2011 年度 関数論 2・同演習 試験問題 (担当 桂田祐史)

2012 年 1 月 25 日 (水) 13:00〜15:00 施行,
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚両面解答可) のみ提出

次の **1**〜**6** の 6 問に解答せよ。

1. 複素関数 (定義域は $\mathbf{C}$ 内の領域とする) に関する以下の各用語について、(a) 定義, (b) 例 を記せ。
(1) 孤立特異点　(2) 除去可能特異点　(3) 極　(4) (孤立) 真性特異点

2. (1) Weierstrass の M test と呼ばれる定理を記せ。(2) M test を用いて次の (a), (b) を証明せよ。
(a) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ は $\overline{D}(0;1)$ で一様収束する。(b) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ は $D(0;1)$ で広義一様収束する。

3. 次の命題から 2 つを選んで証明せよ。

(A) $\forall a\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$, $\forall\varepsilon>0$, $(\exists z\in\mathbf{C}\colon\ 0<|z|<\varepsilon)$ $\quad\exp\dfrac{1}{z}=a.$

(B) $c\in\mathbf{C}$, $k\in\mathbf{N}$, f は c を k 位の極に持つとするとき、c の近傍 U と、U で正則な関数 P と Q で、(i) $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ $(z\in U\setminus\{c\})$, (ii) c は P の k 位の零点, (iii) $Q(c)\neq 0$, を満たすものが存在する。

(C) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ の収束半径がそれぞれ R_1, R_2 で、$0<R_1<R_2<\infty$ を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ の収束半径は R_1 である。

4. $f(z):=\dfrac{3z^4+3z^3+4z^2+10z+40}{(z-1)^2(z+3)(z^2+4)}=\dfrac{1}{z+3}+\dfrac{2z}{z^2+4}1+\dfrac{3}{(z-1)^2}$ について、以下の問に答えよ。
(1) 0 のまわりの Taylor 展開を求めよ。収束範囲も書くこと。(2) $3<|z|<\infty$ における Laurent 展開を求めよ。(3) -1 の回りに Taylor 展開したときの収束半径を求めよ。(4) ∞ は f の極であるかどうか答えよ。また $\mathrm{Res}(f;\infty)$ を求めよ。

5. $P(z)$ と $Q(z)$ は多項式で、(i) $\deg P(z)\geq\deg Q(z)+1$, (ii) $\forall x\in\mathbf{R}$ $P(x)\neq 0$ を満たすとする。このとき、$f(z):=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とおくと、$a<0$ に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{iax}\,dx=-2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,c<0}\mathrm{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right)$$

6. 次の定積分の値を求めよ。(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$ $\quad$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

全体的なコメント

- 何かを計算するのに複数のことをする場合、大きなものについて、それをする前とした後の式を書くべきです。計算用紙に書いて、結果しか書かない場合、それがあっていれば疑わしきは罰せずですがまちがっていた場合、中間点は一切あげられない (どこらへんで間違えたのか分からないので)。最近、こういうところが下手な人が多い、と思っていましたが、ひょっとして、あまり記述式問題に慣れていないせいか？
- 曲線 $|z|=1$ 上の複素積分なのに、$\displaystyle\int_0^1$ と書く人が何人かいました。とても変です。
- シグマ $\sum$ の直後にマイナス $-$ を書く人が結構います。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^n}z^n$ とか。普通はこう書きません。$\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}z^n$ あるいは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^n}\right)z^n$ のように直して下さい。
- (**重要**) 孤立特異点の定義を、昨年度まで (教科書で採用しているもの) と変えました。そちらで解答している人がいましたが、それで減点はしませんでした。しかし、自分が書いた定義と例の説明が矛盾している場合は例の得点を 0 としました。例えば、$f(z)=z$, $c=0$ としたとき、教科書の定義を採用すると、f は $0<|z-c|<1$ で正則なので、c は f の孤立特異点です。しかし今年度の授業の定義を採用すると、f は $|z-c|<1$ でも正則であるので (要するに $z=c=0$ は「悪い」点ではないわけですね)、孤立特異点ではないことになります。

解説 (2012 年 2 月 1 日)

1.

