\
&\iff x = \log r \quad \text{and} \quad \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad y - \theta = 2n\pi i \\
&\iff \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \log r + i(\theta + 2n\pi)
\end{aligned}$$

であるから、次の「公式」が得られる。

丸暗記は危険かな ???

$$(\sharp) \qquad \log re^{i\theta} = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

この $(\sharp)$ の本当の意味は、

$$\left\{ z \in \mathbf{C}; \exp z = re^{i\theta} \right\} = \{\log r + i(\theta + 2n\pi); n \in \mathbf{Z}\}$$

ということである。

解答

(1) $a = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$ とする。$\exp \dfrac{1}{z} = a = re^{i\theta}$ は

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{z} = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

と同値である。ゆえに

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \frac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)}$$

と同値である。$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$n \in \mathbf{N}$ を十分大きく取れば、$\theta + 2n\pi > 1/\varepsilon$ となり (当然 $|\log r + i(\theta + 2n\pi)| \geq \theta + 2n\pi > 1/\varepsilon$)、このとき $z = \dfrac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)}$ とおけば、$0 < |z| < \varepsilon$, $\exp \dfrac{1}{z} = re^{i\theta} = a$.

(2) $z_n := -\dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくと、明らかに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. そして、

$$\exp\frac{1}{z_n} = \exp\frac{1}{-\frac{1}{n}} = \exp(-n) = e^{-n} \to 0 \quad (n \to \infty).\blacksquare$$

(3) $z_n := \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくと、明らかに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. そして、

$$\exp\frac{1}{z_n} = \exp\frac{1}{\frac{1}{n}} = \exp n = e^{n} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

(要するに (2) と (3) は $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ という高校で学んだ事実を使っているわけ。)

関数論2 小テスト No.7 (2011年11月16出題提出)

__年16組____番 氏名______________ (http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/)

問7 次の各関数の極とその位数、そこにおける留数を求めよ。

(1) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$ (2) $f(z)=\dfrac{1+z}{(z^2+a^2)^2}$ (a は複素数の定数) (3) $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$

極というのは、孤立特異点の一種であるから、そこでは定義されていない、定義されていても微分可能でないことが必要である。

$f = \dfrac{Q}{P}$ について、分母 Q と分子 P が正則関数である場合、(分母 P が 0 にならなければ、その点の近傍で f が定義できて正則なので) c が f の極であるためには、$P(c) = 0$ である必要がある。

そういう場合、「$f = \dfrac{Q}{P}$ で、P と Q は c の近傍で正則、c が P の k 位の零点で、$Q(c) \neq 0$ ならば、c は f の k 位の極」という定理を使うと良い。

c が P の零点であるとは、$P(c) = 0$ を満たすことをいう。

c が P の位数 k の零点であるための必要十分条件 (次のいずれか一方、チェックしやすい方をチェックすれば OK)

(i) $\exists P_1$ s.t. $P(z) = (z-c)^k P_1(z)$, $P_1(c) \neq 0$.

(ii) $P(c) = P'(c) = \cdots = P^{(k-1)}(c) = 0$, $P^{(k)}(c) \neq 0$.

「$f = \dfrac{Q}{P}$ で、P と Q は c の近傍で正則、c は P の 1 位の零点ならば、$\mathrm{Res}(f; c) = \dfrac{Q(c)}{P'(x)}$」

解答　最初に答を書いておく。

(1) $z = \pm i$. ともに 1 位の極。$\mathrm{Res}(f; \pm i) = \dfrac{1}{2}$.

(2) (a) $a = 0$ のとき、0 は 4 位の極で $\mathrm{Res}(f; 0) = 0$.

(b) $a = \pm i$ のとき、1 は 2 位の極で $\mathrm{Res}(f; 1) = -\dfrac{1}{4}$, -1 は 1 位の極で $\mathrm{Res}(f; -1) = \dfrac{1}{4}$.

(c) $a \neq 0, \pm i$ のとき、$\pm ai$ はともに 2 位の極で、$\mathrm{Res}(f; \pm ai) = \mp \dfrac{i}{4a^3}$.

(3) 0 は 2 位の極で $\mathrm{Res}(f; 0) = 0$, $n\pi$ $(n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\})$ は 1 位の極で $\mathrm{Res}(f; n\pi) = \dfrac{(-1)^n}{n\pi}$.

