

応用複素関数レポート課題2

桂田 祐史

2024年6月18日

レポート課題2

次の(1)と(2)を行うこと。どちらも正則関数の定める流れを可視化し説明する、という問題である。

- (1) 6月18日の授業「流れの合成」(講義ノート「複素関数と流体力学」[1]の§4.3「基本的な流れの重ね合わせ」に対応している、またスライドPDFも公開してある)から3つの流れを選んで、等ポテンシャル線、流線、ベクトル場を適当に(流れの様子が良く分かるように)可視化し、流れがどのようなものか説明せよ(特に流速に注意すること)。特徴的な流線における流れ関数の値が分かるように説明すること。

注意: 3つの基本的な流れそのもの(一様流, 湧き出し& 吸い込み, 渦糸)は該当しない。そういうものを重ね合わせた流れを説明せよ、ということである。

[どのように取り組むか] 一様流、湧き出しのサンプル・プログラム (Mathematica) は

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/fluid_mathematica/

で公開してある。それらは講義内容と対応するように書かれていて、それを解読すれば要領は分かるはず。細かいところは各々の流れに合うように直す必要がある。

- (2) 自分で思いつく正則関数を3つ以上試し(「係数だけを変えて数合わせ」ではなく、なるべく授業の例と「違う」ものを選ぶこと。三角関数・指数関数には注意が必要(例えば \sin と \cos , \cos と \cosh は本質的には同じであり($\because \sin(z + \pi/2) = \cos z$, $\cosh(iz) = \cos z$), そういう同じものを選ぶのはつまらない)、1次分数変換 $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ など、色々な関数を知っているはず。そのうちの2つを選んで、それを複素速度ポテンシャルとする流れについて、等ポテンシャル線、流線、ベクトル場を適切に可視化し、それをもとにどういう流れであるか説明する。

今井 [2], [3], 巽 [4] などを見て、授業で取り上げていないものを選んでよい。

- 〆切は7月12日(金)(23:00)。提出は Oh-o! Meiji を用いる。
- 原則として、レポート本文はA4サイズの(なるべく1つの)PDF形式とする。A4の紙に手書きしたものをスキャンしても良い(図に書き込みをする場合はそれがやりやすいかもしれない)。

参考 「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」¹

¹https://m-katsurada.sakura.ne.jp/how_to_pdf/

- 今回、プログラミング言語は Mathematica を想定しているが、自分の MacBook で実行できるものならば何を使っても構わない。
- プログラムとその実行結果、再現するための情報 (入力パラメーターは何かとか) もレポートに含めること。
- プログラムはレポート本文に含めても良いし、別ファイルとして提出しても良い。
- (今回は問題にならないと思われるが) 図を PDF で出力するとサイズが大きくなることもある。そのことで Oh-o! Meiji のファイル・サイズの制限 (1 ファイル 30MB 未満) に引っかかった場合は工夫すること。

(a) 複数の PDF に分割する。 (b) 複雑な図は PDF よりも、PNG のようなイメージ形式に変換するとサイズが抑えられることが多い。

- ベクトル場表示は、意外と手間がかかることもある。

授業で `VectorPlot[]` という関数を紹介したが、これは Mathematica の比較的新しい関数であり、仕様が固まり切っていない。例えば `VectorScaling` というオプションも、version 12.1 で導入されたもので、それ以前の Mathematica にはない (代わりに `VectorScale` というオプションがあった)。使い方はマニュアルを見ること。

図を描くには、問題ごとの工夫が必要で微調整はするもの、と考えること (気軽に相談して下さい)。

- 湧き出しのサンプル・プログラム `source.nb`² のように、`Boolean[]` を使って、特定の点の近傍のベクトル場を描くことをやめたり出来る。場所ごとに違う設定で図を描いて、それぞれ見せるとか、合成して一つの図を作るとか。
- `VectorScaling` オプションを使わずに、自分で 0 でないベクトルの長さを 1 に正規化してしまうなどの工夫もできる (サンプル・プログラムでは、単に $f'[x+I y]$ の実部と虚部を取り出して `vv[]` を作ったが、そこで処理を加える)。
- この際、新しい Mathematica にバージョンアップする、というのも検討するとよい。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf> (2015～).
- [2] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [3] 今井功：等角写像とその応用, 岩波書店 (2013/9/10).
- [4] たつみともまさ 巽友正：流体力学, 培風館 (1982).

²<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/source.nb>