(1) c が f の孤立特異点であるとは、ある正数 R が存在して、f は $0<|z-c|<R$ で定義されて正則であるが、$|z-c|<R$ ではそうでない (定義されていないか、正則でない) ことをいう。

(ここまでで孤立特異点の定義は終了)　このとき、$\exists\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ s.t.

$$(\heartsuit)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad(0<|z-c|<R).$$

例としては以下の (2), (3), (4) のどれを持って来ても良い。

(2) c が f の除去可能特異点であるとは、($\heartsuit$) において、$\forall n\in\mathbf{N}$ $a_{-n}=0$ が成り立つことをいう。

(例) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$, $c=0$ とするとき、c は f の除去可能特異点である。実際

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}\quad(|z|<\infty)$$

であって、主要部は 0 であることが分かる。

(3) c が f の極であるとは、(♡) において、$\exists k \in \mathbf{N}$ s.t. $a_{-k} \neq 0$ かつ $(\forall n \in \mathbf{N}\colon\ n > k)\ a_{-n} = 0$ が成り立つことをいう。

(例) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $c = 1$ とするとき、c は f の極である。実際 $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ という式自体が (成立範囲は $0 < |z-1| < \infty$) 、f の Laurent 展開である。$k = 1$, $a_{-1} = 1$, $a_n = 0\ (n \neq -1)$ とすれば良い。

(4) c が f の真性特異点であるとは、(♡) において、$\forall k \in \mathbf{N}$, $(\exists n \in \mathbf{N}\colon\ n > k)\ a_{-n} \neq 0$ が成り立つことをいう。

(例) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$, $c = 0$ とすると、c は f の真性特異点である。

コメント

- 上に書きましたが、授業での孤立特異点の定義は教科書のそれとは違っています (授業での定義の方がメジャーだと思います)。どちらでも正解にしました。
- 例はちゃんと書けるという人はいて、それはそこそこの点になります。
- 機械的に計算することだけが数学ではなくて、きちんと筋の通った議論をすることが大事で、そのためには言葉の定義をきちんとマスターすることが必要、ということを納得して下さい。まあまあ理解しているようだけれど、うまく書けない人もいます。ここら辺は語学と一緒で、自分の口や手でアウトプットする練習が必要です。
- 書くことに上達するのは普通はむつかしいけれど、数学の文章を書くのは、ある意味で簡単な面も多いです。「主語をきちんと書く」、「新しく出て来た記号は必ず紹介」、「条件の間の関係は明確に書く (必要か、十分か、必要十分か)」のような明解な指針がいくつかあって、それに気をつけると、良くなるはずです。逆に言うと、主語すら書けていない人が少なくない。
- 問題文中に f も c もないのに、当然のように f と c を使っていたり、逆に $\exists c$ なんて書いてあるのは変です。「c が f の孤立特異点であるとは」のように書き出すのが良いでしょう。
- ○○点の例をあげるように要求しているのに、肝心の点を書かないような答案がありました。(例えば真性特異点の例として「$\exp\dfrac{1}{z}$」とだけ書いてある。「0 は」とつけないと変です。「チャンピオンの例をあげてください」に「ボクシング」と答えるようなもので、かみ合わないです。「○○はボクシングのチャンピオン」で「○○」が大事ですよね。)
- Laurent 展開の定義みたいなことを書く必要があるのだけど、教科書の「定義」(原点のまわりの Laurent 展開しか書いてない) を引き写したせいで、c が出て来ないという人がいました (つまり、教科書は $c = 0$ という特別な場合を書いてある)。妙なところを「やさしく」している教科書も悪いのだけど、自分でそれではおかしいと気がつかないといけません。ちなみに授業で Laurent 展開の定義を書く場合、(10 回以上式を板書した覚えがあるけれど) $c = 0$ の場合で定義を書いたことはありません。本当は、一回書いたら後は直さないという本よりも (多分ご本人は授業をしていらっしゃらないと推察します)、何年も講義している先生の授業の方を信用すべきなのだけど、なかなかそうは言いづらいね。

