2005 年度 微分積分学 II 想定問題

桂田 祐史

2006 年 1 月 19 日, 教科書・ノート等持ち込み不可、解答用紙のみ提出

次の **1**〜**5** に解答せよ (もしかすると分量を考えて 4 問程度にするかもしれません)。
注意: 以下では例えば 1 として、出しそうな問題が複数ある場合に、1A, 1B, .. のようにしてあるが、実際の試験では一つしか出さない (選択問題にはしないつもり)。

重積分の計算に関しては、Fubini の定理 (含む積分の順序交換) と変数変換が二大ツールなので、なるべく両方もれなく出題するつもり。

1A. (1) $D=\{(x,y);0\le x\le 1/4,\ 0\le y\le\pi\}$ とするとき、$\displaystyle\iint_D \frac{x}{\cos^2 xy}\,dx\,dy$ を求めよ。
(2) $\displaystyle\iint_D y^2\sqrt{y-x}\,dxdy$ を求めよ。ただし D は 3 直線 $y=x$, $y=1$, $x=0$ で囲まれる三角形。

答 (1) $\dfrac{\log 2}{2\pi}$ (2) $\dfrac{4}{27}$

1B. 累次積分 $I=\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^y (y-x)^2\log(1-x)dx\right)dy$ について以下の問に答えよ。
(1) I の積分の順序交換をせよ。 (2) I の値を求めよ。

答 (1) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^1 (y-x)^2\log(1-x)dy\right)dx$ (2) $-\dfrac{1}{48}$

2A. $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;x^2+y^2+z^2\le x\}$ のとき、$\displaystyle\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$ を計算せよ。

答 $\dfrac{\pi}{12}$.

2B. $\left\{(x,y,z);\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$ の体積を (積分で計算して) 求めよ。

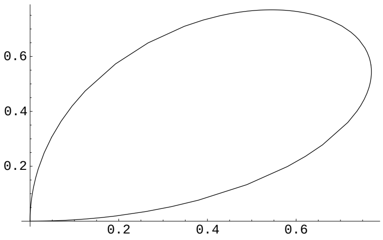
答 プリントではうっかりして変数変換を間違えていました。もちろん $x/a=r\sin\theta\cos\phi$, $y/b=r\sin\theta\sin\phi$, $z/z=r\cos\theta$ $(0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi)$ が正しく、体積は $\dfrac{4\pi}{3}abc.$

3. (1) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ を計算せよ。(2) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ が収束するような正数 α の範囲を求めよ。

答 (1) π (2) $\alpha>1$

4A. 極座標で $r = \sin 2\theta$ $(\theta \in [0, \pi/2])$ で表される曲線について以下の問に答えよ。
(1) 曲線の概形を描け。(2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

答 (1)



(2) $\pi/8$

4B. $\mathbf{R}^2$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + 2xy \\ x^3 + x^2 + 2y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。
(1) $\boldsymbol{f}$ がポテンシャル持つことを示せ。(2) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルを (積分を計算して一つ) 求めよ。
(3) 次の各曲線 C_i にそった線積分 $\displaystyle\int_{C_i} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr}$ を求めよ。 C_1: $(\cos 2t, \sin 3t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.
C_2: 折れ線 $(0,0) \to (-2,0) \to (-2,4) \to (2,4)$.

答 (1) 計算で $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = 0$ を確認して、$\mathbf{R}^2$ が単連結と指摘する。(2) $x^3y + x^2y + y^2$ (これを $F(x,y)$ とおいて (3) で使う) (3) $\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = F(1,0) - F(1,0) = 0$, $\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dr} = F(2,4) - F(0,0) = 64$.

5. $R > 0$, $D := (0,\pi)\times(0,2\pi)$, $(\theta,\phi) \in D$ に対して $\boldsymbol{\varphi}(\theta,\phi) := (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)^T$, $S := \boldsymbol{\varphi}(D)$ とするとき、以下の問に答えよ。
(1) $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} \times \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi}$ を求めよ。(2) S の曲面積を (積分を計算して) 求めよ。(3) ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)^T$ で定めるとき、$\displaystyle\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{dS}$ を求めよ。

答 (1) これは授業でやったし省略。 (2) $4\pi R^2$ (3) 4π