ポテンシャル問題とその数値解法

桂田 祐史

2017 年 6 月 20 日, 2026 年 3 月 12 日

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/

複素関数論 (以下単に「関数論」という) では、Laplace 方程式の境界値問題 (ポテンシャル問題と呼ばれることがある) が良く現れる。その事情を簡単に紹介する。

ポテンシャル問題では、かなり一般的に解の存在と一意性が成り立つが、厳密解が具体的な式で表せることは稀で、多くの場合、数値計算で近似解を求めるしかない。幸い多くの数値解法が利用できる。代表的な数値解法を紹介する。

現象数理学科の学生で、この文書に載っているプログラムの動かし方が分からない人は、相談に応じます。

目 次

1　はじめに

Laplace 方程式 $\triangle u = 0$ の境界値問題を**ポテンシャル問題**という。正則関数の実部・虚部は調和関数 (ラプラス方程式の解) であるため、関数論のあちこちの重要な場面でポテンシャル問題が登場する。例えば関数論で重要な定理の一つである Riemann の写像定理に現れる等角写像を求めるためにも、ポテンシャル問題が現れる。

(2 次元渦無し非圧縮流の速度ポテンシャル ϕ は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad \text{on } \partial\Omega$$

の解である、ということを既に紹介したが、そのような応用上の問題に止まらない、ということを認識してもらいたい。)

ここでは少し一般化した Poisson 方程式の境界値問題

$$-\triangle u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

$$u = g_1 \quad \text{in } \Gamma_1, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad \text{in } \Gamma_2 \tag{1.3}$$

を考える。ここで Ω は平面内の領域で、Γ_1 と Γ_2 はその境界 $\partial\Omega$ を分解したものである ($\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ が成り立つ)。$\boldsymbol{n}$ は Γ_2 上の点における、Ω の外向き単位法線ベクトルである。f, g_1, g_2 は与えられた関数である。

実は、この問題は非常に筋の良い問題であり、様々な数値計算法が適用出来る。ここでは、(1) **差分法**, (2) **有限要素法**, (3) **基本解の方法**を紹介する。

差分法、有限要素法は、偏微分方程式に対する数値解法の、二大スタンダードと言えるもので、そういう有名な方法を紹介出来るのは有意義と考えられる。基本解の方法は、微分作用素の簡単な基本解が分かっているという、Laplace 方程式の特徴を最大限に生かす方法で、Laplace 方程式の解法としては特に優れていると言える。

2 ポテンシャル問題に対する Dirichlet の原理と Poisson 方程式に対する弱解の方法

この節の狙い: 有限要素法の話は、基本的な部分を説明するだけで、セメスターの科目になってしまうようなボリュームがあり、とても短時間で紹介出来るものではないが、FreeFem++ (これはぜひ紹介したい) のプログラムをただの呪文にしてしまわないためには、弱形式にそれなりのしっかりした背景 (弱解の方法) があることを知って欲しい、と考えた。

弱解の方法は、現代の偏微分方程式論になくてはならないもので、学ぶ価値が高い、ということもある。

2.1 ポテンシャル問題に対する解の存在証明、Dirichlet の原理

G. F. B. Riemann (1826–1866) が、今では Riemann の写像定理と呼ばれる定理を発表した際 (1851 年) に、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u = g_1 \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解 u が存在すること証明する必要性が生じた。彼はそれを以下に説明する「**Dirichlet の原理**[1]」を用いて “証明” した。

Riemann による解の存在証明のあらすじ　境界条件 $u = g_1$ (on $\partial\Omega$) を満たす u のうちで

$$J[u] = \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\,dy \quad (\text{この } J \text{ を Dirichlet 積分と呼ぶ})$$

を最小にするものは、$\triangle u = 0$ を満たす。この事実を **Dirichlet の原理**と呼ぶ。実際、v を $v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とするとき、

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小となる (なぜならば、$u + tv$ も同じ境界条件を満たすので、最小性の仮定から $J[u + tv] \geq J[u]$. これを f で言い換えると、$f(t) \geq f(0)$. これは f が $t = 0$ で最小になることを意味する。)。ところで

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\,dy$$

であるから、f は 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるためには

$$1\text{ 次の係数} \quad \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy = 0$$

[1] なんでも、Dirihlet 先生の講義に出て来たのだとか。

が必要十分である。Green の積分公式[2] を適用して

$$\iint_\Omega (u_{xx} + u_{yy}) v \, dx \, dy = 0.$$

これが任意の v について成り立つことから、$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ (厳密には、変分法の基本補題という定理を適用する).