- 孤立真性特異点の定義のところで、「$\forall n \in \mathbf{N}\ a_{-n} \neq 0$」とか、「$\exists k \in \mathbf{N},\ (\forall n \in \mathbf{N}\colon\ n > k)\ a_{-n} \neq 0$」のような間違いをした人が結構いました。正しくは「$\forall k \in \mathbf{N},\ (\exists n \in \mathbf{N}\colon\ n > k)\ a_{-n} \neq 0$」です。それで $a_{-n} \neq 0$ となる $n \in \mathbf{N}$ が無限個存在する、ということになります。よく考えて納得して下さい。

- なぜか、0 は $\dfrac{\sin z}{z}$ の真性特異点という答案が何枚か。これは除去可能特異点です。真性特異点の例を自力で作ろうとした人もいますが、割と難しいです。$f(z) = \exp\dfrac{1}{z}$ と $c = 0$ とか、$f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ と $c = 0$ とか、そういうのになりがちです。

  クイズ: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{z^n}$ で、$c = 0$ は f の孤立真性特異点ではありません。$a_{-n} \neq 0$ である a_{-n} が無限個あるのになぜでしょう？

2.

(1) Ω は空でない集合、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Ω 上の関数列、$\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は数列で、

(i) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall z \in \Omega\ |f_n(z)| \le M_n$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は Ω で一様に絶対収束する。

(2)

(a) $\Omega := \overline{D}(0;1),\ f_n(z) := \dfrac{z^n}{n^2}\ (n \in \mathbf{N},\ z \in \Omega),\ M_n := \dfrac{1}{n^2}\ (n \in \mathbf{N})$ とおく。$z \in \Omega$ であれば、$|z| \le 1$ なので、$|f_n(z)| = \left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2} = M_n$. また

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は Ω で一様収束する。

(b) Ω 内の各点 z_0 に対して、$r := (1 + |z_0|)/2$ とすると、$0 < r < 1$. $K := \overline{D}(0;r)$ とおくと、K は z_0 の近傍である。$\forall z \in K$ に対して、$|z| \le r$ であるから、$|z^n| \le r^n$. $M_n := r^n$ とおくと、$\forall n \in \mathbf{N}, \forall z \in K$ に対して、$|z^n| \le r^n = M_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \le \frac{r}{1-r} < \infty$. ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ は K で一様収束である。ゆえに Ω で広義一様収束することになる。■

コメント　関数論 2 で重要な定理というと、留数定理、Laurent 展開が可能だという定理、正則関数列が広義一様収束すれば極限は正則という定理、それとこの Weierstrass の M test くらいです。

3.

(1) (これは小テストでやったので略。とも言ってられないみたい。出来が良くない。書いておきます。)

$a = re^{i\theta}$ $(r \ge 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$ とおくと、$a \ne 0$ であるから、$r > 0$.

$$\exp\frac{1}{z} = a \quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{z} = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad z = \frac{1}{\log r + i(\theta + 2n\pi)}.$$

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\theta + 2n\pi > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となるような十分大きな n を取ると、

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(\log r)^2 + (\theta + 2n\pi)^2}} \le \frac{1}{\sqrt{(\theta + 2n\pi)^2}} = \frac{1}{\theta + 2n\pi} < \varepsilon.$$

ゆえにこの z は $0 < |z| < \varepsilon$, $\exp\dfrac{1}{z} = a$ を満たす。

(2) c は k 位の極であるから、$\exists R > 0$, $\exists \{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ s.t.

$$a_{-k} \ne 0, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R).$$

このとき、 $U := D(c; R)$, $P(z) := (z-c)^k$,

$$Q(z) := \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z-c)^n$$

とおくと、(i), (ii), (iii) を満たす。実際 (ii) は明らか。また $Q(z)$ の定義式の右辺の級数は、$f(z)$ の Laurent 展開 ($U \setminus \{c\}$ で収束する) に $(z-c)^k$ をかけたものに等しいので、U で収束し、U で正則な関数 Q を定め、$U \setminus \{c\}$ で $(z-c)^k f(z)$ に等しいことが分かる。ゆえに (i) $f = \dfrac{Q}{P}$ が成り立つ。また $Q(c) = a_{-k} \ne 0$ より (iii) が成り立つ。

