

# 応用複素関数 第 11 回

## ～ ポテンシャル問題 (2) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023 年 7 月 4 日 (本来 6 月 27 日にするはずの講義)

# 目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② ポテンシャル問題 (続き)
  - Riemann の写像定理
    - 正規化条件
  - Jordan 領域の写像関数
    - Jordan 曲線定理
    - ポテンシャル問題への帰着
    - Carathéodory の定理
  - Dirichlet の原理
    - 証明
    - 反省
  - ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法
- ③ FreeFem++ を体験しよう
  - どういうものか
  - 入手とインストール
  - サンプル・プログラム
- ④ レポート課題 3 について
- ⑤ 参考文献

# 本日の内容・連絡事項

- ① ポテンシャル問題 (Laplace 方程式の境界値問題) の解の存在と一意性は重要な問題であるが、それに関連して次の2つを述べる。
  - ①a ポテンシャル問題を考える大きなきっかけとなった、Riemann の写像定理について述べる。これは1次分数変換のときに既出であるが、Jordan 領域の写像関数を求めるために Laplace 方程式の境界値問題が現れることを見る。
  - ①b Laplace 方程式の境界値問題の解の存在を示すため、Riemann は変分法の議論を用いた (Dirichlet の原理)。
- ② ポテンシャル問題の数値解法として、有限要素法を紹介する。
- ③ 有限要素法による偏微分方程式のソルバーである FreeFem++ を紹介する。

なるべく早く (3) をした方が良く、と考えるので、(3) から始める。今日 Mac を持っている人は、FreeFem++ のインストールとサンプル・プログラムの実行まで試すこと。インストールが出来ない場合は早めに質問・相談すること。

## 4.3 Riemann の写像定理 (復習)

関数論で基本的な Riemann の写像定理を説明する (1 次分数変換のとき、一瞬間を出した)。

### 定義 11.1 (双正則)

$U$  と  $V$  は  $\mathbb{C}$  の領域,  $\varphi: U \rightarrow V$  とする。 $\varphi$  が**双正則**であるとは、 $\varphi$  が正則かつ全単射かつ  $\varphi^{-1}$  も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。**双正則写像は関数論としての同型写像**と言える。

### 定理 11.2 (Riemann の写像定理, 1851 年)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の単連結領域で、 $\Omega \neq \mathbb{C}$  であるとする。このとき双正則写像  $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  が存在する。

証明は省略する (例えば Ahlfors [1], 高橋 [2] を見よ)。

$\varphi$  のことを、**領域  $\Omega$  の等角写像**、あるいは**領域  $\Omega$  の写像関数**と呼ぶ。

いくつか簡単な形の領域の写像関数を、1 次分数変換で具体的に求めることができる (簡単なものしか紹介していない)。

## 4.3 Riemann の写像定理 正規化条件

$\mathbb{C}$  の単連結領域で  $\mathbb{C}$  と異なるものは、関数論的には円盤領域と同型である、ということになる。

### 系 11.3

$\mathbb{C}$  内の単連結領域で  $\mathbb{C}$  とは異なるものは互いに同相 (位相同型) である。

**証明**  $\Omega_1, \Omega_2$  が  $\mathbb{C}$  とは異なる  $\mathbb{C}$  の単連結領域とすると、双正則写像  $\varphi_1: \Omega_1 \rightarrow D(0; 1)$ ,  $\varphi_2: \Omega_2 \rightarrow D(0; 1)$  が存在する。このとき  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  は双正則である。特に同相写像であるので、 $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  は同相である。  $\square$

## 4.3 Riemann の写像定理 正規化条件

単連結領域  $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$  が与えられたとき、 $\Omega$  の写像関数は一意的には定まらない。定めるためには追加の条件が必要だが、次のものが有名である。

### 命題 11.4 (写像関数の決定)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の単連結領域で、 $\Omega \neq \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  とする。このとき、双正則写像  $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  で

$$(1) \quad \varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0$$

を満たすものは一意的である。

(1) を**正規化条件**と呼ぶ。

証明は、円盤に帰着して、1次分数変換の議論をする。

## 4.4 Jordan 領域の写像関数 Jordan 曲線定理

平面内の単連結領域の重要な例として、以下に紹介する Jordan 領域がある。Jordan 領域の写像関数はポテンシャル問題を解いて求まる (すぐ後)。

### 定理 11.5 (Jordan 曲線定理 (Jordan-Schöflies))

平面内の任意の単純閉曲線  $C$  に対して、ある領域  $U_1, U_2$  が存在して、 $U_1$  は有界、 $U_2$  は非有界、さらに

$$\mathbb{C} = U_1 \cup C^* \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \cap C^* = \emptyset, \quad U_2 \cap C^* = \emptyset.$$

