応用複素関数 第3回
～ 留数定理の応用 (2) 級数の和計算 (続き), 正則関数の色々な表現法 (1) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024年4月30日

目次

連絡事項&本日の内容

- 留数定理の応用 級数の和の続きを解説する。
- 「続 複素関数」の 1 章、それから 2 章。

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、位数は 1. 実際

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = n.$$

さらに $\left.\frac{d}{dz}(\sin\pi z)\right|_{z=n} = \pi\cos(n\pi) = (-1)^n\pi \neq 0.$

- s_1, s_2, s_3 の極は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、その位数は 1. 留数は

$$\operatorname{Res}(s_1; n) = \left.\frac{\pi}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = (-1)^n,$$

$$\operatorname{Res}(s_3; n) = \operatorname{Res}(s_2; n) = \left.\frac{\pi\cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = 1.$$

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

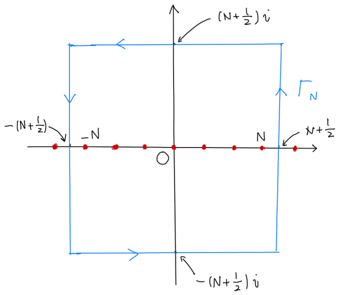

図 1: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$.
- $|s_j(z)| \le 2\pi$ ($j=1,2;\ z \in \Gamma_N^*$).
  (この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1] §1.3.1 には書いてある。)

1.2.3 和の公式とその証明

定理 3.1 (級数の和の公式)

$P(z),\ Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n) \neq 0$, $f = \dfrac{Q}{P}$ とするとき

(1) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_2; c\right),$$

(2) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_1; c\right),$$

(3) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z) s_3(z) e^{iz\theta}; c\right) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

$(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n) \neq 0$ が満たされない場合、$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ を $\displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ P(n)\neq 0}}$ に変えれば良い。

((3) の左辺は Fourier 級数の形をしていることに注意。)

1.2.3 和の公式とその証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R\in\mathbb{R})(\exists C\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{C}:|z|\ge R)\quad P(z)\ne 0\wedge|f(z)|\le\frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N\in\mathbb{N}$ は $N\ge R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0;R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=-N}^{N}\operatorname{Res}(fs_j;k)+2\pi i\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(fs_j;c).$$

k は s_j の 1 位の極であり、f は k のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(fs_j;k)=f(k)\operatorname{Res}(s_j;k)=\begin{cases}(-1)^k f(k) & (j=1)\\ f(k) & (j=2).\end{cases}$$

後は $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz=0$ を示せば良い。$|f(z)|\le\dfrac{C}{N^2}$ $(z\in\Gamma_N)$ であるから

$$\left|\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz\right|\le\int_{\Gamma_N}|f(z)||s_j(z)||dz|\le\frac{C}{N^2}\cdot 2\pi\int_{\Gamma_N}|dz|$$
$$=\frac{2\pi C}{N^2}\cdot 4(2N+1)\to 0\quad(N\to\infty).\quad\square$$

例 3.2

$a > 0$ とするとき $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2}$ は、定理 3.1 の仮定を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}(fs_2; c).$$

f の極 c は $c = \pm ia$ で位数は 1 であるから

$$\operatorname{Res}(f\,s_2; c) = s_2(c) \operatorname{Res}(f; c) = \pi \cot(\pm i\pi a)) \cdot \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm ia}$$

$$= \pi(-i \coth(\pm\pi a)) \cdot \frac{1}{\pm 2ia} = -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a).$$

(ただし $\cot(iz) = -i \coth z$ を用いた。これについては次ページで説明する。)
ゆえに

$$2S + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a). \quad \therefore \quad S = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth(\pi a) - \frac{1}{a^2}\right). \quad \square$$

メモ: 三角関数、双曲線関数の iz での値

板書では必要なものだけを書くのか。

(必要になったとき自分で導くものだろうけれど、書いてあると安心。)
よく知られた

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2},$$
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}.$$

から容易に次が導ける。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i\sin z, \quad \tanh(iz) = i\tan z,$$
$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i\sinh z, \quad \tan(iz) = i\tanh z,$$
$$\coth(iz) = -i\cot z, \quad \cot(iz) = -i\coth z.$$

1.2.5 Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 $(\forall n\in\mathbb{Z})\ P(n)\neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

(4)
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge P(n)\neq 0} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}\,(fs_2;c)\,.$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge n^2\neq 0} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}\,(fs_2;c) = -\mathrm{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2};0\right).$$

ところで

$$\cot z=\frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}+\cdots\quad (0<|z|<\pi)$$

