

# 複素関数と流体力学

桂田 祐史

2015年6月17日, 2026年3月12日

COVID19 対応のため、2020, 2021 年度はオンデマンド講義をした。その資料 ([?], [?], [?]) からのフィードバック工事中。どうまとめるのか良く分からない。

## 目次

この文書に関する TODO リスト: Bernoulli の定理、Cauchy の式と応力テンソルの対称性の証明、循環 (circulation) について補足する。境界条件の話も足すべきか?? Navier-Stokes-Korteweg 方程式なんてのもある。

部分的には、授業資料 (スライドなど) の方が整備が進んでいる面がある。

## 1 はじめに

**流体 (fluid)** とは大まかに言って、気体や液体のように“流れるもの”を理想化したものである。圧縮性と粘性という2つの性質の有無によって大きく分類される。

流体の運動を決定せよ、というのは、古くからある問題であるが、非線形の微分方程式が現れる場合もあり、現在でも完全には解決されていない。この講義では、簡単な状況下では、複素関数論を使って取り扱うことが出来る、ということを示す。解決出来る問題は限定的であるが、流体力学に現れる諸概念の紹介が出来るのは良いことだと考えている。

何か一つだけ覚えるとすると、次の1行になるだろう。

**2次元の非圧縮流体のポテンシャル流 (≡渦なしの流れ) = 正則関数**

複素関数論を用いて流体力学の問題を取り扱うことも可能であるし、その逆に複素関数の問題を流体力学のイメージで考えることも出来る。

## 参考書

複素関数と流体力学がオーバーラップするところを学ぶ際の参考書としては、まずは今井 [?] をあげておく (実はあまり読みやすくはない…)。著者の今井功先生 (1914–2004) は、流体力学の権威で、著書の今井 [?] は流体力学の基本的な文献であるとされている。航空機の飛行に関する流体力学の研究で著名であり、有名な「物理学の散歩道」<sup>1</sup>を書いたロゲルギストのメンバーでもある。佐藤の超関数の流体力学的解釈を述べた今井 [?] も非常に興味深い著作である。

流体力学のテキストとしては、[?] 以外に、巽 [?] をあげておく。話題が豊富であることに加え、基本的な部分の説明は特に良く行き届いている。

なお、流体力学の古典とも言える Lamb [?] (初版 1892 年, 最後は 1932 年?) は、数学的にしっかりしているが、複素関数とのからみについても詳しい (現在翻訳本の入手は難しいが、原著の入手は容易である)。

非圧縮流体の方程式の数学的取り扱いについては、岡本 [?] を見よ。

最近では圧縮性流体の研究も盛んであるが、複素関数との関連性は薄くなるので、参考書も紹介しない (筆者は良く知らないので出来ない)。

現実の液体・気体は多かれ少なかれ圧縮性を持っている。無視できるくらい小さい場合に、非圧縮流体として取り扱う、ということになる。空気一つとっても、流速が小さい場合は、非圧縮流体として取り扱うことが出来るが、流速が大きくなるとそれが不適當になり、圧縮流体として取り扱うべき、ということになる (「100 m/s くらいが目安だ」と言う話を聞いたこともある)。

## 予備知識

複素関数論以外に、ベクトル解析と偏微分方程式を用いる。

ベクトル解析については、簡単な復習を付録 ?? に用意しておいた。ベクトル解析は、歴史的には電磁気学や流体力学を記述するために発達したもので、現在でもそれらへの応用を意識しつつ学ぶことは有益である。

(それで、現象数理学科では「電磁気とベクトル解析」という科目が用意されている訳であるが、この科目で流体力学を取り上げるのも、同じような趣旨と言える。)

偏微分方程式については、体験的入門というノリで進める。コンピューターで解く方法をいくつか (FreeFem++ 等) 紹介するので、興味のある人は試してみたい。

テンソルという言葉は初耳という人が多いかもしれない。応力テンソルについては、流体力学や弾性力学の本の解説を読むのが一番と思われる<sup>2</sup>。

---

<sup>1</sup>日本の物理学者の同人会であるロゲルギストが 1959 年から 24 年間、雑誌「科学」(中央公論社) に寄稿したエッセイ集で、岩波書店から「物理学の散歩道」、中央公論社から「新・物理学の散歩道」として単行本化された。

<sup>2</sup>噛んで含めるような感じで書かれているフライシュ [?] はユニークな本であるが、詳しく取り上げている例が、剛体力学の慣性テンソル、電磁場のテンソル、リーマン曲率テンソルであり、流体力学に必要な応力テンソルについては触れられていない (それでも面白い本なので、機会があればめくってみることを勧める)。