ただし、 $C^*$  は  $C$  の像とする。さらに  $C^*$  は  $U_1, U_2$  の共通の境界である。さらに  $U_1$  は円盤領域、 $U_2$  は円の外部領域とそれぞれ同相である。

(単純とは、自分自身と交わらないことを意味する。)

単純閉曲線のことを **Jordan 曲線**とも呼ぶ。単純閉曲線  $C$  に対して、定理で存在を保証される  $U_1$  を、 $C$  の**囲む Jordan 領域**と呼ぶ。

定理 11.5 は直観的に納得しやすいが、証明はなかなか面倒ということで有名である。ここでは省略する。

## 4.4 Jordan 領域の写像関数 ポテンシャル問題への帰着

$\mathbb{C}$  内の Jordan 領域は単連結であるから、 $\Omega$  の写像関数が存在する。

Jordan 領域  $\Omega$  と  $z_0 \in \Omega$  に対して、正規化条件  $\varphi(z_0) = 0$ ,  $\varphi'(z_0) > 0$  を満たす写像関数  $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1)$  は、次の定理に基づき求められる。

### 定理 11.6 (Jordan 領域の写像関数)

$\Omega$  を  $\mathbb{C}$  内の Jordan 領域、 $z_0 \in \Omega$  とする。 $u$  を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(2) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(3) \quad u(x, y) = -\log |z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega).$$

の解、 $v$  を  $u$  の共役調和関数で  $v(z_0) = 0$  を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0) \exp(u(z) + iv(z))$$

は、 $\Omega$  の写像関数であり、正規化条件を満たす。



## 4.4 Jordan 領域の写像関数 ポテンシャル問題への帰着

### 駆け足の証明

後述の Carathéodory の定理により、 $\varphi$  を  $\bar{\Omega}$  から  $\bar{D}(0;1)$  への同相写像に拡張できることが分かる。それを同じ記号  $\varphi$  で表す。

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0)$$

であるから、 $z_0$  は  $\frac{\varphi(z)}{z - z_0}$  の除去可能特異点である。以下  $\frac{\varphi(z)}{z - z_0}$  を  $\bar{\Omega}$  で連続に拡張した写像を  $\psi$  で表す。 $\psi$  は  $\Omega$  では正則である。

実は  $\psi(z) \neq 0$  ( $z \in \Omega$ ) である。(実際、 $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$  とするとき  $\varphi(z) \neq \varphi(z_0) = 0$  であるから  $\psi(z) \neq 0$ 。一方、 $\varphi$  は単射であるから  $\varphi'(z_0) \neq 0$  が成り立つので、 $\psi(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$ 。)

$\Omega$  は単連結であるから、 $\log \psi(z) = \log \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$  の  $\Omega$  で一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を  $u, v$  とする。

$$(4) \quad \log \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = u(z) + iv(z).$$

$u$  は調和関数であり、 $v$  は  $u$  の共役調和関数である。

$z \in \partial\Omega$  のとき  $|\varphi(z)| = 1$  であるから

$$u(z) = \log \left| \frac{\varphi(z)}{z - z_0} \right| = -\log |z - z_0| \quad (z \in \partial\Omega).$$

## 4.4 Jordan 領域の写像関数 ポテンシャル問題への帰着

ゆえに  $u$  は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解である。

$$(5) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$
$$(6) \quad u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega).$$

$v$  は  $u$  の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、 $z_0$  を始点、 $z \in \Omega$  を終点とする  $\Omega$  内の曲線  $C_z$  を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x dx + v_y dy) = \int_{C_z} (-u_y dx + u_x dy)$$

とすればよい ( $\Omega$  は単連結であるから、 $v$  の値は確定する)。

(4) を  $\varphi$  について解くと

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp(u(z) + iv(z)).$$

これから  $\varphi(z_0) = 0$ 。また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z)) \exp(u(z) + iv(z)),$$
$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

これから、 $\varphi'(z_0) > 0 \Leftrightarrow v(z_0) \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad v(z_0) = 2k\pi$ 。どの  $k$  でも  $\varphi$  は変わらないので  $k = 0$ 。すなわち  $v(z_0) = 0$  で  $v$  を定めれば良い。  $\square$

## 定理 11.7 (Carathéodory の定理)

$C$  を  $\mathbb{C}$  内の Jordan 曲線、 $\Omega$  を  $C$  の囲む Jordan 領域、 $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1)$  を双正則とすると、 $\varphi$  は同相写像  $\tilde{\varphi}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}(0; 1)$  に拡張できる。

有名な定理であるが、証明が載っているテキストが意外と少ない (手持ちのテキストで載っているものを探したのだけれど…有名な Ahlfors [1] も give up している)。私自身はチェックしていないが、Wikipedia [▶ Link](#) に証明の情報がある。