(1) とりあえず、手探りで進めていくが、見通しが良くない。全部計算し終わってから整理し直した方が分かりやすい。後の「別のまとめ方をすると」を見ること。

$P(z) := z^2 + 1$, $Q(z) := z$ とする。ともに $\mathbf{C}$ 全体で正則である。P の零点は $z^2 + 1 = 0$ から $z = \pm i$. $P'(z) = 2z$ なので $P'(\pm i) = \pm 2i \neq 0$ であるから、$\pm i$ はともに P の 1 位の零点である。(あるいは因数分解 $P(z) = (z+i)(z-i)$ より、$\pm i$ は P の 1 位の零点である。) $Q(\pm i) = \pm i \neq 0$ であるから、$\pm i$ はともに f の 1 位の極である。

$$\mathrm{Res}(f; i) = \frac{Q(i)}{P'(i)} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Res}(f; -i) = \frac{Q(-i)}{P'(-i)} = \frac{-i}{-2i} = \frac{1}{2}.$$

(2) $P(z) = (z^2 + a^2)^2$, $Q(z) = z + 1$ とする。ともに $\mathbf{C}$ 全体で正則である。P の零点は $(z^2 + a^2)^2 = (z + ai)^2 (z - ai)^2$ から $z = \pm ai$.

(i) $a = 0$ ならば、$P(z) = z^4$, $f(z) = \dfrac{z+1}{z^4} = \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^4}$ $(0 < |z| < \infty)$ が f の 0 のまわりの Laurent 展開であるから、0 は f の 4 位の極で、$\mathrm{Res}(f; 0) = 0$.

(ii) $a \neq 0$ ならば、$\pm ai$ はともに P の 2 位の零点である。$Q(ai) = 1+ai$, $Q(-ai) = 1-ai$. $Q(ai) = 0 \Leftrightarrow a = i$, $Q(-ai) = 0 \Leftrightarrow a = -i$ であることに注意すると、

(a) $a = \pm i$ のとき、

$$f(z) = \frac{z+1}{(z^2+i^2)^2} = \frac{z+1}{(z+1)^2(z-1)^2} = \frac{1}{(z+1)(z-1)^2}.$$

この右辺の分子が 0 とならないので、分母の零点の位数を調べれば良い。(分母は因数分解されているので零点の位数は見れば分かる) 1 は f の位数 2 の極、-1 は f の位数 1 の極である。

(b) $a \neq \pm i$ $(a \neq 0, \pm i)$ のとき、$Q(\pm ai) \neq 0$ であるから、$\pm ai$ ともに f の 2 位の極である。

($a \neq 0$ である限り) ai は f の高々 2 位の極であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f; ai) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to ai}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-ai)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to ai}\left(\frac{z+1}{(z+ai)^2}\right)' \\ &= \left.\frac{(z+ai)^2\cdot 1 - 2(z+ai)(z+1)}{(z+ai)^4}\right|_{z=ai} = \frac{-4a^2-4ai(1+ai)}{16a^4} = -\frac{i}{4a^3},\end{aligned}$$

($a \neq 0$ である限り) $-ai$ は f の高々 2 位の極であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f; -ai) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -ai}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z+ai)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -ai}\left(\frac{z+1}{(z-ai)^2}\right)' \\ &= \left.\frac{(z-ai)^2\cdot 1 - 2(z-ai)(z+1)}{(z-ai)^4}\right|_{z=-ai} = \frac{-4a^2+4ai(1-ai)}{16a^4} = \frac{i}{4a^3}.\end{aligned}$$

別のまとめ方をすると

$f(z) = \dfrac{1+z}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$. f の極は $\pm ai$.

- $a = 0$ のときは、$\pm ai = 0$. $f(z) = \dfrac{1+z}{z^4}$. f の極は一点 0 であり、位数は 4. $\mathrm{Res}(f; 0) = 0$.
- $a = i, -i$ のときは、$\pm ai = \pm 1$. $f(z) = \dfrac{1+z}{(z^2-1)^2} = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$. -1 は位数 1 の極、1 は位数 2 の極. $\mathrm{Res}(f; -1) = \dfrac{1}{4}$, $\mathrm{Res}(f; 1) = -\dfrac{1}{4}$.
- $a \neq 0, i, -i$ のときは、$\pm ai$ は相異なる 2 点。ai も $-ai$ も位数 2 の極で、$\mathrm{Res}(f; ai) = -\dfrac{i}{4a^3}$, $\mathrm{Res}(f; -ai) = \dfrac{i}{4a^3}$.

(3) $P(z) = z\sin z$, $Q(z) = 1$ とおくと、P と Q は $\mathbf{C}$ 全体で正則で、$Q(z) \neq 1$.