## 2 流体力学の方程式

連立偏微分方程式の話になるが、「解け」というわけでないので、あまり怖がらないこと。

数学の文献では、天下りに方程式を書くことも少なくないが、現象の理解のためにはそれでは不十分であろう。以下では、なぜそのような方程式になるか、“理屈”を一応説明してある。物理的にも数学的にも中途半端な説明になっているが、興味を持った人は適当な文献に当たってみて欲しい(今井 [?], Lamb [?], より数学的な解説として、岡本・中村 [?] の §10.2<sup>3</sup>, 岡本 [?], Chorin-Marsden [?], Meyer [?])。

流体の状態は、ふつう次の3つ(2つ? 4つ?)のものを求めて定まる。

- 速度  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$
- 圧力  $p(\mathbf{x}, t)$
- 密度  $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 ... 今回は考えない。

**問 1.** 水、空気のおおよその密度 (SI 単位系) を求めよ。密度の比はどれくらいか。(結果は、 $10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $1.3 \text{ kg/m}^3$ , 770)

(圧力については、後で問を用意してある。)

### 2.1 連続の方程式 (質量保存), 非圧縮条件

連続の方程式 (continuity equation) と呼ばれる次式がつねに成り立つ。

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

**証明** 質量保存が成り立つので、任意の領域  $V$  内の流体の質量の変化は、 $V$  の境界  $\partial V$  から出入りする質量に等しい。

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dx = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

(この右辺が理解出来なければ、ベクトル解析の復習が必要である。すぐ後でフォローする。) 左辺に微分と積分の順序交換、右辺に Gauss の発散定理<sup>4</sup>を用いて

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx.$$

これが任意の  $V$  について成り立つことから、(2.1) を得る。 ■

<sup>3</sup>個人的にはこれがお勧めなのだが、一番入手しにくいかもしれない(一番新しいのに…)。

<sup>4</sup>細かい仮定は省略する。  $\int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx.$

(念のため: (2.2) の右辺の面積分が、単位時間に  $V$  の境界  $\partial V$  をよぎって  $V$  内に流れ込む流体の質量であることは、ベクトル解析では常識的なことであるが、説明を読みたければ、例えば桂田 [?] の例 3.3.2 を見よ。任意の領域  $V$  での積分が等しいことから、被積分関数が等しいことを導くには、例えば  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(a; \varepsilon)|} \int_{B(a; \varepsilon)} f(x) dx = f(a)$  を用いれば良い。これについては、桂田 [?] の例 B.3.1 を見よ。)

**問 2.** (1)  $\operatorname{div}$  の定義を述べよ。(2) (積の微分法)  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$  ( $\nabla$  を使って表すと  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$ ) を確かめよ。

(2.1) は次のようにも書ける。

$$(2.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

$$(2.4) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

で定義される **Lagrange 微分 (物質微分, material derivative)**  $\frac{D}{Dt}$  を用いると、(2.1) は次のようにも書ける。

$$(2.5) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

物質微分について

流体の流れに沿って運動する粒子の、時刻  $t$  での位置を  $\mathbf{x}(t)$  とする。すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数  $f(\mathbf{x}, t)$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t) \dot{x}_j(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t) v_j(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{Df}{Dt}. \end{aligned}$$

密度の Lagrange 微分が 0 であること、すなわち条件

$$(2.6) \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

が成り立つとき、流体は**非圧縮である** (縮まない, incompressible) という。これは

$$(2.7) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

と同値である。(実際、(2.1) ( $\Leftrightarrow$  (2.5)) がつねに成り立つので、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .)

普通は、(2.7) を**非圧縮条件**と呼ぶ。

特に、密度  $\rho$  が定数ならば非圧縮であるが、逆は必ずしも成り立たない。時々、 $\rho$  が定数になることを非圧縮条件と考えている人もいるが、定義は上のようになるそうである。場所ごとに濃度の異なる食塩水の流れを考えると、食塩水は縮まないが、 $\rho$  は定数にはならない。非圧縮かつ (ある瞬間に) 空間的に一様であれば、密度は定数となる (この非圧縮性の説明は、今井 [?] による)。

現実にある液体、気体は程度の差はあれ、圧縮性があるが、しばしば、「流れの速さがマッハ数<sup>5</sup>で 0.3 以上であれば圧縮性の影響を考える必要がある」と言われている。空気の場合は時速 367 km 以上であれば、ということになる。それ以外に、熱現象とも関係していて、流体の温度が著しい高温になったりする場合も圧縮性を考える必要が生じる。

## 2.2 応力テンソルと圧力

この項の内容には、物理学のテキストからの受け売りが多い。詳しい説明が読みたい場合は、例えば異 [?] を見よ。

“方程式の紹介” のつもりである。

重力のような力は体積に比例するため、**体積力** (body force) と呼ばれるが、流体が接触することによって及びす力などは、接触面の面積に比例するため、**面積力** (surface force) と呼ばれる。面積力の場合は、単位面積当たりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。

流体の応力は、もちろん位置  $\mathbf{x}$  と時刻  $t$  に依存するが、それだけでなく面の向きに依存する。面の向きは、その面の外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  で表せる。流体の応力は、位置  $\mathbf{x}$  と時刻  $t$  と向き  $\mathbf{n}$  のみで定まる。これを **Cauchy の応力原理** という。

### Cauchy の応力原理

流体が接触することで及びす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置  $x$ , 時刻  $t$ , 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  で指定する) で定まる。

以下しばらく場所と時刻を固定しておく ( $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ ,  $t = \tau$ )。流体の応力  $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{n}$  の関数である： $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{n})$ .

