

応用複素関数 第5回

～ Riemann 球面と1次分数変換 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024年5月14日

目次

- 1 連絡事項&本日の内容
- 2 Riemann 球面, 1 次分数変換 (続き)
 - Riemann 球面の幾何学的イメージ
 - Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入
 - 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である
 - Riemann 球面は Riemann 面である
 - 1 次分数変換の鏡像の原理
 - 1 次分数変換による領域の等角写像
- 3 参考文献

- 今回は、Riemann 球面と 1 次分数変換 (桂田 [1] の §3, §5 の内容) の 2 回目です。

トポロジーについての予備知識がないと分かりにくい (かもしれない) ところがありますが、あえて紹介しました。その部分は「そういうものか」くらいに流してもらって結構です。
- 次回からは、しばらく関数論の流体力学への応用の話をする予定です (資料は [1] とは別に、桂田 [2] を提供します)。Mathematica を使うので、起動するかどうかチェックしておいて下さい。もし起動できなくなっている場合、アクティベーション・キーの再発行が必要かもしれません。そのような状況になった場合、気軽に相談して下さい。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。 $\widehat{\mathbb{C}}$ は \mathbb{R}^3 の球面と同一視できるから。

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

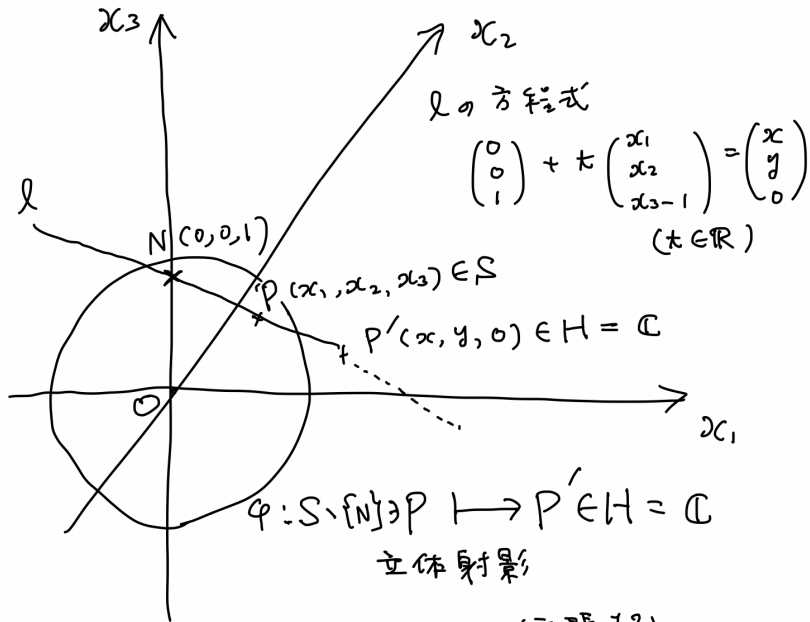
とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 \mathbb{C} と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、 N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。 P に P' を対応させる写像

$$\varphi: S \setminus \{N\} \ni P \mapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、 N からの**立体射影** (stereographic projection) と呼ぶ。

注 以下で、 $\varphi(N) = \infty$ と定めることで、 φ を S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像に拡張する。その拡張した写像も**立体射影**と呼ばれる。



$\varphi(N) = \infty$ と拡張すると
 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (2) 立体射影の式

問 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = (x, y, 0)$ とするとき、次式を示せ。

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{すなわち} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

(ヒント: 2点 N, P を通る直線と、平面 $x_3 = 0$ との交点を求める。)

問 $\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、 $z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ は次のように解けることを示せ。

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}.$$

(ヒント: $|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$ を導出した後、 x_3, x_1, x_2 の順に求める。)

(逆写像が存在するので)

立体射影 $\varphi: S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ は全単射である。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (3) S と $\widehat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\lim_{P \rightarrow N} \varphi(P) = \infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。

そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & ((x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\}) \\ \infty & ((x_1, x_2, x_3) = N = (0, 0, 1)). \end{cases}$$

元々は、 S のことを Riemann 球面と呼び、 φ によって $\widehat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、 $\widehat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

