微分積分学 2

三重積分の演習

桂田 祐史

2006 年 11 月 2 日

1. 教科書 p.26 の問題 2 の (1), (2) を解け。

これは解答をまるまる公開できないので、ヒントだけ。いずれも通常の極座標を使って変数変換して計算します。授業の記号を使うと、(1) の積分範囲は $D=\{(r,\theta,\phi); 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le\pi/2\}$, (2) の積分範囲は $D=\{(r,\theta,\phi); 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi\}$. 分からなかったら気軽に質問してください。

2. a, b, c を正の定数とするとき、

$$\Omega=\left\{(x,y,z); \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$$

とおく。この体積を求めるために

$$\frac{x}{a}=r\sin\theta\cos\phi,\quad \frac{y}{b}=r\sin\theta\sin\phi,\quad \frac{z}{c}=r\cos\theta$$

という変数変換を行う。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ を求めよ。(2) Ω の体積を求めよ。(3) 次の各集合に対応する r, θ, ϕ の範囲を求めよ。$\Omega_1=\{(x,y,z)\in\Omega; z\ge 0\}$, $\Omega_2=\{(x,y,z)\in\Omega; y\ge 0\}$, $\Omega_3=\{(x,y,z)\in\Omega; x\ge 0\}$, $\Omega_4=\{(x,y,z)\in\Omega; x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$.

解答 (1) まず、

$$x=ar\sin\theta\cos\phi,\quad y=br\sin\theta\sin\phi,\quad z=cr\cos\theta$$

であるから、ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi & ar\cos\theta\cos\phi & -ar\sin\theta\sin\phi \\ b\sin\theta\sin\phi & br\cos\theta\sin\phi & br\sin\theta\cos\phi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

ヤコビアンはこの行列の行列式で

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi & ar\cos\theta\cos\phi & -ar\sin\theta\sin\phi \\ b\sin\theta\sin\phi & br\cos\theta\sin\phi & br\sin\theta\cos\phi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$=abc\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

最後の det は通常の極座標変換のヤコビアンと同じ式であるから、値は $r^2\sin\theta$. ゆえに

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = abc\,r^2\sin\theta.$$

(2) (楕円で似たことをやったが)

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\Omega &\iff \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\le 1\\ &\iff (r\sin\theta\cos\phi)^2+(r\sin\theta\sin\phi)^2+(r\cos\theta)^2\le 1\\ &\iff r^2\le 1\end{aligned}$$

であるから、通常の r, θ, ϕ の条件 $(r\ge 0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi)$ に新たに加わるのは $|r|\le 1$ だけである。よって、Ω に対応するのは

$$D:=\{(r,\theta,\phi);0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi\}.$$

また (1) の結果から、

$$dx\,dy\,dz = \left|abcr^2\sin\theta\right|dr\,d\theta\,d\phi = abc\,r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\phi.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}m_3(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iiint_D 1\cdot abc\,r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\phi = \int_0^1\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi} abcr^2\sin\theta\;d\phi\right)d\theta\right)dr\\ &= abc\int_0^1 r^2\;dr\int_0^\pi\sin\theta\;d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = abc\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi abc.\end{aligned}$$

余談であるが、$a=b=c=R$ とすると、よく知っている球の体積 $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ に一致する (当然)。

(3) $z\ge 0$ に対応するのは $0\le\theta\le\pi/2$ である[1]。 ゆえに Ω_1 に対応するのは

$$D_1:=\{(r,\theta,\phi);0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi\}.$$

$y\ge 0$ に対応するのは $0\le\phi\le\pi$ である[2]。ゆえに Ω_2 に対応するのは

$$D_2:=\{(r,\theta,\phi);0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le\pi\}.$$

$x\ge 0$ に対応するのは、$0\le\phi\le\pi/2$ または $3\pi/2\le\phi\le 2\pi$ である[3]。ゆえに Ω_3 に対応するのは

$$D_3:=\{(r,\theta,\phi);0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ \phi\in[0,\pi/2]\cup[3\pi/2,2\pi]\}.$$

あるいは (通常と違って ϕ を 0 から測ることをやめて)

$$D_3'=\{(r,\theta,\phi);0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ -\pi/2\le\phi\le\pi/2\}.$$

Ω_4 は Ω_1, Ω_2, Ω_3 の共通部分であるから、

$$D_4:=\{(r,\theta,\phi);0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le\pi/2\}$$

が対応する。

なお、$m_3(\Omega_1)=m_3(\Omega_2)=m_3(\Omega_3)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi abc=\dfrac{2}{3}\pi abc$, $m(\Omega_4)=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{4}{3}\pi abc=\dfrac{1}{6}\pi abc$.

---

[1] 厳密にいうと、原点 $(r=0)$ を除いて考えると $z\ge 0\iff r\cos\theta\ge 0\iff\cos\theta\ge 0\iff 0\le\theta\le\pi/2$.

[2] 厳密にいうと、原点や z 軸 $(\theta=0,\pi)$ を除いて考えると $y\ge 0\iff r\sin\theta\sin\phi\ge 0\iff\sin\phi\ge 0\iff 0\le\phi\le\pi$.

[3] 厳密にいうと、原点や z 軸 $(\theta=0,\pi)$ を除いて考えると $x\ge 0\iff r\sin\theta\cos\phi\ge 0\iff\cos\phi\ge 0\iff 0\le\phi\le\pi/2$ または $3\pi/2\le\phi\le 2\pi$.