座標平面に平行な平面  $x_i = a_i$  を通して、正の側が負の側に及びす単位面積当たりの力を

<sup>5</sup>マッハ数とは、流速を音速で割った値である。

$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}$ ,  $P := (p_{ij})$  とおく。  $P$  を **応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ<sup>6</sup>。定義から

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{p}(\mathbf{e}_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるが、実は任意の  $\mathbf{n}$  に対して

$$(2.8) \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) = P^T \mathbf{n} \quad (\text{Cauchy の式})$$

である。

テキストによっては、 $\mathbf{p}(\mathbf{e}_i) = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \end{pmatrix}$  (添字の順番が逆!) と定めている。混乱が起こりそ

うだが、実は応力テンソルについては、角運動量の保存則から、一般に

$$(2.9) \quad p_{ij} = p_{ji}$$

が成り立つ ( $P$  は対称テンソルである) ので、あまり気にする必要はない。

授業では、(2.8), (2.9) が成り立つ理由を説明する余裕はない。こういうことが気になる人は (気になる方が健全だと思うが) 物理学を学ぼう。

**問 3.** (流体力学あるいは弾性力学の本で勉強して) (2.8) を示せ。

**問 4.** (流体力学あるいは弾性力学の本で勉強して) 応力テンソルは一般に対称テンソルであることを示せ。

$\mathbf{v}$  を流体の速度場とするとき、

$$(2.10) \quad E := (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定まる  $E$  を <sup>ひず</sup>**歪み速度テンソル** (rate-of-strain tensor, strain rate tensor) と呼ぶ。

**注意 2.1 (用語・記号について)**  $E$  のことを **変形速度テンソル** (deformation rate tensor) と呼ぶようである。“deformation rate tensor” という言葉はない、“rate of deformation tensor” が正しい、というお説教を読んだこともある。この辺りの用語の使い方については、(私が門外漢であることもあって) あまり自信がない。

また、歪み速度テンソルを表すために  $D$  という文字を使う (つまり  $D = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$  と定める) 人もいる。 $D$  という文字を速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) に使う (つまり  $D = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$  と定める) 人もいるので、注意が必要である。

というわけで、私の結論: これらの記号を用いるときは、言葉だけで説明するのではなく、必ず式を書くべきである。 ■

<sup>6</sup>応力テンソル (stress tensor) を表すために、 $\sigma$  という文字を使うことも多い。 $\sigma$  は  $S$  に対応するギリシャ文字であるから、もっともな選択ではある。

メモ

$\nabla \mathbf{v}$  という記号を使うことがある。 $\mathbf{v}$  の Jacobi 行列の転置行列という意味らしい。

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

この記号を使うと、速度勾配テンソルは  $\nabla \mathbf{v}^T$ 、歪み速度テンソルは  $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ 。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、 $E = 0$  のとき  $P = -pI$  等々)。それから

$$(2.11) \quad P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで  $I$  は単位テンソルである。さらに **Newton 流体**の仮定 ( $P$  は  $E$  の 1 次式) をおくと

$$(2.12) \quad P = (-p + \lambda \operatorname{div} v)I + 2\mu E$$

を得る (岡本・中村 [?] の定理 10.11)。ここで  $\lambda, \mu$  は非負定数であり、 $p = p(\mathbf{x}, t)$  はスカラー関数である。

非圧縮な Newton 流体では

$$(2.13) \quad P = -pI + 2\mu E$$

が成り立つ。ここで  $\mu$  は**粘性率** (粘性係数, 粘度, viscosity) と呼ばれる非負定数であり、 $p = p(\mathbf{x}, t)$  は**圧力** (pressure) と呼ばれる。

以下この文書では、(2.13) が成り立つ流体について論じることにする。(  $\mu$  が定数である場合を **Newton 流体**、定数でない場合を**非 Newton 流体**、と呼ぶそうで、我々は以下では Newton 流体だけを考察する、ということでもある。)

もしも  $\mu = 0$  あるいは  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (静止流体) ならば、 $P = -pI$  であるから、応力  $\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}$  は  $-p\mathbf{n}$  に等しい。つまり応力の方向は面に垂直 (内向き)、大きさは面の方向に依らない一定値  $p$  である。

(応力  $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ , 応力テンソル  $P$ , 圧力  $p$ , と文字  $P$  を使って表すものがたくさんあるけれど、混同しないように気をつけよう。)

$\mu = 0$  である流体を**完全流体** (perfect fluid) または**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。一方、 $\mu > 0$  である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ。