問 次のことを確かめよ (幾何学的考察および計算の両方で)。

$$\varphi(\text{北半球}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}, \quad \varphi(\text{南半球}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

$$\varphi(\text{赤道}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

$$\varphi(\text{北極}) = \infty, \quad \varphi(\text{南極}) = 0.$$

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を2つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法1 一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。 $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\| \quad (\|\cdot\| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、 d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}.$$

図形イメージは鮮明だけれど、式はちょっと面倒 (個人の感想です)。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 (慣れると便利 オススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

定義 5.1 (近傍, 近傍系, 基本近傍系)

X を位相空間, $x \in X$ とする。

- ① $A \subset X$ とする。 A が x の**近傍**であるとは、ある開集合 U が存在して、 $x \in U \subset A$ が成り立つことをいう。
- ② x のすべての近傍からなる集合族を、 x の**近傍系**と呼ぶ。
- ③ \mathcal{U} は x の近傍からなる集合族とする。 \mathcal{U} が x の**基本近傍系**であるとは、

$$(\forall V : V \text{ は } x \text{ の近傍})(\exists U \in \mathcal{U}) \quad U \subset V$$

が成り立つことをいう。

x の近傍系は1つしかない。 x の基本近傍系はしばしばたくさんある。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

例 5.2 (距離空間の点の基本近傍系)

(X, d) を距離空間とする。

$x \in X, r > 0$ に対して、 $U(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ とおき、 x の r 近傍と呼ぶ (x を中心とする半径 r の開球である)。

X の部分集合 Ω が開集合であるとは

$$(\forall x \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad U(x; \varepsilon) \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

$x \in X$ に対して、 $\mathcal{U} := \{U(x; \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ とおくと、 \mathcal{U} は x の基本近傍系である。(実際、まず \mathcal{U} の任意の要素 $U(x; \varepsilon)$ は、 x を含む開集合であるから、 x の近傍である。また、 V を x の任意の近傍とすると、 $x \in \Omega \subset V$ を満たす開集合 Ω が存在する。ゆえにある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $U(x; \varepsilon) \subset \Omega$. $\mathcal{U} := U(x; \varepsilon)$ とおくと、 $\mathcal{U} \subset V$.)

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、 X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

- ① $(\forall x \in X) \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X) (\forall U \in \mathcal{B}(x)) x \in U$.
- ② $(\forall x \in X) (\forall U, V \in \mathcal{B}(x)) (\exists W \in \mathcal{B}(x)) W \subset U \cap V$.
- ③ $(\forall x \in X) (\forall U \in \mathcal{B}(x)) (\exists V \in \mathcal{B}(x)) (\forall y \in V) (\exists W \in \mathcal{B}(y)) W \subset U$.

このとき、 X の部分集合からなる集合族 \mathcal{O} を

$$\mathcal{O} := \{ \Omega \subset X \mid (\forall x \in \Omega) (\exists U \in \mathcal{B}(x)) U \subset \Omega \}$$

で定義すると、 \mathcal{O} は**位相の公理**を満たす。また、 $\mathcal{B}(x)$ は位相空間 (X, \mathcal{O}) における x の基本近傍系である。

3番目の条件より、 $\mathcal{B}(x)$ が基本近傍系となるような位相の一意性が導かれる。詳しくは、例えば MATHPEDIA [3] 命題 2.11 を見よ。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

\mathbb{C} においては、各 $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$B(a) := \{U(a; r) \mid r > 0\}, \quad U(a; r) := D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常 \mathbb{C} の位相である。

新たに $B(\infty)$ を定めて、 $B(a)$ ($a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、 $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相が定義できる。結論を天下りに述べると、次のようにすれば良い。

$$B(\infty) := \{U(\infty; R) \mid R \in (0, +\infty)\}, \quad U(\infty; R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、 $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は \lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、 φ も φ^{-1} も、 $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が全単射であり、 φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、 φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、 X と Y は**同相**であるという。

分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

実は、 $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像は1次分数変換に限る。

→ 1次分数変換の重要性が分かる。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に^{たようたい}多様体 (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には \mathbb{R}^n または \mathbb{C}^n の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に \mathbb{C} の円盤とみなせるような位相空間 (1次元の複素多様体) を **Riemann 面** とよぶ。

\mathbb{C} 自身や、 \mathbb{C} の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、 $a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a; r) = D(a; r)$ はそのまま \mathbb{C} の円盤であるし、 ∞ の近傍 $U(\infty; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により \mathbb{C} の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