(3) 仮定より

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は $|z| < R_1$ で収束し、$|z| > R_1$ で発散する。もちろん $|z| > R_2$ で発散する。
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ は $|z| < R_2$ で収束し、$|z| > R_2$ で発散する。もちろん $|z| < R_1$ で収束する。

これから

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n + b_n z^n)$ は $|z| < R_1$ で収束する。

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n + b_n z^n)$ は $R_1 < |z| < R_2$ では発散する。実際、もしも $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n +$ $b_n) z^n$ が、$R_1 < |z| < R_2$ を満たすある z_0 で収束すると仮定すると、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((a_n +$

$b_n) - b_n)z^n$ も $z = z_0$ で収束し、「$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ が $z = z_0$ で収束すれば、$|z| < |z_0|$ を満たすすべての z に対して収束する」という良く知られた定理から、$|z| < |z_0|$ で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が収束することになる。$|z_0| > R_1$ であるから、これは (a) に矛盾する。

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ は $|z| \geq R_2$ で発散する。実際 $|z_0| \geq R_2$ なるある z_0 に対して、収束すれば、$|z| < R_2$ で収束することになり、(b) に矛盾する。

(a),(b),(c) より $|z| < R_1$ で収束し、$|z| > R_1$ で発散することが分かった。ゆえに R_1 が収束半径である。 ■

コメント

- (1) は問から出してみた、ということです。
- (2) の逆は良く出てきました。こちらを授業中に定理として紹介したことは (今年度は) ないと思いますが、逆の方になれていれば、要するに分母に $(z-c)^k$ が来ることだろう、と何となく分かるだろうと思います。c が k 位の極であるという条件を式で書く。つまり、$\exists R > 0$, $\exists\{a_n\}$ s.t.

  $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (|z-c| < R), \quad a_{-k} \neq 0$$

  とすれば、それを証明まで持っていくのは難しくないはずです。分母を払う (両辺に $(z-c)^k$ をかける) だけだから。
- (3) は何度か使っています。「明らか」扱いで証明はしていませんが。こういうのは自分で「どうしてそれで良いのか」疑問に感じるべきです。ちなみに補講の日に質問した人がいました (そしらぬ顔で証明の方針を答えました)。その人が正解したかどうか知りませんが、当然疑問に思うべきことで、良い勉強をしていると思いました。

4.

$$f(z) = \frac{3z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 10z + 40}{(z-1)^2(z+3)(z^2+4)} = \frac{1}{z+3} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{2z}{z^2+4}.$$

(1)

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3\left(1 + \dfrac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} z^n.$$

この級数の収束の条件は $|-z/3| < 1 \Leftrightarrow |z| < 3.$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

この級数の収束の条件は $|z| < 1.$ これから

$$\frac{3}{(z-1)^2} = -3\left(\frac{1}{z-1}\right)' = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = 3\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

この級数の収束半径は (微分する前と同じで) 1.

$$\frac{2z}{z^2+4}=\frac{2z}{4\left(1+z^2/4\right)}=\frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^n=\frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 4^n}z^{2n+1}.$$

この級数の収束の条件は $\left|-z^2/4\right|<1 \Leftrightarrow |z|<2$. ゆえに

$$\begin{aligned}
f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}+3(n+1)\right]z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 4^n}z^{2n+1} \quad \text{(これは検算済み)}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{2k+1}}+6k+3\right]z^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3^{2k+2}}+6k+6+\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}z^{2k+1}\right] \quad \text{(これも検算済み)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}+3(n+1)-\frac{(-i)^{n+1}+i^{n+1}}{2^{n+1}}\right]z^n.
\end{aligned}$$

この冪級数の収束半径は、ここの冪級数の収束半径 3, 1, 2 の最小値である 1.