**粘性率はどの程度の大きさか** 粘性率は温度に依存する。摂氏  $20^\circ$  で、水は粘性率  $\mu \doteq 0.001005 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。サラダ油の粘性率は、水の  $60 \sim 80$  倍程度とか。また空気は  $\mu \doteq 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。気体の場合、粘性率は圧力にほとんど依存しない (広い範囲で定数と近似して問題が生じない)。

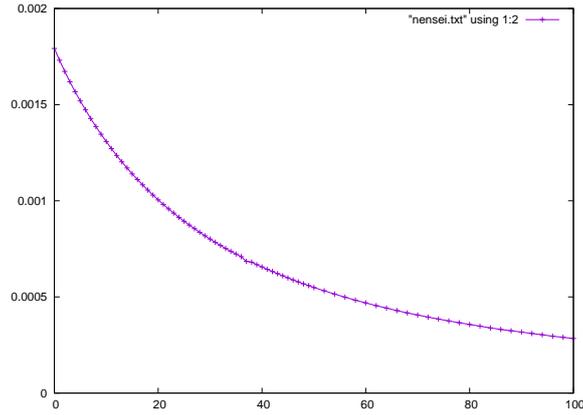


図 1: 水の粘性率の温度依存性 — 縦軸は粘性率 (単位は Pa · s), 横軸は温度 (単位は摂氏)

### 2.3 運動方程式 (運動量の保存)

最初に流体を構成する粒子の加速度は  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  ではなく、 $D\mathbf{v} / Dt$  であることを注意しておく。ただしベクトル場  $\mathbf{v}$  に対する物質微分  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  は

$$(2.14) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} := \begin{pmatrix} \frac{Dv_1}{Dt} \\ \frac{Dv_2}{Dt} \\ \frac{Dv_3}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

で定義する。この右边を  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  と書くことが多い。つまり

$$(2.15) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

であるから、

$$(2.16) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

ということであろう。

問 5. 時刻  $t$  で  $\mathbf{x}$  にある 流体粒子の加速度は  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  でなく、 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  であることを説明せよ。

流体の運動方程式は

$$(2.17a) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P.$$

ただし

$$(2.17b) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとの div})$$

である。

**証明** 任意の領域  $V$  において、運動量の保存から

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma.$$

右辺のベクトルの第  $i$  成分に Gauss の発散定理を適用すると

$$\int_{\partial V} (p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3) d\sigma = \int_{rdV} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i d\mathbf{x}.$$

ゆえに

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_V \operatorname{div} P d\mathbf{x}.$$

この被積分関数を比較する。 ■

**問 6.**  $P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$  ( $\lambda, \mu$  は定数) とするとき

$$(2.18) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (= -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v})$$

であることを示せ。

**余談 2.2 (圧縮性流体の運動方程式)** この文書では圧縮性流体についての議論は行わないが、上の議論から

$$(2.19) \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

が成り立つことが分かる。これが圧縮性流体の運動方程式である。

一様等方弾性体の振動現象のモデル方程式 (弾性波の方程式)

$$(2.20) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

と見比べると面白い。 ■

非圧縮完全流体では  $\operatorname{div} P = -\nabla p$  であるから、運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

すなわち

$$(2.21) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

これが非圧縮完全流体の運動方程式として有名な **Euler 方程式** である。

非圧縮粘性流体では、 $P = -pI + 2\mu E$ . つまり  $\lambda = 0$  とすれば良いので、(2.18) から

$$(2.22) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu (\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

ゆえに運動方程式は

$$(2.23) \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu (\Delta \mathbf{v} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})).$$

非圧縮条件  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  を代入すると (右辺の最後の項が  $\mathbf{0}$  であるので)

$$(2.24) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の運動方程式として有名な **Navier-Stokes 方程式** (Navier-Stokes equation) である。ただし

$$\nu := \frac{\mu}{\rho}$$

とおいた。この  $\nu$  を **動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

**問 7.** (2.21), (2.24) をベクトル表記を用いずに、 $\mathbf{v}$  の成分  $u, v, w$  を用いて表せ。

**問 8.** 静止している池の水圧がどのようになるか、一様な重力場を仮定して、Navier-Stokes 方程式を解いて説明せよ。

**問 9.** 水面から 1 m 下のところの水圧はどれくらいか。1 気圧 (1013 hPa — h は 100 倍を表し、1 Pa は 1 m<sup>2</sup> あたり 1 N の力がかかるということ) の何倍か。

**問 10.** 静止した水の中では  $p(\mathbf{x}) = -\rho g x_3 + \text{定数}$  であることを仮定して (ただし水面を  $x_3 = 0$  と考えている)、アルキメデスの浮力の原理を示せ。

(結果: 物体  $\Omega$  の体積を  $|\Omega|$  と表すことにすると、物体が水から受ける力 (いわゆる浮力) は、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho |\Omega| g \end{pmatrix} \cdots \text{向きは鉛直上向き、大きさは物体の体積の水にかかる重力に等しい}$$