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \quad \text{または} \quad \sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = n\pi.$$

$$\begin{aligned}
P'(z) &= 1\cdot\sin z + z\cdot\cos z = \sin z + z\cos z,\\
P''(z) &= \cos z + 1\cdot\cos z + z\cdot(-\sin z) = 2\cos z - z\sin z
\end{aligned}$$

であるから、

$$P'(0)=0,\quad P''(0)=2\neq 0,\quad P'(n\pi)=n\pi\cos n\pi = n\pi(-1)^n\neq 0\quad (n\neq 0).$$

ゆえに 0 は P の 2 位の零点で、f の 2 位の極である。$n\pi$ $(n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\})$ は P の 1 位の零点で、f の 1 位の極である。

$n\neq 0$ とするとき、

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;n\pi) &= \frac{Q(n\pi)}{P'(n\pi)} = \frac{1}{n\pi(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n\pi},\\
\operatorname{Res}(f;0) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z\cdot 1-\cos z\cdot z}{\sin^2 z}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{z^2}\cdot\frac{z^2}{\sin^2 z}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin z - z\cos z &= \left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right) - z\left(1-\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\\
&= \left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)z^3 - \left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)z^5+\cdots\\
&= \frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{30}+\cdots = O(z^3),
\end{aligned}$$

より

$$\frac{\sin z - z\cos z}{z^2} = O(z)\to 0\quad (z\to 0).$$

($O(z^k)$ は Landau の記号と呼ばれるものであるが、ここでは収束冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ で、0 でない最低次の項が $a_k z^k$ であるもの ($a_j=0$ $(0\le j\le k-1)$) を表すと考えれば十分。)
また当然

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z^2}=1$$

であるから (これも複素変数だから、高校数学の $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ はそのまま使えず、$\dfrac{\sin z}{z} = 1-\dfrac{z^2}{3!}+\cdots$ などを使って証明する)、

$$\operatorname{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{z^2}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin^2 z} = 0\cdot 1 = 0.$$

($\operatorname{Res}(f;0)=0$ の別証明)

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

より

$$\frac{\sin z}{z} = 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots.$$

0 はこの関数の除去可能特異点である。逆数の Taylor 展開を求めて、

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \frac{31z^6}{15120} + \cdots \quad (|z| < \pi).$$

どうやるかというと

$$\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)\left(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots\right) = 1$$

から

$$a_0 = 1, \quad -\frac{1}{3!}a_0 + a_2 = 0, \quad \frac{1}{5!}a_0 - \frac{1}{3!}a_2 + a_4 = 0, \quad -\frac{1}{7!}a_0 + \frac{1}{5!}a_2 - \frac{1}{3!}a_4 + a_6 = 0, \quad \cdots$$

これから

$$a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3!}\cdot 1 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{5!}\cdot 1 = \frac{10-3}{360} = \frac{7}{360}, \quad \cdots$$

ゆえに

$$\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \cdots$$

これから、

$$\frac{1}{z\sin z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{360}z^2 + \frac{31}{15120}z^4 + \cdots \quad (0 < |z| < \pi).$$

これは f の 0 のまわりの Laurent 展開である。これから 0 は f の 2 位の極であり、$\mathrm{Res}(f;0) = 0$.

(もう一つの別証明) $\dfrac{1}{z\sin z}$ は偶関数であるから、留数は 0 である。■

関数論2 小テスト No. 8 (2011年11月30日出題提出)

__年16組____番　氏名_____________ (http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/)

問8　次の定積分の値を求めよ。(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

解答

(1) $f(z) := \dfrac{1}{z^6+1}$, $P(z) := z^6+1$, $Q(z) := 1$ とおくと、$f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) = 6$, $\deg Q(z) = 0$, $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in \mathbf{R}\ P(x) \ne 0$ であるから、

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

$P(z) = 0$ の零点は

$$c = e^{\frac{(2j+1)\pi}{6}\pi i} \quad (j = 0, 1, \ldots, 5) = e^{\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{5\pi}{6}i}, e^{\frac{7\pi}{6}i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}, e^{\frac{11\pi}{6}i}$$

で、位数はみな 1 である。P と Q は $\mathbf{C}$ 全体で正則で、$Q(c) = 1 \ne 0$ であるから、これらは f の 1 位の極であり、

$$\operatorname{Res}(f;c) = \frac{Q(c)}{P'(c)} = \frac{1}{6c^5} = \frac{c}{6c^6} = \frac{c}{6\cdot(-1)} = -\frac{c}{6}.$$