(2)

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z\left(1+3/z\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{z^n}.$$

この級数の収束の条件は $|-3/z|<1 \Leftrightarrow |z|>3$.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z(1-1/z)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

この級数の収束の条件は $|1/z|<1 \Leftrightarrow |z|>1$.

$$\frac{3}{(z-1)^2}=-3\left(\frac{1}{z-1}\right)'=-3\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right)'=-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{z^{n+1}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3(n-1)}{z^n}.$$

この級数は $|z|>1$ で収束する (項別微分する前に $|z|>1$ で広義一様収束しているので、項別微分した後もそうなっている)。

$$\frac{2z}{z^2+4}=\frac{2z}{z^2\left(1+4/z^2\right)}=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{z^2}\right)^n=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{z^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-4)^n}{z^{2n+1}}.$$

この級数の収束の条件は $\left|-4/z^2\right|<1 \Leftrightarrow |z|>2$. ゆえに

$$\begin{aligned}
f(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3(n-1)}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-4)^n}{z^{2n+1}}\\
&=\frac{3}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}+3n-3}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-4)^n}{z^{2n+1}} \quad \text{(これは検算済み)}\\
&=\frac{3}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-3^{2k-1}+6k-3}{z^{2k}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k}+6k+2\cdot(-4)^k}{z^{2k+1}} \quad \text{(これも検算済み)}\\
&=\frac{3}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}+3(n-1)+(-2i)^{n-1}+(2i)^{n-1}}{z^n}.
\end{aligned}$$

これは $|z|>3$ で収束する (こちらは最大の半径を選ぶことになる)。

(3) f の極は $1, -3, \pm 2i$ の 4 点。Taylor 展開の中心 -1 との距離は 2. ゆえに収束半径は 2.

(4) $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ より ∞ は f の極ではない (あるいは $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ が $\zeta = 0$ を除去可能特異点に持つことを確認する)。(2) で求めた $3 < |z| < \infty$ での Laurent 展開は、∞ のまわりでの Laurent 展開なので、$\mathrm{Res}(f;\infty) = -a_{-1} = -3$. (2) が出来ていなくても、

$$\mathrm{Res}\,(f;\infty) = -\lim_{z\to\infty} zf(z) = -\lim_{z\to\infty} \frac{3 + \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{10}{z^3} + \frac{40}{z^4}}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{z}\right)\left(1 + \frac{4}{z^2}\right)} = -3. \blacksquare$$

コメント

- まあ、当然出題される類の問題です。(4) はつまらないことを尋ねるようですが、$c = \infty$ の場合は、$c \in \mathbf{C}$ の場合と違って、正則であっても留数が 0 でないことがある、という点を認識して欲しいので尋ねてみました。

- おお！

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

きっと冪級数の積 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ を計算したんですね。微分する方が簡単だとは思いますが、もちろんこうやっても OK です。

- $|z| < 1$ の方はちゃんと出来ているのに、$|z| > 1$ の方が出来ない人が多かった。

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\left(\frac{1}{z-1}\right)' = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{z^n}.$$

- (3) を実際に展開しようとした人がいましたが、$\frac{1}{z^2+4}$ の展開で失敗するケースが多い。$z^2 + 4 = (z^2+1) + 3$ とするのではないです。$(z+1)$ の冪の級数にするわけです。簡単には出来ません。それこそ虚数を用いて、ばらばらに部分分数分解でもしないと。ちょっと試験時間中に手で解く気にはなれない (と思っていたら、実行した人が結構いました。根性ありますね。)。でも尋ねているのは、収束半径なので実は簡単、ということです。根性で解いた人ももちろん正解です (あまり上手ではないと思うけれど、正しい計算に文句をつけるわけにはいかない)。