**余談 2.3 (それでは大気圧は?)** 大気圧は同じように求められるだろうか?

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

は成り立つと考えられるが、大気の場合  $\rho$  は定数ではないであろう。状態方程式

$$\rho = \frac{p}{R_d T} \quad (R_d \text{ は気体定数, } T \text{ は温度})$$

を代入して、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -p \frac{g}{R_d T}.$$

$g$  は定数であると仮定すると (本当はそうではないが、空気が残っているような高さでは、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  として十分良い近似になる)、

$$\log p(z_1) - \log p(z_0) = -\frac{g}{R_d} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{T}.$$

ところが温度  $T$  は (気象条件や  $x, y$  への依存性については目をつむるにしても)  $z$  にも依存する。熱力学的な議論が必要になる。細かいことは無視すると、圧力は高度  $z$  についての指数関数で近似できるが、合致の程度はほどほどである。

(少し話がトンド) 飛行機の高度計は、本当は気圧計だそうである<sup>7</sup>。  $T(z)$  の標準値を定めて、それから関数  $p(z)$  を求めておき、測定した気圧の値から高度  $z$  を推定する (小倉 [?])。 ■

Euler 方程式も、Navier-Stokes 方程式も非線形偏微分方程式である (速度の物質微分  $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  が  $\mathbf{v}$  について非線形であることに注意する)。

$\nu\Delta\mathbf{v}$  を粘性項と呼ぶ。Navier-Stokes 方程式の粘性項を落としたものが Euler 方程式である。

一方、Navier-Stokes 方程式の非線形項  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  を落とした線形方程式

$$(2.25) \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}.$$

を **Stokes 方程式** と呼ぶ。線形方程式であるので、数学的には大分簡単化したことになる。乱暴な近似であるように感じられるかもしれないが、流速が小さい場合には、Stokes 方程式は Navier-Stokes 方程式の実用上十分良い近似になっている、と言われている。

**余談 2.4 (Navier-Stokes 方程式 — 間違えずに覚えられるか)** Navier-Stokes 方程式 (2.24) を初めて学んだとき、こんな (複雑な形をした) 方程式を覚えられるのだろうか、と不安に思ったものである。その方程式を某コミックスの中<sup>8</sup>で見つけてちょっと驚いた。Navier-Stokes 方程式もメジャーの仲間入り? でも残念ながら誤植があった。

$$(2.26) \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (\text{間違い探し}).$$

( $\mathbf{F}$  は外力項であり、これは誤植ではない。また、ラプラシアン  $\Delta$  を  $\nabla^2$  と書くのも、よくある流儀であって、誤植ではない。) (2.26) の誤植を正せ、という問題を試験に出そうか考えてみたことがあるけれど、さすがに悪趣味かと思ってやめた。練習問題くらいが良いだろうか。 ■

**問 11.** (2.26) の誤植を正せ (解答 p. ??)。

<sup>7</sup>GPS のある現在もそうであるかは疑問である。もう違っているのかしら?

<sup>8</sup>蛇蔵, 「決してマネしないでください。3」, 講談社 (2016) の p. 142.

## 2.4 数学的チャレンジ: Euler 方程式、Navier-Stokes 方程式は解けるか?

一般に、未知関数の個数と方程式の個数が一致することが方程式が解けるための必要十分条件というわけではないが (例外はいくつもあげられる)、以下のように考えると分かりやすいと思われる。

ベクトルを成分ごとに分けて考えると、連続の方程式は1つの方程式で、運動方程式は3つの方程式である。速度と圧力で4つの未知関数であるから、密度が既知であるとすれば、連続の方程式と運動方程式を連立すると、未知関数の個数と方程式の個数が4でつりあって、速度と圧力が求まる可能性があると考えられる。

例えば密度が定数の場合、連続の方程式は非圧縮条件となり、これと Euler の方程式、または Navier-Stokes 方程式、さらに適当な境界条件と初期条件を連立させた初期値境界値問題の解の存在と一意性を調べよ、という数学的な問題が考えられる。

これは古典的な問題であるが、非線形偏微分方程式であるために難しく、3次元領域における非定常 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題は、現在も完全な解決には至っていない。これについては、岡本 [?] を見よ。

## 2.5 状態方程式

(ここは授業ではごく簡単に。最初の段落だけ?もしかしたらカットする。)

$\rho$  が未知関数のときは、連続の方程式と運動方程式だけでは、方程式が不足していて解けない。そこで、以下に説明する状態方程式を補うことが多い。

$p$  が  $\rho$  のみの関数である、というバロトロピー流体の仮定

$$p = f(\rho)$$

をおくことで解ける場合が多い。具体的には、例えば断熱変化を仮定すると、 $\exists \gamma > 1$  s.t.