2023/7/4の講義では、この後、次の「Dirichletの原理」を飛ばして(次回の講義で解説します)、「FreeFem++を体験しよう」に飛んだ。

## 4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(7a) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(7b) \quad u = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解  $u$  の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (7b) を満たす関数の全体  $X$  と、 $X$  上の汎関数  $J$  を考える。

$$X := \{u \mid u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in \partial\Omega) u(x) = g(x)\},$$

$$J[u] := \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \quad (u \in X).$$

### Dirichlet の原理

$J$  の最小値を与える  $u$  は  $\Delta u = 0$  (in  $\Omega$ ) を満たす。

したがって  $J$  の最小値を与える  $u$  は (7a), (7b) の解である。

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

## 4.5 Dirichlet の原理

### 証明

$v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  は、条件  $v = 0$  (on  $\partial\Omega$ ) を満たす任意の関数とする。任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $u + tv = g + t \cdot 0 = g$  (on  $\partial\Omega$ )。ゆえに  $u + tv \in X$  である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は  $t = 0$  で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy + t^2 \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) dx dy$$

は  $t$  の 2 次関数であり、 $t = 0$  で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$(8) \quad \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = 0.$$

**Green の公式**  $(\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy)$  より

$$\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = 0.$$

これが任意の  $v$  について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \square$$

## 4.5 Dirichlet の原理

### 反省

Riemann は、汎関数  $J[u]$  を最小にする  $u \in X$  の存在は明らかだと考えた。

$J$  は下に有界 ( $J[u] \geq 0$ ) であるから、 $J$  は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツツコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがある。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。

以上の話は、少し込み入っていて、初めて聴く人には分かりにくいと思われるので、振り返っておこう。

- Riemann の写像定理という関数論で基本的と考えられている定理がある。それは領域の写像関数の存在に関する定理である。
- Jordan 曲線 (単純閉曲線) で囲まれた領域<sup>1</sup> の写像関数は、Laplace 方程式のある Dirichlet 境界値問題を解くことで求まる。
- Riemann は、その境界値問題が次のように解けると主張した:  
汎関数  $J[u] := \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$  の最小化問題 (変分問題) が解ければ良い (∵ Dirichlet の原理)。この  $J$  の最小値の存在は明らか。  
→ ツッコミが入って、頓挫したが、結局は解決された。

最小性は

$$\iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = 0 \quad (v \text{ は条件 } v = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ を満たす任意の関数})$$

という条件と同値である。この式は**弱形式**と呼ばれる。**有限要素法**という数値解法では、微分方程式の近似解を弱形式の解として求める。

---

<sup>1</sup>穴が空いていないということで、最も単純と考えられる。



## 4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

**有限要素法の主たるアイデア**は次の2つ:

- ① **弱形式**を用いる。
- ② 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

実は Dirichlet 原理の証明中に現れた (8) は Laplace 方程式の **Dirichlet 境界値問題の弱形式**である。(弱形式については、次回解説を行う。)

今回は「百聞は一見にしかず」で、まずはプログラム(スライド1枚)を紹介する。

**2,3行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。**

```

// potential2d-v0.edp --- 2次元非圧縮ポテンシャル流
// 速度ポテンシャル, 速度を求め、等ポテンシャル線, 速度場を描く
border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y; //  $\Omega$ が単位円で,  $V=(1,2)$  のとき  $V \cdot n=x+2y$ 
func Vn2=((x>0&&y>0) || (x<0&&y<0))*(x+2*y); // 右上と左下のみ

// 速度ポテンシャル $\phi$ を求め、その等高線(等ポテンシャル線)を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
// ベクトル場  $(v1,v2)=\nabla\phi$  を描く(ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);

```

**FreeFem++** は、2次元, 3次元の偏微分方程式の問題を有限要素法で解くための、一種の PSE (problem solving environment) である。

パリ第6大学 J. L. Lions 研究所の Frédéric Hecht, Oliver Pironneau, A. Le Hyaric, 広島国際学院大学の 大塚厚二氏らが開発した、ソースコードとマニュアル (700 ページ超、幸い英文)、主なプラットフォーム (Windows, Mac, Linux) 向けの実行形式パッケージがフリーで提供されている。

従来のプログラミング言語では、短くても数百行のプログラムを書く必要があったような問題が、十数行のプログラム (スライド1枚に入ったりする) を書くだけで解けてしまったりする。