極 c のうちで、$\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものは

$$e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, e^{\frac{\pi}{2}i} = i, e^{\frac{5\pi}{6}i} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(f; \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) + \operatorname{Res}(f;i) + \operatorname{Res}\left(f; \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right) \right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{-1}{6} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} + i + \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right) \\
&= \frac{-\pi i}{3} \cdot (2i) = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

老婆心

一般に $z^n = c$ が解けないといけないが、$z^6 = -1$ の場合でやってみる。
$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbf{R})$ とおける (一般には $z = re^{i\theta}$ $(r \ge 0,\ \theta \in \mathbf{R})$ となるわけだが、$r = |z| = 1$ は明らかなので)。$z^6 = e^{6i\theta}$ が $-1 = e^{i\pi}$ に等しいので、

$$6\theta = \pi + 2n\pi \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

ゆえに

$$\theta = \frac{(2n+1)\pi}{6} \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
z &= e^{i\frac{(2n+1)\pi}{6}} \quad (n \in \mathbf{Z}) \\
&= e^{\frac{1}{6}\pi i}, e^{\frac{3}{6}\pi i}, e^{\frac{5}{6}\pi i}, e^{\frac{7}{6}\pi i}, e^{\frac{9}{6}\pi i}, e^{\frac{11}{6}\pi i} \quad (\text{これ以上はダブる}) \\
&= \frac{\sqrt{3}+i}{2}, i, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, -i, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}.
\end{aligned}$$

(図を描くと間違いが起こりにくい。)

(2) 被積分関数は偶関数であるから、

$$I := \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)}.$$

$f(z) := \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$, $P(z) := (z^2+1)^3$, $Q(z) := 1$ とおくと、$f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) = 6$, $\deg Q(z) = 0$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $\forall x \in \mathbf{R}\ P(x) \neq 0$ であるから、

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c).$$

$P(z) = ((z+i)(z-i))^3 = (z+i)^3(z-i)^3$ であるから、$P(z)$ の零点は $c = \pm i$ で、位数はともに 3 である。P と Q は $\mathbf{C}$ 全体で正則で、$Q(c) = 1 \neq 0$ であるから、これらは f の 3 位の極である。極 c のうちで、$\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものは $c = i$ のみ。ゆえに

$$\begin{aligned} I &= \pi i \operatorname{Res}(f;i) = \pi i \cdot \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[(z-i)^3 f(z)\right] \\ &= \pi i \cdot \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}\right)^2 (z+i)^{-3} = \frac{\pi i(-3)(-4)}{2}\lim_{z\to i}(z+i)^{-5} \\ &= 6\pi i\frac{1}{(2i)^5} = \frac{6\pi i}{32i} = \frac{3\pi}{16}. \blacksquare \end{aligned}$$

関数論2 小テスト No. 9　(2011年12月7日出題, 12月13日提出)

＿年16組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿　(http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/)

問9　次の定積分の値を求めよ ((3) は結構面倒なので余裕があったらで良い)。

(1) $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$　(2) $J := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$　(3) $K := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^4+1}\,dx$

(1) $\dfrac{\pi}{2e}$ (2) $\dfrac{2\pi}{3}$ (3) $\dfrac{e^{-1/\sqrt{2}}}{2}\pi\sin\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解答

(1) 被積分関数は偶関数であり、$\dfrac{\cos x}{x^2+1} = \operatorname{Re}\dfrac{e^{ix}}{x^2+1}$ であるから、

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx.$$

$a := 1,\ P(z) := z^2+1,\ Q(z) := 1$ とおくと、明らかに $a > 0,\ \deg P \geq \deg Q + 1,\ \forall x \in \mathbf{R}$ $P(x) \neq 0$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(x)}{P(x)}e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)}e^{iaz};c\right) = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1};c\right).$$

$c = \pm i$ は、$z^2+1=0$ の1位の零点で、$e^{ic}\neq 0$ を満たすので、$\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ の1位の極である。$\operatorname{Im}c > 0$ を満たすものは $c = i$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1};i\right) = 2\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = 2\pi i\frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

ゆえに

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{2e}.$$

(注意: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx = \operatorname{Re}\int_0^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = \operatorname{Re}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx$ とするのは、実は正しいが説明がしづらい。$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx \neq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx$ であるから。)

(2) $z = e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから、$d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. ゆえに

$$J = \int_{|z|=1}\frac{1}{5-4\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{5z-2(z^2+1)}dz = i\int_{|z|=1}\frac{dz}{2z^2-5z+2}$$
$$= i\int_{|z|=1}\frac{dz}{(2z-1)(z-2)}.$$