$$\rho \propto p^{1/\gamma}.$$

等温変化を仮定すると、

$$\rho \propto p.$$

より一般に

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla w$$

を満たす  $w$  が存在するとき、**isentropic** であるといい、 $w$  を**エンタルピー** (enthalpy) と呼ぶ。バロトロピー流体は isentropic である。

## 3 非圧縮流体の渦なしの流れ

(以下の話では、粘性はあっても良い。言い換えると完全流体でも、粘性流体でも、以下の話は通用する。以下の議論を見ると、Laplace 方程式や Poisson 方程式の重要性が感じられると思われる。これについては別の解説を用意する。)

### 3.1 渦度と渦なしの流れ

$v$  を流体の速度場とするとき、

$$\omega := \text{rot } v \quad (\text{これは } \nabla \times v \text{ とも書ける})$$

を渦度 (vorticity) と呼ぶ。これは流体粒子の自転の角速度の2倍に等しい (そうである)。  
 $\omega = \mathbf{0}$  であるとき、流体は渦なしまたは非回転 (irrotational), 層状 (lamellar) という。  
流体が渦なしであれば、局所的に  $v$  のポテンシャル  $\phi$  が存在する:

$$v = \nabla \phi.$$

(この  $\nabla \phi$  は grad とも書ける。)

### 3.2 完全流体における Lagrange の渦定理

(ここはしばらく工事中)

今井 [?] の第2章「完全流体」は内容豊富である。そこからいくつかピックアップする必要を感じている。

「粘性のないバロトロピー流体が保存力のもとに運動するとき、渦は発生することも消滅することも無い。」という Lagrange の渦定理が成り立つ。

実在の流体は必ず粘性を持つが、Reynolds 数が大きい場合は完全流体という近似 (“理想化”) が許される。

物体表面の薄い境界層では、粘性の効果が現れ渦が発生するが、それ以外の場所では渦の発生は見られない。また境界層から渦がはがれて、渦が “主流” の中に押し出されて行くことがあるが、その場合その渦はなかなか消えない。

### 3.3 非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (3次元の場合)

流体の速度場  $v$  に対して、

$$\nabla \phi = v, \quad \text{i.e.} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

を満たす  $\phi$  (いわゆる  $v$  のポテンシャル) が存在するとき、 $\phi$  を流体の速度ポテンシャルと呼び、その流れはポテンシャル流であるという。

問 12. (ベクトル解析の復習がてら)

- (1) ポテンシャル流は渦なしであることを示せ。
- (2) 単連結領域内の渦なしの流れはポテンシャル流であることを示せ。

以下、流体が非圧縮で渦なしであり、領域全体で  $\mathbf{v}$  のポテンシャル  $\phi$  が存在すると仮定する。一般に  $\operatorname{div} \nabla = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$  であるから、

$$\Delta \phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

非圧縮条件  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  を用いると

$$(3.1) \quad \Delta \phi = 0.$$

すなわち、非圧縮流体のポテンシャル流において、速度ポテンシャルは調和関数である。まとめると

**渦なしならば (局所的には) 速度ポテンシャルが存在し、  
さらに非圧縮ならば速度ポテンシャルは調和関数である。**

例えば、流体の占める領域  $\Omega$  の境界で  $\mathbf{v}$  が分かっているならば、 $(\partial \phi / \partial \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$  より)

$$(3.2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial \Omega)$$

であるから、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題 (3.1), (3.2) が得られ、それを解けば  $\phi$  が求まる ( $\mathbf{v}$  も求まる)。

このような Laplace 方程式の境界値問題は**ポテンシャル問題**と呼ばれる。ポテンシャル問題は非常に重要である。流体力学に限ったものではないので、別文書にまとめることにする。

ここでは、連続の方程式から導かれる非圧縮条件だけから (運動方程式を用いずに)  $\mathbf{v}$  が求まった。それが出来た理由は、ポテンシャルが存在する場合は、非圧縮条件は1つの未知関数  $\phi$  に関する1つの方程式 (3.1) に帰着されるから、と言えるであろう。

上のようにして、速度が求まったとして、残る圧力は運動方程式から求められると期待される。それについて、一つの定理を紹介しよう。

完全渦なし流体のポテンシャル流においては、(さらに適当な仮定を追加において) 「一般化された **Bernoulli の定理**」が成り立つ。ここでは簡単のため、 $\rho$  が定数 (つまり一様で非圧縮) と仮定しよう。 $\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla p$  であるから、Euler 方程式に代入して、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right).$$

ベクトル解析の公式

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

より

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

$\mathbf{v} = \nabla \phi$  と、 $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  を代入すると

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{0}.$$

これから  $t$  のみの関数  $g = g(t)$  が存在して

$$(3.3) \quad p = -\rho \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g(t) \right].$$

これを一般化された **Bernoulli の定理** と呼ぶ (以上の議論は完全渦なしのバロトロピー流体に拡張出来る)。

大雑把に言って、 $\phi$  が分かっているならば、 $p$  も求まる、ということになる (細かい注意: 方程式の中で  $p$  は  $\nabla p$  の形でしか現れないので、もともと  $p$  は一意的には定まらない)。

### 3.4 非圧縮流体の渦なしの流れとポテンシャル (2次元の場合)

流体の流れが2次元的であるとは、 $\mathbf{v}(x, t) = (u, v, w)$  が次の条件を満たすことを言う。

(a)  $z$  成分である  $w$  は 0.

