置換行列についてのメモ

桂田 祐史

2011 年 12 月 9 日, 10 日

σ が n 次の**置換**であるとは、σ が $\{1,2,\dots,n\}$ から $\{1,2,\dots,n\}$ への全単射であることをいう。n 次の置換全体を n 次**対称群**と呼び、S_n と書く。

二つの置換の積を写像としての積として定める:

$$\tau\sigma := \tau\circ\sigma, \quad \text{i.e.} \quad (\tau\sigma)(i) = \tau(\sigma(i)) \quad (i\in\{1,\dots,n\}).$$

(これとは反対に $(\tau\sigma)(i)=\sigma(\tau(i))$ と定義する流儀もあるようだ。必要がない場合、どちらで定義するか書かない、という日和見な (?) 流儀もあるようだ。いずれにせよ、本質的な違いがあるわけではない。)

$\sigma\in S_n$, $A=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)\in M(n;\mathbb{K})$ に対して、A_σ を

$$A_\sigma := \left(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)},\dots,\boldsymbol{a}_{\sigma(n)}\right) \qquad (\text{i.e., } A_\sigma \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = a_{i\sigma(j)})$$

で定める (列ベクトルの置換)。

$\boldsymbol{e}_i$ を第 i 成分のみが 1 で、他の成分は 0 である n 次元ベクトルとする。n 次単位行列を I とすると、$I=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ である。

命題 0.1 (I_σ は右からかけると列ベクトルを置換する) $\sigma\in S_n$, $A\in M(n;\mathbb{K})$ に対して、

$$AI_\sigma = A_\sigma.$$

証明 $A=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$ とする。$\forall k\in\{1,\dots,n\}$ に対して、

$$A\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{a}_k$$

が成り立つことは高校以来おなじみであろう。

$$AI_\sigma = A\left(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\dots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\right) = \left(A\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\dots,A\boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\right) = \left(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)},\dots,\boldsymbol{a}_{\sigma(n)}\right) = A_\sigma. \blacksquare$$

命題 0.2 $\forall\sigma\in S_n$ に対して、I_σ は実直交行列である (すなわち $I_\sigma^{-1}=I_\sigma^T$)。

証明 $i\ne j \Leftrightarrow \sigma(i)\ne\sigma(j)$ であることに注意すると、一般に $\left(\boldsymbol{e}_{\sigma(i)},\boldsymbol{e}_{\sigma(j)}\right)=\delta_{\sigma(i)\sigma(j)}=\delta_{ij}$ が成り立つことが分かる。ゆえに $\{\boldsymbol{e}_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ は正規直交系であるから、I_σ は直交行列である。$\blacksquare$

命題 0.3 $I_\tau I_\sigma = I_{\tau\sigma}$. 特に $I_{\sigma^{-1}} = I_\sigma^{-1}$.

証明 $A = I_\tau = (\boldsymbol{e}_{\tau(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\tau(n)})$ とするとき、$\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{e}_{\tau(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ であって、

$$I_\tau I_\sigma = AI_\sigma = A_\sigma = (\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}) = (\boldsymbol{e}_{\tau(\sigma(1))}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\tau(\sigma(n))}) = I_{\tau\sigma}.\blacksquare$$

$\sigma \in S_n$, $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n^T \end{pmatrix} \in M(n; \mathbb{K})$ に対して、${}^\sigma A$ を

$${}^\sigma A := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{\sigma(1)}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(n)}^T \end{pmatrix} \qquad (\text{i.e., } {}^\sigma A \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = a_{\sigma(i)j})$$

で定める。

命題 0.4 $A \in M(n, \mathbb{K})$, $\sigma \in S_n$ とするとき、

$$(I_\sigma)^T A = I_\sigma^{-1} A = {}^\sigma A.$$

証明 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n^T \end{pmatrix}$ とおくとき、

$$(I_\sigma)^T A = (I_\sigma)^T (A^T)^T = (A^T I_\sigma)^T = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} I_\sigma \right)^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\sigma(n)} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b_{\sigma(1)}^T \\ \vdots \\ b_{\sigma(n)}^T \end{pmatrix} = {}^\sigma A.\blacksquare$$

昨日 (2011 年 12 月 9 日) 問題となった置換行列は、

$$P = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_{N+1}, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_{N+2}, \cdots, \boldsymbol{e}_N, \boldsymbol{e}_{2N})$$

である。$\sigma \in S_n$ を

$$\begin{aligned} &\sigma(1) = 1, \sigma(2) = N + 1, \\ &\sigma(3) = 2, \sigma(4) = N + 2, \\ &\cdots, \\ &\sigma(2j - 1) = j, \sigma(2j) = N + j, \\ &\cdots, \\ &\sigma(2N - 1) = N, \sigma(2N) = 2N \end{aligned}$$

で定めるとき、$P = I_\sigma$.

$A = (a_{ij})$, $\sigma \in S_n$ に対して、

$$I_\sigma^{-1} A I_\sigma = \left(a_{\sigma(i)\sigma(j)} \right).$$