5. $\deg P \geq \deg Q + 1$ より $\exists M \in \mathbf{R}$, $\exists R \in R$, $(\forall z \in \mathbf{C} : |z| \geq R)$ $P(z) \neq 0$ かつ $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|}$. $A, B > R$ なる任意の A, B に対して、

$$\begin{aligned}
-C_1 &: z = t \quad (t \in [-A, B]) \\
C_2 &: z = -A - it \quad (t \in [0, A+B]) \\
C_3 &: z = t - i(A+B) \quad (t \in [-A, B]) \\
C_4 &: z = B + it \quad (t \in [-(A+B), 0]) \\
C &:= C_1 + C_2 + C_3 + C_4
\end{aligned}$$

とおく。P の零点 c は $|c|<R,\ c\in\mathbf{R}$ を満たすので、$\operatorname{Im} c<0$ を満たすものは C の中にあり、C 上に f の極はない。ゆえに留数定理から

$$\int_C f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c<0}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right).$$

$$\int_{C_1} f(z)e^{iaz}\,dz = -\int_{-C_1} f(z)e^{iaz}\,dz = -\int_{-A}^{B} f(t)e^{iat}\,dt.$$

$j=2,3,4$ について

$$\int_{C_j} f(z)e^{iaz}\,dz\to 0\quad (A,B\to\infty).$$

C_3: $z=t-i(A+B)$ より、$|z|\ge A+B>R$,

$$|f(z)|\le\frac{M}{|z|}\le\frac{M}{A+B},\quad \left|e^{iaz}\right|=\left|e^{ia(t-i(A+B))}\right|=e^{a(A+B)},\quad \int_{C_3}|dz|=A+B$$

であるから、

$$\left|\int_{C_3} f(z)e^{iaz}\,dz\right|\le\int_{C_3}\left|f(z)e^{iaz}\right||dz|\le\frac{M}{A+B}e^{a(A+B)}\int_{C_3}|dz|=Me^{a(A+B)}\to 0\quad (A,B\to\infty).$$

C_2: $z=-A-it$ より、$dz=-idt$, $|-A-it|\ge A>R$, $|f(-A-it)|\le\dfrac{M}{|-A-it|}\le\frac{M}{A}$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} f(z)e^{iaz}dz\right| &= \left|\int_0^{A+B} f(-A+it)e^{ia(-A-it)}\cdot(-i)dt\right|\le\int_0^{A+B}|f(-A+it)|\,e^{at}dt\le\frac{M}{A}\int_0^{A+B}e^{at}\,dt\\ &=\frac{M(1-e^{a(A+B)})}{A}\le\frac{M}{A}\to 0\quad (A\to\infty).\end{aligned}$$

C_4 についても同様に

$$\left|\int_{C_4} f(z)e^{iaz}\,dz\right|\to 0\quad (B\to\infty).$$

ゆえに

$$\int_{-A}^{B} f(t)e^{iat}\,dt=\sum_{j=2}^{4}\int_{C_j} f(z)e^{iaz}\,dz-2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c<0}\operatorname{Res}(f;c)\to -2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c<0}\operatorname{Res}(f;c)\quad (A,B\to\infty).\blacksquare$$

コメント　細かいことのようですが、紹介した他の公式の多くが $\operatorname{Im} c>0$ となっているので、「それは当たり前ではない」ことを分かってもらうために授業中に紹介した事実です。心配したのだけれど、割と出来ている人が多くてうれしかった。

6.　(1) $I:=\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$ とおく。被積分関数は偶関数であるから、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$. $P(z):=\left(z^2+1\right)\left(z^4+1\right)$, $Q(z):=1$, $f(z):=Q(z)/P(z)$ とおくと、$\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$, $\forall x\in\mathbf{R}$ $P(x)\neq 0$. $P(z)=(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)$ であるから、P の零点は $z=\pm i,\ \dfrac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$. いずれも

1 位である。Q は 0 にならないので、これらの点は f の 1 位の極である。そのうち上半平面にあるものは $i,\ \dfrac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}$.

$$I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c\right)=\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};i\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