(b)  $z$  によらない。

すなわち

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & v & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & w & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x - u_y \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \omega := v_x - u_y.$$

以下では、2次元の速度場  $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$  について考えることにして、

$$(3.4) \quad \text{rot } \mathbf{v} := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u \\ \frac{\partial}{\partial y} & v \end{vmatrix} = v_x - u_y$$

と定める (割と良くやる定義)。

三次元の場合と同様に、

- $\mathbf{v}$  がポテンシャルを持てば ( $\mathbf{v} = \nabla \phi = (\phi_x, \phi_y)$  を満たす関数  $\phi$  が存在すれば)、 $\omega = 0$ .
- $\omega = 0$  であれば、 $\mathbf{v}$  は局所的にはポテンシャルを持つ。
- $\omega = 0$  であり、考えている領域  $\Omega$  が単連結であれば、 $\mathbf{v}$  は  $\Omega$  全体でポテンシャルを持つ。

$\phi$  のことを流体の速度ポテンシャルと呼ぶのは3次元と同様である。

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = u_x + v_y = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

ゆえに流体が非圧縮であれば  $\Delta\phi = 0$ .

$\omega = 0$  であることを渦なしの定義とする本が多いが、実際には領域全体でポテンシャルが存在することを仮定しているの、ポテンシャルが存在することと渦なしの定義と考えるのが良いかもしれない。あるいはポテンシャルが多価関数になることを許して扱うことになる(そうしている場合もある)。

ところで

$$\begin{aligned} \text{非圧縮} &\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x + v_y = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x = (-v)_y \\ &\Leftrightarrow \text{局所的に } \exists \psi \quad \text{s.t.} \quad \psi_x = -v, \quad \psi_y = u. \end{aligned}$$

問 13. 上のことを確かめよ。

問 14. 流れ関数が存在し、境界条件  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  が成り立つとき、流れ関数は境界をなす各閉曲線の上で定数であることを示せ。

一般に

$$(3.5) \quad \psi_x = -v, \quad \psi_y = u$$

を満たす  $\psi$  を  $\mathbf{v} = (u, v)$  の**流れ関数** (stream function) と呼ぶ<sup>9</sup>。このとき、流れ関数は次の Poisson 方程式を満たす:

$$-\Delta\psi = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = -(-v_x + u_y) = \omega.$$

ゆえに渦なしの非圧縮流ならば、流れ関数は調和関数である:

$$\Delta\psi = 0.$$

さらに、このとき

$$(3.6) \quad \phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x.$$

が成り立つ。

これは

$$(3.7) \quad f(z) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

---

<sup>9</sup>一般に、時刻  $t$  における流れの流線 (stream line) とは、流れの領域の中の曲線で、その各点における曲線の接線ベクトルと、その点における流れの速度ベクトルの向きが一致するものをいう。曲線を  $s \mapsto \mathbf{x}(s)$  とすると、 $\mathbf{x}'(s) \parallel \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), t)$  を満たすことが流線であるための条件である。

についての Cauchy-Riemann 方程式である。ゆえに  $f$  は正則関数である。

$f$  を  $v$  の複素速度ポテンシャルという。

$f = \phi + i\psi$  であるとき、

$$f' = \phi_x + i\psi_x = u - iv$$

であるから、

$$u = \operatorname{Re} f', \quad v = -\operatorname{Im} f'.$$

$f'$  の極形式を  $f' = qe^{-i\theta}$  とすると、 $v = \begin{pmatrix} q \cos \theta \\ q \sin \theta \end{pmatrix}$ 。ゆえに  $q$  が速さ、 $\theta$  が速度の方向となる。

このことを背景に、 $f'$  のことを複素速度と呼ぶ(共役複素速度と呼ぶ人もいるらしく、その気持ちわかるけれど、複素速度という方が普通である)。

まとめると、2次元の流れについて

- (1) 渦なしならば (局所的には) 速度ポテンシャルが存在する。  
(逆に速度ポテンシャルが存在するならば渦なしである。)
- (2) 非圧縮ならば (局所的には) 流れ関数が存在する。  
(逆に流れ関数が存在するならば非圧縮である。)
- (3) 非圧縮かつ渦なしならば (局所的には) 速度ポテンシャル  $\phi$ , 流れ関数  $\psi$  が存在して、ともに調和関数である。 $\psi$  は  $\phi$  の共役調和関数であり、 $f := \phi + i\psi$  は複素速度ポテンシャルと呼ばれる正則関数となる。
- (4)  $v = (u, v)$  の複素速度ポテンシャル  $f$  が存在するとき、 $f' = u - iv$ 。

