関数論 1 の復習

桂田 祐史

2011 年 9 月 27 日

1 はじめに

教科書である神保 [1] の §4.1 まで関数論 1 で学んだ。§4.2 からが桂田の (「関数論 2」の) 担当範囲ということになる。

2 関数論 1 を振り返る

(夏休みが入っているし、記号の確認の意味もあるし)

- $\mathbf{C}$ = 複素数全体の集合, 四則, 共役複素数 $\bar{z}$, 絶対値 $|z|$, 偏角 $\arg z$, 複素平面, 極形式 $re^{i\theta}$
  $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ を書くのを忘れた。
- 位相 (極限、開集合・閉集合、連続性)
- 複素関数とは、$f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ (ただし $\Omega \subset \mathbf{C}$) のような関数
- $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ が正則であるとは、各点で微分可能なこと、すなわち

$$\forall z \in \Omega \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \quad \text{が存在} \qquad (\text{その極限値を } f'(z) \text{ と書く}).$$

- 実は、$f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ について、次の各条件は同値

  (a) f は正則

  (b) f は解析的 (i.e., Ω の各点の近傍で f は収束冪級数に展開可能)

  (c) $\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x+iy \in \Omega\}$ とおき、$\forall (x,y) \in \widetilde{\Omega}$ に対して、

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy), \quad F(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

  と定めるとき、$F\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbf{R}^2$ は全微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たす。

(a) $\Leftrightarrow$ (c) については省略する。以下まず (b)$\Longrightarrow$(a) を証明するために冪級数について論じ、それから (a)$\Longrightarrow$(b) を証明するために線積分について論じ、有名な Cauchy の積分定理を紹介する。

- 冪級数とは、$c \in \mathbf{C}$, 複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を用いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

と表される式のこと。意味は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z-c)^n.$$

- 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が、$z_0 (\neq c)$ で収束するならば、

$$|z-c| < |z_0 - c| \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \text{ は収束}$$

が成り立つ。これから、任意の冪級数について、次のいずれか一つだけが成立する。

(i) $\forall z \in \mathbf{C}$ に対して収束する。

(ii) $\exists \rho \in (0, \infty)$ s.t. $|z-c| < \rho$ ならば収束し、$|z-c| > \rho$ ならば発散

(iii) $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{c\}$ に対して発散する。

(i) のとき $\rho = \infty$, (iii) のとき $\rho = 0$ と見なして、次のようにまとめることも出来る:

$$0 \le \exists \rho \le \infty \text{ s.t. } |z-c| < \rho \text{ ならば収束、} |z-c| > \rho \text{ ならば発散する。}$$

(収束円周の上、つまり $|z-c| = \rho$ となる z で収束するかどうかはケースバイケース)

ρ をその冪級数の収束半径、$\{z \in \mathbf{C}; |z-c| < \rho\}$ を (その冪級数の) 収束円と呼ぶ。

- 冪級数はその収束円で何回でも項別微分可能である (ゆえに解析的ならば正則である)。実際、

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n, \quad g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-c)^n$$

とするとき、$f(z)$ と $g(z)$ の収束円は一致し、その収束円内の任意の点 z に対して、$f'(z) = g(z)$ が成り立つ。

- 系として、

(1) 収束冪級数 $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ について、$\displaystyle a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ $(n = 0, 1, \dots)$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ が c を中心とするある開円盤で成り立てば、$a_n = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. つまり係数の一意性が成り立つ。

- (曲線に沿う積分、線積分) C を $z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ で与えられる曲線とする (連続または区分的 C^1 級とする)。

$$\int_C f(z)\,dz := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(z_j)(z_j - z_{j-1}). \quad \text{ただし} \quad |\Delta| := \max_{j=1,2,\ldots,N} |z_j - z_{j-1}|,$$

$$z_j = \varphi(t_j), \quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta.$$

これは実関数の積分の定義

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j-1}), \quad |\Delta| = \max_{j=1,2,\ldots,N} (x_j - x_{j-1}),$$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

の一般化と言える。
(余談: 積分って何？と聞いて「面積」と答える人がいる。高校生ならば分からないでもないけれど、数学科学生としてはまずい。)

- C が区分的に C^1 級の曲線 $z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ であるならば、

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

(これを線積分の定義と考えても良い。)

- もしも f が原始関数 F を持つ (i.e. $\exists F$ s.t. $F' = f$) ならば

$$\int_C f(z)\,dz = F(b) - F(a), \quad a := C \text{ の始点}, \quad b := C \text{ の終点}.$$

- 複素関数は原始関数を持つとは限らない。実際 a から z に至る曲線は無数にあるので、$\displaystyle\int_a^z f(t)\,dt$ は意味が確定しない (Cf. 実関数の場合、$F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと、f が連続であれば $F'(x) = f(x)$. ゆえにすべての実連続関数は原始関数を持つ。)。

- (積分路変形の原理) C_1, C_2 を共に a を始点、b を終点とする曲線とする。C_1 と C_2 の "間で" f が <u>正則</u> ならば、$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$. → 正則関数は原始関数を持つ可能性が高い。なお、この原理の証明は、次の Cauchy の積分定理による。
$C := C_1 - C_2$ とおく。C の囲む範囲で f は正則だから、Cauchy の積分定理により、

$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

これから $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$

- (Cauchy の積分定理) $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ が正則、C が Ω 内の区分的 C^1 級曲線で、C が "囲む" 範囲で f は正則ならば、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0.$
これは「囲む」がかなり曖昧である (8 の字曲線はどこかを囲んでいるのだろうか?)。

> D は有界領域で、その境界 ∂D は区分的に滑らかな有限個の単純閉曲線からなるとする。∂D には正の向きをつける。f が $\overline{D} = D \cup \partial D$ を含む領域で正則ならば、
> $$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

- (Cauchy の積分公式) 上の仮定のもとで、

$$(\heartsuit) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad (z \in D).$$

さらに任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して、

$$(\clubsuit) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

$\displaystyle\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}}$ が成り立つことに注意すると、$(\heartsuit)$ の両辺を z で n 回微分することで (積分と微分の順序交換が出来る、ということになる) $(\clubsuit)$ が得られる。

- f が $\overline{D}(c;\rho)$ で連続ならば、$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D(c;R))),$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}d\zeta$$

が成り立つ。特に f が $D(c;\rho)$ で正則ならば、(Cauchy の積分公式が成り立つので、左辺が $f(z)$ に等しいと分かり)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D(c;R)))$$

が得られる。ゆえに正則関数は冪級数展開可能である。
— 証明の鍵は、Cauchy の積分定理と、次の式変形の二つである。

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{1}{(\zeta - c)\left[1 - (z - c)/(\zeta - c)\right]} = \frac{1}{\zeta - c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - c}{\zeta - c}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}} \quad (|z - c| < |\zeta - c|).$$

3　計算練習

冪級数と線積分についての基礎的な計算力が必要である。

問 1

(1) $z^4 = -1$ を解け。

(2) C: $z = e^{it}$ $(t \in [0, \pi/2])$ とするとき、$\displaystyle\int_C z^2\, dz$ を求めよ。

(3) $r > 0$, $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とするとき、$\displaystyle\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)^n}$ を求めよ (n で場合分けが必要)。

(4) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z}$ と $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z}$ を求めよ。

参考文献

[1] 神保（じんぼう）道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003).