であるから (2022 年度複素関数第 26 回 に tan の場合の求め方がある)

$$\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}=\frac{1}{z^3}-\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{1}{z}-\frac{\pi^4}{45}z+\cdots\quad (0<|z|<1).$$

ゆえに $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\pi\cot(\pi z)}{z^2};0\right)=-\dfrac{\pi^2}{3}$. ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. □

$\cot z$ の $z = 0$ での Laurent 展開を数項だけ求める。$w := z^2$ とおくと

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \cdots}{z\left(1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5}z^4 - \cdots\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4!} - \cdots}{1 - \frac{1}{3!}w + \frac{1}{5}w^2 - \cdots}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad \text{(0 の近傍で正則なので展開できるはず).}$$

分母を払うと

$$1 - \frac{w}{2!} + \frac{w^2}{4!} - \cdots = \left(1 - \frac{1}{3!}w + \frac{1}{5!}w^2 - \cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

右辺を展開して、係数を比較することで、$a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{1}{45}$, $\cdots$ と求まる。

Mathematica で検算: `Series[Cot[z],{z,0,10}]`

2 正則関数の色々な表現法

正則関数には、冪級数展開、Laurent 級数展開以外にも色々な表現法がある。

比較的遭遇する可能性の高いものとして、部分分数展開、無限乗積などがあるが、それ以外にも色々ある。

ほとんど全ての場合に、“正則関数列の広義一様収束であるから正則” という論法が有効である。Weierstrasss の二重級数定理という定理が根拠となる。

有名な例をいくつかあげるが、証明の詳細は省略する (講義ノートには書いてある)。

例 3.3 ($\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ の部分分数展開)

$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対して $f(z) := \frac{1}{(z-a)^2}$ とおくと、$\sum_n f(n)$ は計算できる:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = -\operatorname{Res}\left(\frac{s_2(z)}{(z-a)^2} : a\right) = -\left(s_2(z)\right)'\Big|_{z=a} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}.$$

a を z に書き換えて変数とみると

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

(後でこれを積分することで $\pi \cot(\pi z)$ の部分分数展開を得る。)

例 3.4 (Riemann のゼータ関数)

Riemann のゼータ関数

$$(5)\qquad \zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},\quad n^z=\exp(z\log n)\quad (\mathrm{Re}\, z>1).$$

(これも級数ではあるが冪級数でも Laurent 級数でもない。)
収束の確認だけしておこう。任意の $\sigma>1$ を固定する。$\mathrm{Re}\, z\ge\sigma$ を満たすすべての z に対して

$$\left|\frac{1}{n^z}\right|=\frac{1}{|\exp(z\log n)|}=\frac{1}{\exp\left(\mathrm{Re}\, z\log n\right)}=\frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z}}\le\frac{1}{n^\sigma}.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}$ は収束するから、Weierstrass の M-test によって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ は $\{z\in\mathbb{R}\mid \mathrm{Re}\, z\ge\sigma\}$ で一様収束する。 □

例 3.5 (sin の無限積展開)

Euler による sin の無限積展開:

$$\text{(6)} \qquad \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

(「続 複素関数」§2.5 例 2.26)
無限乗積の極限の定義は省略する。

2.2 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

定義 3.6 (広義一様収束)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、$\{f_n\}$ が f に Ω で **広義一様収束**するとは、Ω に含まれるすべての compact 集合 K 上で $\{f_n\}$ が f に一様収束すること、すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f(z) - f_n(z)| = 0$$

が成り立つことをいう。

compact というのは位相空間論の用語で、現象数理学科では「トポロジー」などの科目で説明されているはず。

compact 集合とは何か。$\mathbb{C}$ の部分集合については次が手取り早い。

定理 3.7 ($\mathbb{C}$ の部分集合の compact 性の判定)

$\mathbb{C}$ の部分集合 K について、K が compact $\Leftrightarrow$ K が有界閉集合。

2.2 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

実は、冪級数, Laurent 級数についても、広義一様収束が成り立つ。
(「複素関数」ではその言葉を出さなかっただけである。)

例 3.8 (冪級数と Laurent 級数の場合 — 実は広義一様収束である)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は、収束円 $D(c;\rho)$ で広義一様収束する。

(「複素関数」では、収束円内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c;R)$ $(0<R<\rho)$ で一様収束する、と説明してあるが、それは実は広義一様収束ということである。)