この座標変換 $w = 1/z$ により、 $z = \infty$ においても、関数の微分可能性や留数を考えたりできる。($F(w) = f(1/w)$ が $w = 0$ で微分できるとき、 f は ∞ で微分可能という等。) **これは実はよく使われる。**

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

\hat{C} の円は1次分数変換で \hat{C} の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 5.3 (円に関して鏡像の位置)

C は \hat{C} の円であり、 $z, z' \in \hat{C}$ とする。 z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは、次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

- Ⓐ C が \mathbb{C} の直線であり、 z と z' が C に関して対称の位置にある。
- Ⓑ C が \mathbb{C} の円であり、 z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z - c||z' - c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 5.4 (1次分数変換の鏡像の原理)

C は \hat{C} の円、 z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある2点、 f は1次分数変換とすると、 $f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。 f が平行移動 $T_d(z) = z+d$ 、定数倍 $M_a(z) = az$ ($a \neq 0$)、反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の1次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ のときは、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

ヒント z, z' が c から発する一本の半直線上にあり、かつ $|z-c||z'-c| = r^2$ を満たすためには、 $(z-c)(\overline{z'}-\bar{c}) = r^2$ を満たすことが必要十分である。

以下各自に任せる。

領域の等角写像という概念を紹介する。これについては後で詳しく説明するが、有名かつ重要な話を3つ“先行上映”する。

- ❶ Riemann の写像定理
- ❷ 単位円盤の等角写像
- ❸ 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が1次分数変換となることが、1次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1次分数変換は基本的ツールとして使われる。

(等角写像 (conformal mapping) は複素関数で既出。複素関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が等角であるとは、 f が正則かつ $(\forall z \in \Omega) f'(z) \neq 0$ を満たすことをいう。等角写像は交わる2曲線のなす角を変えない。)

2.11 1次分数変換による領域の等角写像 写像定理

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、^{そうせいそく}**双正則** (biholomorphic) という。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、 $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$ が双正則であるとき、 φ を **Ω の等角写像** あるいは **Ω の写像関数** (Riemann mapping, Riemann mapping function) とよぶ。

定理 5.5 (Riemann の写像定理)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω が単連結で、 $\Omega \neq \mathbb{C}$, $\Omega \neq \widehat{\mathbb{C}}$ ならば、 Ω の等角写像が存在する。

Ω は \mathbb{C} の領域, $z_0 \in \Omega$ とするとき、 Ω の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

$$(1) \quad \varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0.$$

“簡単な” 領域の等角写像が1次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が1次分数変換そのものでなくても、その構成に1次分数変換が使われるも

次は非常に有名な定理である。

定理 5.6 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$ で、 $\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$(2) \quad \varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。) $\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、 $\varepsilon = 1$ と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題候補にする。(2) の φ が条件を満たすこと、条件を満たす1次分数変換が(2)に限られることは初等的に導ける。

双正則という仮定から、 φ が1次分数変換に限られる、というところに **Schwarzの補題** という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

例 5.7 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面** (the upper half-plane) とよぶ。

$$(3) \quad \varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

は H の等角写像である。

略証 1次分数変換は一般に双正則であるから、 $\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる $1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ から分かる。 \square

この φ は ^{ケーリー}**Cayley変換** とよばれる。

φ は実軸 \mathbb{R} (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、 z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、 α, β, γ をそれぞれ $1, 0, \infty$ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

(証明) $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ を $1, 0, \infty$ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi \circ f$ は α, β, γ を $1, 0, \infty$ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi \circ f(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), g(\gamma)) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}). \quad \square$$

上半平面を単位円板に写す 1 次分数変換の一般形は

$$(4) \quad w = \alpha \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \text{Im } \beta > 0.$$

$\beta = i, \alpha = 1$ のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身に写す 1 次分数変換は？

- [1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf>
(2015～).
- [2] 桂田祐史：複素関数と流体力学,
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf> (2015～).
- [3] MATHPEDIA, : 近傍と基本近傍系, <https://math.jp/wiki/%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%962%EF%BC%9A%E8%BF%91%E5%82%8D%E3%81%A8%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E8%BF%91%E5%82%8D%E7%B3%BB>.