## ① FreeFem++ の WWW サイト

分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [3] がある。

パラパラしてみると、どういうことが出来るか分かる。

② 大塚・高石 [4] という日本語の解説書がある (現在品切だが、明治大学の学生は、図書館あるいは Maruzen eBook で読める)。

③ 色々な WWW サイトがある (その多くは信頼できる)。  
まず自作を紹介しておく

- 「FreeFem++の紹介」
- 「FreeFem++ ノート」

日本応用数学会のチュートリアルの資料&サンプル・プログラム

- 「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング -中級編-」 (2016/2/11,12)
- 「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング -上級編-」 (2016/6/4,5)

# FreeFem++ を体験しよう 入手とインストール

現在、メンテナンスをしていた人が交代したためか、インストールが少し難しい。

2023/7/4 時点で、version 4.13 が最新版だが、実行形式が用意されていないので、version 4.12 の利用を勧める。

インストール手順は、「[FreeFem++ 4.12 のインストール](#)」を参考にしてください。授業で実演するので真似してやってみよう。

- macOS Ventura を使っている人は書かれている手順を良く読んで、慎重に作業して下さい。
- Ventura より前、Mojave 以降の macOS を使っている人は比較的簡単にインストールできるはず。
- macOS が 10.11(El Capitan)～10.13(HighSierra) ならば、FreeFem++ version 4.9 (FreeFem++-4.9-full-MacOS\_10.11.pkg) を試してみる。

いずれにせよ、トラブルが生じたら気軽に相談して下さい。

文法はC言語に似ているので、見様見真似でプログラムが書けると思われるが、簡単な説明を用意する予定である。

# FreeFem++ を体験しよう サンプル・プログラム

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを新しく開いて、以下の4つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp
```

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp
```

FreeFem++ では、`plot()` 実行後に一時停止することがあります (グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。

# レポート課題3について

非圧縮流体のポテンシャル流を、ポテンシャル問題を解くことで数値シミュレーションする、という問題で、課題文は <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/report3.pdf> にあります。

FreeFem++ 用のサンプル・プログラムをたたき台にすれば、プログラム作成の手間は軽くて済む (弱形式はサンプル・プログラムのままで良い)。

**やるべきこと (1)** 領域  $\Omega$  と境界値  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  を選ぶ。

$\Omega$  はかなり自由に選べる (大学名にちなみ  $\mathbb{M}$  や  $\mathbb{E}$  の字の領域にするとか)。

$v_n$  の選び方に注意が必要である。すでに説明したように

$$\int_{\partial\Omega} v_n d\sigma = 0 \quad (\text{今は2次元なので線積分 } \int_{\partial\Omega} v_n ds \text{ です})$$

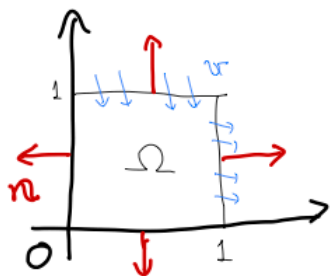
が成り立っていないと解が存在しない。実際 Green の積分公式

$$\int_{\Omega} \Delta uv \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

の  $u$  に  $\phi$ ,  $v$  に 1 (定数関数) を代入すると ( $\Delta\phi = 0$ ,  $\frac{\partial\phi}{\partial n} = v_n$  に注意して)

$$0 = \int_{\partial\Omega} v_n \, d\sigma - 0$$

が得られるから。



上の辺から水を入れた。  
 右の辺から水を出す。

$$v_n = v \cdot n = \begin{cases} -1 & (\text{上の辺}) \\ 1 & (\text{右の辺}) \\ 0 & (\text{その他の辺}) \end{cases}$$

$$\int_{\partial\Omega} v_n d\sigma = 0 \quad \text{であることが必要}$$

$$\text{上の } v_n \text{ については } \int_{\partial\Omega} v_n d\sigma = \int_{\text{上の辺}} (-1) d\sigma + \int_{\text{右の辺}} 1 d\sigma = 0$$

正方形ではなく長方形(横2, 縦1)にしたとき  $v_n$  を変えればOK



# レポート課題3について

## やるべきこと (2) 流線を描くこと

流線を描くにはどうすればよいか。これはサンプル・プログラムには書かれていない。

流線は、接線ベクトルが速度ベクトルと平行であるような曲線 (これが流線の定義) ということから求める方法が考えられる。

あるいは、2次元流体では、流線は流れ関数  $\psi$  の等高線であるから、 $\psi$  を求めてその等高線を描く、という手もある。 $\psi$  を求めるには…

# 参考文献

- [1] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).
- [2] 高橋礼司: 複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された。丸善 eBook では、  
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441> でアクセスできる。
- [3] Hecht, F.: Freefem++,  
<https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>, 以前は  
<http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> にあった。(??).
- [4] 大塚厚二, 高石武史: 有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014),  
<https://sites.google.com/a/comfos.org/comfos/ffempp> というサポート  
WWW サイトがある。Maruzen eBook に入っているので、  
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545> でアクセス出来る。