

Laplace 方程式ノート

桂田 祐史

1998年12月24日, 2004年9月24日, 2009年1月3日, 2013年10月8日

色々な事実を使うのだが、それらを簡潔に述べて、明解な証明を与えている文献は知らない。もしかしたらないのかもしれない(あるいはあるけど知らないのかも)。当面はガラクタ箱だろうけれど、いつかそういうものを作りたい。

部分的に読書ノートの色彩が濃くなってきたので(消化して、なるべく一から書き直すようにしているのだけど、時間的余裕がなくて、内容的にただの抜き書きに近いところが多くなりそう)、内輪向けノートに移行します。これは一般向けの最後のバージョン。(2013/10/8)

目次

1 はじめに	3
2 二次元ポテンシャル論入門	3
2.1	3
2.1.1 点電荷と一重層ポテンシャル	3
2.1.2 双極子と二重層ポテンシャル	4
2.2 線積分で定義される関数	5
2.3 一重層ポテンシャル、二重層ポテンシャルの調和性	6
2.4 一重層ポテンシャルの全平面での連続性	6
2.5 二重層ポテンシャルの不連続性	7
2.6 ?	8
3 ポテンシャルによる境界値問題の解法	8
3.1 内部 Dirichlet 問題の場合	8
3.2 外部 Dirichlet 問題	9
3.3 内部 Neumann 問題	10
3.4 外部 Neumann 問題	10
3.5 ゆっくり	10
3.6 まとめ — ポテンシャルでどこまで解けるか	12
3.7 円板領域の場合	14
4 Riemann の写像定理の歴史	14

5	球における Poisson 積分	14
5.1	平面の円板領域の場合	14
5.2	多次元の場合	18
5.3	複素関数論の見地から	18
6	Poisson 方程式の特解	20
6.1	熊ノ郷氏のテキストから	20
6.2	ペトロフスキーのテキストから	23
6.3	藤田のテキストから	23
6.4	Kellog のテキストから	23
7	積分方程式	24
8	最大値原理	27
8.1	概観	27
8.2	弱い最大値原理	28
8.3	球面平均の定理	28
8.4	強最大値原理 — 球面平均の定理による証明	29
8.5	球面平均の定理を使わない方法	29
9	Green 関数	30
9.1	落書き	31
9.2	簡単な領域の Green 関数	32
9.3	一般の有界領域に対する Green 関数の定義	35
9.4	島倉 [1] から	35
9.5	対応する放物型問題との関係	36
9.5.1	島倉 [1] から	36
9.6	1次元の場合 (常微分作用素) の例	37
9.6.1	L の Green 関数	37
9.6.2	$L + \lambda$ の Green 関数	38
9.6.3	$\partial_t + L$ の Green 関数	39
9.7	2次元の場合の例 (1) 円盤	40
9.7.1	$L = -\Delta$ の Green 関数	40
9.7.2	$L + \lambda = -\Delta + \lambda$ の Green 関数	40
9.7.3	$\partial_t + L = \partial_t - \Delta$ の Green 関数	40
9.8	関数論による 2次元 Green 関数	40
10	変分法	42
A	ベクトル解析の公式	42
A.1	2次元	42
A.2	3次元	43
A.3	一般化された Green の積分公式	44

B 球面調和関数	46
C Poincaré-Perron の方法による Dirichlet 問題の解	46
A 計算用紙	46
A.1 対数関数	46

1 はじめに

代用電荷法について議論するためには、Laplace 方程式についての基礎的事項を知っておくことが必要である。既に「微分方程式2 講義ノート」 [2] にある程度は書いてあるが、全然足りないなので、補足するためのノートである。

改めて色々な文献を読み直してみて、ペトロフスキー [3] は貴重だと思う。これを通して読んで、後はつまみ食いするという方針で勉強するのがよいと思う。

(今後の計画) Poisson 方程式の特解について、Kellog [4] 等から証明を抜き出したい。Green 関数の性質については、辻・小松 [5] から抜き出したい。また等角写像の実例をいくつか書きたい(このノートに含めるものではないかも知れないが)。藤田 [6] 等から球面調和関数について。また弱解の方法についても。