円環領域 $A(c;\rho_1,\rho_2)$ で正則な関数の Laurent 級数展開

$f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ は、$A(c;\rho_1,\rho_2)$ で広義一様収束する。これも「複素関数」では、$\rho_1<R_1<R_2<\rho_2$ を満たす任意の R_1, R_2 について $\overline{A}(c;R_1,R_2)=\{z\in\mathbb{C}\mid R_1\le|z-c|\le R_2\}$ で一様収束と説明しておいた。 $\square$

2.2 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

「複素関数」で一様収束する関数列は良い性質を持つと説明してあるが (定理を証明付きで述べた)、広義一様収束でもほぼ同様のことが成り立つ。

定理 3.9 (広義一様収束する関数列の性質 (まとめ))

1. 広義一様収束する連続関数列の極限関数は連続である。
(∵ 連続性は局所的性質だから、一様収束の場合と変わらない。)
2. 広義一様収束する連続関数列について項別積分ができる。
(∵ 曲線の像 $\{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ は、連続写像 φ による compact 集合 $[\alpha, \beta]$ の像であるから compact である。ゆえに一様収束する。)

次は本項のハイライト。

定理 3.10 (Weierstrass の二重級数定理)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$\{f_n\}$ は Ω で定義された正則関数列、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ は Ω で広義一様に f に収束するならば、f は Ω で正則で、すべての自然数 k に対して

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (\Omega \text{ で広義一様}).$$

2.2 広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理

上の定義に現れる「任意の compact 集合上で…」という条件は証明しにくく感じるかもしれないが、次の定理があるので、実は簡単である。

定理 3.11 (広義一様収束の定義の言い換え)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) $\{f_n\}$ は Ω で f に広義一様収束する。

(ii) すべての $a \in \Omega$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、$D(a;\delta) \cap \Omega$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。
(すべての点に対して、一様収束する近傍が存在する。)

証明.

(i)⇒(ii) $a \in \Omega$ とすると、ある $\delta > 0$ が存在して、$D(a; 2\delta) \subset \Omega$. $K := \overline{D}(a;\delta)$ は、Ω に含まれる compact 集合であるから、K で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。

(ii) ⇒ (i) K を Ω に含まれる compact 集合とする。K の各点 a に対して、$\delta_a > 0$ が存在して $D(a;\delta_a) \cap K$ で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。K の compact 性から、ある a_1, $\cdots$, $a_n \in K$ が存在して、$K \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} D(a_j;\delta_{a_j})$. ゆえに K で $\{f_n\}$ は f に一様収束する。 □

2024/4/30 の授業はこの辺まで。

2.3 既出の例の再検討

例 3.12 ($\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$, $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開)

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right)$$

が既に得られている。(中辺を項別積分した級数は収束しないが) 右辺を項別に積分した

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ で広義一様収束する。Weierstrass の二重級数定理を適用すると、和

$$f(z):=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

は正則関数で、その導関数は項別微分で計算できる:

$$f'(z)=-\frac{1}{z^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right)\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).$$

例 3.12 ($\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$, $\pi\cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き))

ゆえに

$$f'(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

これから

$$f(z) = \pi\cot(\pi z) + C = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

f は奇関数であるから $C = 0$. ゆえに $f(z) = \pi\cot(\pi z)$. すなわち

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

これは cot の部分分数展開と呼ばれる式で、色々な場面で応用される。

$\cot(\pi z)$ のすべての極における Laurent 展開の主部を寄せ集めると、ぴったり元の関数 $\cot(\pi z)$ になるという式で、私にはとても不思議な感じがする。 □

例 3.13 (Euler による sin の無限積展開)

(無限乗積の収束・発散の定義、性質の証明は省略する。講義ノートにはある。)

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

は、$\mathbb{C}$ で広義一様収束することが分かる。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で正則である。その対数微分を計算すると (これが出来ることも本当は証明すべき…)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

この右辺は $\pi\cot(\pi z)$ に他ならないので (1 つ前の例)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi\cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin\pi z}.$$

これから $f(z) = \sin\pi z$ を導くことが出来る。ゆえに

(7) $$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad (z\in\mathbb{C}).$$

2.3 既出の例の再検討

この $\sin \pi z$ の因数分解のような式を発見したのは Euler である。
(詳しくは講義ノート [1] §2.5 を見よ (例 2.32 ⋯ 番号がずれるかもしれない)。)
(余談: Euler は

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots \quad \text{(Maclaurin 展開)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

の右辺を展開して、x^2 の項の係数を比較することで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を初めて証明した (1748 年)。)

Euler による証明は、現代の観点からは簡単には正当化できず、話の順番を変える必要があるものが多い (極限の現代的な定義は Euler の没後に現れたので、仕方がない)。

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).