留数定理から

$$J = i\cdot 2\pi i\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)};c\right) = -2\pi\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z-1)(z-2)};\frac{1}{2}\right)$$
$$= -2\pi\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(2z-1)(z-2)} = -2\pi\frac{1}{2(\frac{1}{2}-2)} = \frac{2\pi}{3}.$$

(3) 被積分関数が偶関数であり、$e^{ix} = \operatorname{Im} e^{ix}$ であるから、

$$K = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+1}\, dx.$$

$P(z) = z^4 + 1$, $Q(z) = z$ とおくと、$\deg P \geq \deg Q + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$ $P(x) \neq 0$ であるから、

$$K = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Im} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c\right) = \pi \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c\right)$$

$\dfrac{ze^{iz}}{z^4+1}$ の極 c は、分母 P の 1 位の零点であるので、1 位の極であり、$0 = P(c) = c^4 + 1$ が成り立つので

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c\right) = \left.\frac{ze^{iz}}{(z^4+1)'}\right|_{z=c} = \frac{ce^{ic}}{4c^3} = \frac{c^2 e^{ic}}{4c^4} = -\frac{c^2 e^{ic}}{4}.$$

P の零点 $e^{i\pi/4}$, $e^{i3\pi/4}$, $e^{i5\pi/4}$, $e^{i7\pi/4}$ のうちで上半平面にあるのは、$e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{i3\pi/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ であるから、

$$\begin{aligned}
K &= \pi \operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= \pi \operatorname{Re} \frac{-1}{4}\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 e^{i\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 e^{i\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} \operatorname{Re} i\left(e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} - e^{\frac{-1-i}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{4} e^{-1/\sqrt{2}} \operatorname{Re} i\left(e^{i/\sqrt{2}} - e^{-i/\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} e^{-1/\sqrt{2}} \operatorname{Re} 2 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-1/\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacksquare
\end{aligned}$$

関数論 2 小テスト No. 10 (2011 年 12 月 14 日出題, 12 月 20 日提出)

__年16組____番　氏名______________ (`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/complex-function/`)

問 10 (1) $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq\infty\\ z\to\infty}}\frac{1}{z}=0$ を示せ。(2) $\displaystyle\lim_{\substack{z\neq 0\\ z\to 0}}\frac{1}{z}=\infty$ を示せ。(3) 立体射影 $\varphi\colon S\setminus\{N\}\to\mathbf{C}$ について、$\varphi(x_1,x_2,x_3)$ を具体的に式で表せ (記号は 12 月 13 日の授業のものを使う)。

解

(1) $\forall\varepsilon>0$ に対して、$R:=\dfrac{1}{\varepsilon}$ とおくと、$|z|>R$ を満たす任意の $z\in\mathbf{C}$ に対して、

$$\left|\frac{1}{z}-0\right|=\frac{1}{|z|}<\frac{1}{R}=\varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0.$

(2) $\forall U\in\mathbf{R}$ に対して、$U>0$ ならば、$\delta:=\dfrac{1}{U}$ とおくと、$\delta>0$ で、$|z|<\delta$ を満たす任意の $z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ に対して、

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}>\frac{1}{\delta}=U.$$

また、$U\le 0$ ならば、$\delta:=1$ とおくと、$\delta>0$ で、$|z|<\delta$ を満たす任意の $z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ に対して、

$$\left|\frac{1}{z}\right|>0\ge U.$$

結局 "$\forall U\in\mathbf{R}, \exists\delta>0$ s.t. $(\forall z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\colon |z|<\delta)\ \left|\frac{1}{z}\right|>U$" が示せた。ゆえに $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty.$

(3) $\mathrm{N}(0,0,1)$ と $\mathrm{P}(x_1,x_2,x_3)$ を通る直線上の方程式は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_1-0\\x_2-0\\x_3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}tx_1\\tx_2\\t(x_3-1)+1\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbf{R}).$$

平面 $z=0$ との交点では、$t(x_3-1)+1=0$ より $t=\dfrac{1}{1-x_3}$.

$$x=\frac{x_1}{1-x_3},\quad y=\frac{x_2}{1-x_3}.$$

ゆえに $\varphi(x_1,x_2,x_3)=x+iy=\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3}$. ■

$\forall U\in\mathbf{R}$ を最初に。それから δ を定める。やり方は色々。

$$\delta:=\begin{cases}\frac{1}{U} & (U>0)\\ 1 & (U\le 0)\end{cases}$$

とか

$$\delta:=\frac{1}{|U|+1}.$$

いずれにしても、$\delta>0$ で、

$$|z-0|<\delta\quad\Longrightarrow\quad\left|\frac{1}{z}\right|>U$$

が成り立つ。