島倉 [1] には、 \mathbb{R}^n の Laplace 方程式について他では見つけにくい情報が多く載っている。

2 二次元ポテンシャル論入門

この節の内容は、主にペトロフスキー [3] 第3章による。佐藤・新濃 [7] も参考になる。

2.1

2.1.1 点電荷と一重層ポテンシャル

点 $A(a, b, c)$ に置かれた点電荷 q の作る点 $Q(x, y, z)$ での電場 $\mathbf{E}(Q)$ は

$$\mathbf{E}(Q) = kq \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{OQ}, \quad r = \overline{OQ}.$$

成分で表すと

$$E_x(Q) = kq \frac{x-a}{r^3}, \quad E_y(Q) = kq \frac{y-b}{r^3}, \quad E_z(Q) = kq \frac{z-c}{r^3}.$$

ポテンシャルは

$$u(Q) = \frac{kq}{r} + \text{const.}$$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} u(Q) = 0$$

とすると、const. = 0. また

$$k = 1.$$

こうして

$$u(Q) = \frac{q}{r}.$$

以下 $Q(x, y, z)$ でなく \mathbf{x} , $A(a, b, c)$ でなく \mathbf{y} と書こう。

$$u(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

一重層ポテンシャル (simple layer potential) とは、

$$u(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\omega(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} dS_{\mathbf{y}}.$$

体ポテンシャル (volume potential) とは

$$u(\mathbf{x}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} dV_{\mathbf{y}}.$$

2.1.2 双極子と二重層ポテンシャル

ℓ 軸上の点 A をはさんで $q, -q$ という電荷が距離 h 離れておいてある。 $-q$ から q を見る方向が ℓ 軸の正方向とする。 p を定数として、

$$qh = p$$

という関係を保ちながら $h \rightarrow 0$ とする。

$$u(Q) = \lim_{h \rightarrow 0} q \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) = p \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{1}{r} = -\frac{p}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \ell} = p \frac{\cos(\overrightarrow{OQ}, \ell)}{r^2}.$$

この電荷分布の極限を双極子 (dipole) と呼び、 p を双極子のモーメント (the moment of the dipole) と呼ぶ。

$$u(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\tau(y) \cos(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \bar{n}_y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}}.$$

点 \mathbf{y} における S の外向き単位法線ベクトルを \mathbf{n}_y とすると、

$$u(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\tau(\mathbf{y}) \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{n}_y \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}}.$$

\bar{n}_y を点 y における S の外向き法線の方向とする。

2.2 線積分で定義される関数

φ は \mathbb{R}^2 内の正則 C^1 級曲線であるとする。つまり C^1 -級の写像 $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ であって、単射、かつ到るところ $\varphi' \neq 0$ であるとする。 $C := \varphi([a, b])$ とおく。

いま $F: (\mathbb{R}^2 \times C) \setminus (C \times C) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とするとき

$$(1) \quad w(x) = \int_C F(x, y) ds_y \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

について考える。 w は $\mathbb{R}^2 \setminus C$ において well-defined であり、そこで連続であることは見易い。 $x = x_0 \in C$ において定義できるかどうかは問題である。まず $y = x_0$ に対して被積分関数は定義されない ($F(x_0, y) = F(x_0, x_0)$ は未定義) であるから、積分は広義積分

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow x_0, w \rightarrow x_0} \int_{C-\ell} F(x_0, y) ds_y \quad (\ell \text{ は } z, w \text{ を端点とし、} x_0 \text{ を内点として含む } C \text{ の部分弧})$$

と解釈されるべきものである。

定義 2.1 $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^1 級の正則曲線とする。 $x_0 \in C := \varphi([a, b])$ に対して、積分 (1) または (2) が一様収束であるとは、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して x_0 の近傍 V と、 x_0 を内点として含む C の部分弧 ℓ が存在して、 $\forall x \in V$ に対して $\int_{\ell} F(x, y) ds_y$ が収束し、

$$\sup_{x \in V} \left| \int_{\ell} F(x, y) ds_y \right| \leq \varepsilon$$

が成り立つことと定義する。

補題 2.2 $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^1 級の正則曲線とする。 $x_0 \in C := \varphi([a, b])$ において、積分 (2) が一様収束するならば、 x_0 に十分近い任意の点 x で (2) は収束する。したがって、(1) で与えられる関数 w は x_0 のある近傍で定義される。さらに w は x_0 において連続である。