**注意 3.1**  $\Omega$  が単連結でなくても、 $\Omega$  全体で一価関数の流れ関数が存在する場合もある。実際、一価関数となるためには、 $\Omega$  内の任意の閉曲線  $C$  に対して、

$$\int_C u \, dy - v \, dx = \int_C \psi_x \, dx + \psi_y \, dy = 0$$

が成り立つことが必要十分である。(穴があると、その周りを一周積分すると0にならないかもしれないが、いつも  $\neq 0$  というわけではない。) ■

**問 15.** 流れ関数が存在するとき、Euler 方程式は次のように書ける ( $p$  が消去できることに注目)。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - J(\psi, \Delta \psi) = 0.$$

ただし

$$J(f, g) := f_x g_y - f_y g_x.$$

(流れ関数が存在するならば非圧縮なので、この方程式は、Euler 方程式と非圧縮方程式を連立させた方程式と同値であることになる。)

### 3.5 流線と等ポテンシャル線

速度場や圧力が時刻によらない場合を定常解、定常流と呼ぶ(流体が止まっているのではない)。定常流を可視化するための最も適当な方法は流線を描くことである。

**定義 3.2** 時刻  $t$  における流れの流線 (streamline) とは、流れの領域の中の曲線で、その各点における接線ベクトルと、その点における流れの速度ベクトルの方向が一致するものをいう。式で表すと、曲線  $s \mapsto \mathbf{x}(s)$  で、

$$\mathbf{x}'(s) \parallel \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), t)$$

を満たすものが流線である。

- 流線は時刻ごとに異なる。
- 流線は粒子の軌道とは異なる概念であるが、定常流の場合は流線は粒子の軌道と一致する。
- 他に流脈線というものもあるが省略する。(流れの実験で良く可視化されるが、これには流線とも、粒子の軌道とも一致しない。)

2次元の場合、流れ関数の任意の等高線は、流線である。

**例 3.3 (円盤領域内のポテンシャル流の有限要素法による計算)**  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2)$  のとき、Laplace 方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0 \quad ((x, y) \in \Omega), \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \quad ((x, y) \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

の解として、速度ポテンシャル  $\phi$  が求まる。その等高線 (等ポテンシャル線) を描く。同様に流れ流線を求めて、流線を描く。速度場は  $\mathbf{v} = \nabla \phi$  として求まる。次のプログラム potential2.edp

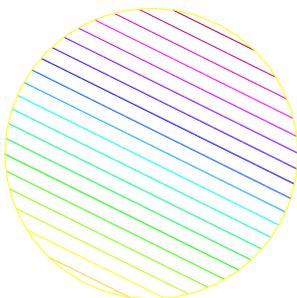


図 2: 等ポテンシャル線

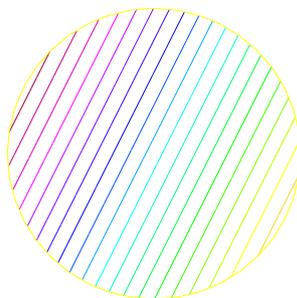


図 3: 流線

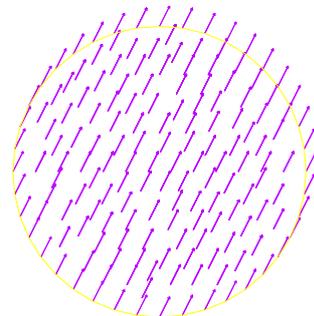


図 4: ベクトル場

を用意して、

## FreeFem++ による数値計算&結果の描画

\$ FreeFem++ potential2.edp

(1つ図を描くごとに止まるので、`Enter` キーを押して、次に進む。最後に `esc` キーを押して終了する。)

potential2.edp

```
// potential2d.edp
// http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d.edp
// 2次元非圧縮ポテンシャル流
// 速度ポテンシャル、流れ関数、速度を求め
// 等ポテンシャル線、流線、速度場を描く

border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");

fespace Vh(Th,P1);
Vh u, v, phi, psi;
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で、V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th) (dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma) (Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);

// 流れ関数ψを求め、その等高線（流線）を描く（ちょっと安直なやり方）
func Vn2=y-2*x;
solve Laplace2(psi,v) =
  int2d(Th) (dx(psi)*dx(v)+dy(psi)*dy(v))
  -int1d(Th,Gamma) (Vn2*v);
plot(psi,ps="streamline.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線と流線を同時に描く
// plot(phi,psi,ps="lines.eps", wait=1);

// ベクトル場 (u,v)=∇φ を描く（ちょっと雑なやり方）
u=dx(phi);
v=dy(phi);
plot([u,v],ps="vectorfield.eps");
```

流体内にある仮想的な曲線（障害物にはならないという意味）の微小部分  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$  を通過する流量（単位時間あたりの体積）は、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$  であり、

$$\mathbf{n} ds = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = -v dx + u dy = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi.$$