以上の議論から、$J[u]$ を最小にするような u を見出せば問題が解決することが分かる。J は常に $J \geq 0$ を満たすので、J が下に有界でありることは明らかで、従って J の下限が存在する。Riemann は、(この下限は最小値であるから) 最小値を与える u が存在する、と議論したのだが、Weierstrass は「下限は最小値である」ことに疑義を示した (「数学解析」を学んだ人は、いかにも Weierstrass がツッコミそうなところと思うかも)。■

残念ながら若くして亡くなった Riemann は、Weierstrass の批判に答えることが出来なかった。この論法による完全な証明は、約 50 年後 (1900 年頃) に D. Hilbert が解決するまで持ち越された。

本当は、Dirichlet の原理は、C. F. Gauss (1777–1855) がルーツで、物理学の世界ではすでに知られていた考え方で、それを Riemann が純粋数学に応用したのだ、という見方をする人もいる。

2.2 Poisson 方程式に対する弱解の方法

Dirichlet 原理を用いる方法は、Laplace 方程式以外の多くの微分方程式に対しても拡張され、今では「**弱解の方法**」と呼ばれる。

弱解の方法は、数値計算とも相性がよく、そこに基礎を置く W. Ritz による **Ritz の方法**は、1909 年に発表され次第、重要な地位を占めている。この **Ritz-Galerkin 法**は有限要素法の基礎ともなっている。

2.2.1 1 次元の場合の弱解の方法

簡単のため、まず 1 次元版で論じる (多次元でも本質的な違いはない)。

我々の目標は次の問題の解を求めることである。

問題 (P)

(2.1) $$-u''(x) = f(x) \quad (x \in (0,1)),$$

(2.2) $$u(0) = \alpha,$$

(2.3) $$u'(1) = \beta$$

解を求めるために問題の言い換えをする。

この境界値問題 (P) の解は、以下に説明する問題 (W), (V) の解でもある。

まず**弱定式化** (weak formulation) した問題 (W) を述べよう。

そのために記号 X_{g_1}, X を導入する。

(2.4) $$X := \left\{ v \in H^1(0,1) \mid v(0) = 0 \right\}, \quad X_{g_1} := \left\{ v \in H^1(0,1) \mid v(0) = \alpha \right\}.$$

[2] Green の積分公式とは、$\displaystyle\iint_\Omega \triangle u v \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy$ と言うもの。これは発散定理 $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$ に、$\boldsymbol{f} = v \nabla u$ を代入すれば得られる。$\operatorname{div}(v \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla v + v \triangle u$, $\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial u}{\partial n}$ であることに注意する。

(ただし $H^1(0,1)$ は 1 階の **Sobolev 空間**である。おそらくこの講義を履修する多くの人が「初耳」だとも思う。一応説明しておくと、超関数の意味で 1 回微分可能で、その導関数が Lebesgue 積分の意味で自乗可積分であるような関数全体の集合である— ちんぷんかんぷんかもしれないけれど、とりあえず気にしないで進もう)。次の 2 つが大事である。

(a) X と X_{g_1} はともに関数の集合である。

(b) X と X_{g_1} に属する関数 v は、境界条件としてそれぞれ $v(0)=0$, $v(0)=\alpha$ を満たす。

問題 (W)

X_{g_1} に属する u で

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(1) \quad (v\in X) \tag{2.5}$$

を満たすものを求めよ。

(**??**) が問題 (W) における「方程式」と呼ぶべきものであるが、これを**弱形式** (weak form) と呼ぶ。問題 (W) の解 $u\in X_{g_1}$ を元の問題の**弱解** (weak solution) と呼ぶ。

(P) の解が (W) を満たすこと　u が (P) を満たすとする。任意の $v\in X$ を (**??**) にかけて、$[0,1]$ で積分し、部分積分すると、

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

X の定義から $v(0)=0$, また (**??**) が成り立つので、

$$\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \beta v(1).$$

ゆえに

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx + \beta v(1).$$

すなわち u は問題 (W) の解である。 ■

問 1. 逆に問題 (W) の解は、C^2 級であれば、(P) の解でもあることを示せ。

次に変分問題[3](variational problem) にしたものを述べる。

問題 (V)

X_{g_1} に属する u で J を最小にするもの、すなわち

$$J[u] = \inf_{w\in X_{g_1}} J[w] \quad (\inf \text{ は結局は } \min \text{ と書いても良い})$$

を満たすものを求めよ。ただし

$$J[u] := \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx - \beta v(1).$$

[3]変分法を知らない人のために説明: 汎函数 (関数を変数とする関数のこと) の最小値問題を変分問題と呼ぶ。ここでは、$J\colon X_{g_1}\to\mathbb{R}$ が汎函数で、u は J の最小値を与える点となっている。