$P'(z)=2z\left(z^4+1\right)+4z^3\left(z^2+1\right)$ であるから、

$$\operatorname{Res}(f;i)=\frac{Q(i)}{P'(i)}=\frac{1}{2i(i^4+1)}=\frac{1}{2i(1+1)}=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4}.$$

$c=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき、$c^2=i,\ c^4=-1$ に注意して、

$$\operatorname{Res}\left(f;\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{Q(c)}{P'(c)}=\frac{1}{4c^3(c^2+1)}=\frac{c}{4c^4(c^2+1)}=\frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{4(i+1)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

$c=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき、$c^2=-i,\ c^4=-1$ に注意して、

$$\operatorname{Res}\left(f;\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{Q(c)}{P'(c)}=\frac{1}{4c^3(c^2+1)}=\frac{c}{4c^4(c^2+1)}=\frac{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}{4(-i+1)}=-\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

ゆえに

$$I=\pi i\left(-\frac{i}{4}+\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $I:=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ とおく。$z=e^{i\theta}\ (\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、$dz=ie^{i\theta}d\theta$ より、$d\theta=\dfrac{dz}{ie^{i\theta}}=\dfrac{dz}{iz}$.

$$\begin{aligned}I&=\int_{|z|=1}\frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5z-2(z^2+1)}dz=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{2z(-2z^2+5z-2)}dz\\&=i\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{2z\left(2z^2-5z+2\right)}dz=\frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z\left(2z-1\right)\left(z-2\right)}dz.\end{aligned}$$

被積分関数の極は、分母の零点 $z = 0, \frac{1}{2}, 2$. このうち $|z| < 1$ を満たすものは $0, \frac{1}{2}$. $f(z) := \frac{z^2+1}{z(2z-1)(z-2)}$ とおくと、留数定理から

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{i}{2} \cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}\,(f;c) \\
&= -\pi \left(\mathrm{Res}\,(f;0) + \mathrm{Res}\left(f; \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= -\pi \left(\lim_{z\to 0} (zf(z)) + \lim_{z\to 1/2} \left(\left(z-\frac{1}{2}\right) f(z)\right)\right) \\
&= -\pi \left(\left.\frac{z^2+1}{(2z-1)(z-2)}\right|_{z=0} + \left.\frac{z^2+1}{z\cdot 2(z-2)}\right|_{z=1/2}\right) \\
&= -\pi \left(\frac{1}{(-1)(-2)} + \frac{1+1/4}{1/2-2}\right) = -\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2-8}\right) = -\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{3}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

コメント

- (2) の方が出来が悪かった。複素線積分に変換して、そこでストップという人が少なくない。証明に不等式を用いた極限論法が必要な $\int_{-\infty}^{\infty}$ よりも、留数定理一発で、むしろ簡単なはずですが。留数定理を理解していないということでしょうか。

公式よりも理論の根幹となる定理を大事に !!

積分の公式なんかを覚えてもらうための講義ではないのですが。

- $z^4 + 1 = 0$ が解けない人がいます。$\sqrt{i}$, $i\sqrt{i}$ なんてのが出てきたりして (正数でない数の $\sqrt{}$ は一意的に意味が定まらない)。「方程式 $z^n + 1 = 0$ を解けるようにしましょう」を無視したらいけません。

  言葉遣いは柔らかくするのが世の風潮ですが、「…しましょう」、「…して下さい」、「…した方がよい」をスルーしても大丈夫と思ったら大怪我をします。むしろ「…すべき」の方が重々しそうだけど、スルーしても何とかなることが多い (「毎回復習すべき」とかね)。英語でも should より had better の方が、言うこと聞かないとマズいことになるのが普通ですよ。気をつけましょう。

- (2) で $z = 0$ を見落として、$z = 1/2$ しか計算していない人が多い。

- どちらも結果が虚数にならないことは明らか（あまり「明らか」という言葉は使わないように心がけているけれど、これは本当に明らかですね。どこにも虚数がなくて、方程式の解を求めるというのでもないし。）ところが答案に虚数を書いた人がかなり多い。加点形式で採点していると、そこはただの計算ミスで点が取れないだけのことだけど、おかしい。