証明 $\forall \varepsilon > 0$ に対して、定義 2.1 で存在を保証される V, ℓ を取る。

$x_0 = \varphi(t_0)$, $a < t_0 < b$ とする。必要ならば ℓ を小さく取り直して、 $\ell = \varphi([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$, $\delta > 0$ として良い。

$$\int_{C-\ell} F(x, y) ds_y = \int_{[a, b] \setminus (t_0 - \delta, t_0 + \delta)} F(x, \varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

はコンパクト集合上の連続関数の積分とみなせるので存在する。一方、一様収束の定義から、

$x \in V$ とするとき、 $\int_{\ell} F(x, y) ds_y$ が存在するので、 $\int_C F(x, y) ds_y$ は存在する。

$$\begin{aligned} |w(x) - w(x_0)| &= \left| \int_{\ell} (F(x, y) - F(x_0, y)) ds_y + \int_{C \setminus \ell} (F(x, y) - F(x_0, y)) ds_y \right| \\ &\leq \left| \int_{\ell} F(x, y) ds_y \right| + \left| \int_{\ell} F(x_0, y) ds_y \right| + \left| \int_{C \setminus \ell} (F(x, y) - F(x_0, y)) ds_y \right| \\ &\leq 2\varepsilon + \left| \int_{C \setminus \ell} (F(x, y) - F(x_0, y)) ds_y \right|. \end{aligned}$$

ゆえに $V \ni x \mapsto \int_{C \setminus \ell} F(x, y) ds_y$ が連続であることを示せば良い。 $\overline{B}(x_0; r) \subset V$, $r > 0$ とするとき、コンパクト集合 $\overline{B}(x_0; r) \times ([a, b] \setminus (t_0 - \delta, \delta + r))$ 上で F は一様連続であることから証明できる。■

2.3 一重層ポテンシャル、二重層ポテンシャルの調和性

定理 2.3 (一重層ポテンシャル、二重層ポテンシャルの調和性) $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^1 級の正則曲線として、 $C := \varphi([a, b])$ とおく。

(1) $\omega: C \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば、 ω を分布密度とする**一重層ポテンシャル**

$$u(x) := - \int_C \omega(y) \log |x - y| ds_y$$

は $\mathbb{R}^2 \setminus C$ で定義され、調和関数となる。

(2) $\tau: C \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば、 τ を分布密度とする**二重層ポテンシャル**

$$u(x) := \int_C \tau(y) \frac{\cos(x - y, n_y)}{|x - y|} ds_y = \int_C \tau(y) \frac{(x - y, n_y)}{|x - y|^2} ds_y$$

は $\mathbb{R}^2 \setminus C$ で定義され、調和関数となる。

証明 これは積分記号下の微分の正当化が簡単にできるので容易に証明できる。■

2.4 一重層ポテンシャルの全平面での連続性

前項で一重層ポテンシャルが、全平面から曲線を除いた範囲で連続であることは分かったが、実は全平面で連続である。

定理 2.4 (一重層ポテンシャルの全平面における連続性) $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^1 級の正則曲線として、 $C := \varphi([a, b])$ とおく。 $\omega: C \rightarrow \mathbb{R}$ が連続ならば、 $x = x_0 \in C$ において

$$u(x) := - \int_C \omega(y) \log |x - y| ds_y$$

は一様に収束する。したがって、一重層ポテンシャルは \mathbb{R}^2 で連続な関数を定義する。

証明 主張の前半のみ証明すればよい (前半が示されれば、補題より後半は明らかだから)。
 …準備中… ■

2.5 二重層ポテンシャルの不連続性

前項で一重層ポテンシャルが全平面で連続なことが分かったが、二重層ポテンシャルは (密度関数が 0 でない限り) 不連続である。詳しく言うと、二重層ポテンシャルは、内側からの極限 $\underline{u}(x)$ と、外側からの極限 $\bar{u}(x)$ を持ち、

$$\forall x \in C \quad u(x) - \underline{u}(x) = \pi\tau(x), \quad \bar{u}(x) - u(x) = \pi\tau(x)$$