J が汎関数であることに注意しよう。

(W) と (V) は同値な問題であり、常に一意的な解を持つことが比較的容易に分かる。

問 2. (W) と (V) が同値な問題であることを示せ。(ヒント:

$$J[u+tv]-J[u]=t\left[\iint_0^1 (u'(x)v'(x)-f(x)v(x))\,dx\,dy-\beta v(1)\right]+\frac{t^2}{2}\iint_\Omega (v_x^2+v_y^2)dx\,dy$$

が成り立つことが簡単な計算で確認できる。)

問題 (V) の解 (それは (W) の解でもある) が C^2 級であることを認めると、(P), (W), (V) は互いに同値な問題ということになる。(W) $\Rightarrow$ (P) は、Dirichlet 原理の一般化である (Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の場合、この J は Dirichlet 積分 (の 1/2 倍) に他ならない。)。

そこで問題 (P) を解く代わりに、(W) あるいは (V) を解くことを目指す。

通常、変分法は、変分問題を解くために、それと同値な微分方程式の問題を導き、そちらを解くことで変分問題の解を得るのが普通であるが、ここでは逆に微分方程式の問題を解くために、それを変分問題に書き換え、それを直接解く、という手順の議論をしている。これは、変分法の**直接法**と呼ばれるものになっている。

2.2.2 1 次元の場合の有限要素法

$\{x_i\}_{i=0}^N$ を

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$$

を満たす数列として、

$$\widetilde{X}:=\left\{v\in C([0,1])\;\middle|\; v \text{ は小区間 } [x_i-1,x_i] \text{ では 1 次多項式と一致}\right\},$$

$$\hat{X}:=\left\{v\in\widetilde{X}\;\middle|\; v(0)=0\right\},\quad \hat{X}_{g_1}:=\left\{v\in\widetilde{X}\;\middle|\; v(0)=\alpha\right\}$$

とおくとき、X を $\hat{X}$ で、X_{g_1} を $\hat{X}_{g_1}$ で置き換えた問題を考える。$\widetilde{X}$ の要素を**区分 1 次多項式**と呼ぶ。

次の 2 つの問題は同値であり、常に一意的な解 $\hat{u}$ を持つ。それを近似解として採用する。

$(\widehat{\mathrm{W}})$

Find $\hat{u}\in\hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$\int_0^1 \hat{u}'(x)v'(x)dx=\int_0^1 f(x)v(x)dx+\beta v(1)\quad (v\in\hat{X}).$$

$(\widehat{\mathrm{V}})$

Find $\hat{u}\in\hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$J[\hat{u}]=\min_{w\in\hat{X}_{g_1}} J[w].$$

ϕ_i を、$\phi_i\in\widetilde{X}$,

$$\widetilde{\phi}_i(x_j)=\delta_{ij}$$

を満たすものとする (この条件で ϕ_i は一意的に定まる)。任意の $\hat{u}\in X_{g_1}$ は、

$$\hat{u}(x)=\alpha\phi_0(x)+\sum_{i=1}^N a_i\phi_i(x)$$

の形に一意的に表現出来る。係数 $a_1, \cdots, a_N$ を定めれば良いが、u が (W) (あるいは (V)) を満たすことは、$a_1, \ldots, a_N$ がある連立 1 次方程式の解であることと同値であることが分かる。

実は $\{x_i\}$ が $[0,1]$ の N 等分点であるとき、有限要素解 $\hat{u}$ の x_i での値は、差分解 U_i と一致する。もちろん、いつもそうなるわけではない (もしそうならば、2 つの方法を考える意味がない)。

有限要素法には以下の利点がある。

- 弱形式の議論を済ませてあれば、有限要素解の厳密解への収束の議論は簡単になる。
- 多次元問題の場合に、長方形領域以外でも、それほど苦労なく解析が可能である。
- プログラムの自動生成がしやすい。

2.2.3　2 次元の場合の弱解の方法

部分積分を、その一般化である Green の積分公式に置き換えるだけで、後は 1 次元とほぼ同様の議論が可能である。その結果、次のような弱形式が得られる。

2 次元版 問題 (W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(2.6)
$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds \quad (v \in X).$$

ここで

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\},$$
$$X := \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}.$$

Green の積分公式

(2.7)
$$\int_\Omega \triangle u \; v \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v \, ds - \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d\boldsymbol{x}.$$

(1 次元の場合の、$\displaystyle\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = [u'(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx$ に相当する。)

念のため:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{n}.$$

$\boldsymbol{n}$ は境界 $\partial\Omega$ 上の点における、**外向き単位法線ベクトル**である。

3　有限要素法と FreeFem++

3.1　FreeFem++ プログラム (その 1)

有限要素法は、弱解の方法を原理とする数値計算法である。それはプログラム作成のかなりの部分を自動化出来るため、専用のソフトウェアがいくつか開発されている。