が成り立つ。

(曲線をパラメーター付けと定義していないのかな。接線が連続的に曲がるというのは、現代の数学語だと C^1 級正則曲線くらいか。)

密度 1 の場合をあらかじめ計算しておくのが通らしい。

補題 2.5 $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^1 級の正則 Jordan 閉曲線とする。 $C := \varphi([a, b])$ とおき、 Ω は C の囲む有界領域、 Ω_e をその外部とする。このとき密度 $\equiv 1$ とした二重層ポテンシャル

$$u(x) := \int_C \frac{\cos(x - y, n_y)}{|x - y|} ds_y$$

は、

$$u(x) = \begin{cases} -2\pi & (x \in \Omega) \\ -\pi & (x \in C) \\ 0 & (x \in \Omega_e) \end{cases}$$

を満す。

定理 2.6 $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^1 級の正則 Jordan 閉曲線とする。 $C := \varphi([a, b])$ とおき、 Ω は C の囲む有界領域、 Ω_e をその外部とする。このとき連続な密度 $\tau: \mathbb{R}$ を持つ二重層ポテンシャル

$$u(x) := \int_C \frac{\cos(x-y, n_y)}{|x-y|} \tau(y) ds_y$$

はすべての $x \in C$ において収束する。すなわち二重層ポテンシャルは全平面 \mathbb{R}^2 で定義される。さらに C の点は、第一種の不連続点である。すなわち、 $\Omega \cup C$ で連続な関数 \underline{u} と、 $\Omega_e \cup C$ で連続な関数 \bar{u} が存在して、

$$u(x) = \begin{cases} \underline{u}(x) & (x \in \Omega) \\ \frac{\underline{u}(x) + \bar{u}(x)}{2} & (x \in C) \\ \bar{u}(x) & (x \in \Omega_e) \end{cases}$$

$$\bar{u}(x) - \underline{u}(x) = 2\pi\tau(x) \quad (x \in C)$$

を満す。

2.6 ?

一重層ポテンシャルの法線微分の議論が必要だ。

3 ポテンシャルによる境界値問題の解法

(久しぶりに工事中。このゴミ箱を使えるものにする。)

この節も、ペトロフスキー [3] による。ここに書かれている内容を使う場合は、原典を読んでチェックしておくこと。

3.1 内部 Dirichlet 問題の場合

Γ が \mathbb{R}^2 内の十分滑らかな Jordan 閉曲線、 Ω を Γ の囲む有界領域とする。 Ω における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ u &= f \quad (\text{on } \Gamma) \end{aligned}$$

の解が未知の密度 τ による二重層ポテンシャル

$$u(x) := \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\cos(x-y, n_y)}{|x-y|} ds_y \quad (x \in \Omega)$$

で表わせたと仮定する。ここで n_y は、 $\Gamma = \partial\Omega$ 上の点 y における Ω の外向き単位法線ベクトルである。

$$\frac{\cos(x-y, n_y)}{|x-y|} = \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{|x-y|^2}$$

と書いた方が分かりやすいかも知れない。

前節で述べたように、 u は Ω で調和で、 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ への連続な拡張 \underline{u} を持つ。定理 2.6 から、 $\underline{u}(x)$ は、 $x \in \Gamma$ に対しては

$$\underline{u}(x) = \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\cos(x-y, n_y)}{|x-y|} ds_y - \pi\tau(x)$$

で与えられる。 \underline{u} は境界値問題の解であるから、境界条件

$$\underline{u}(x) = f(x) \quad (x \in \Gamma)$$

を満たすので、 τ は積分方程式

$$(3) \quad \tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\cos(x-y, n_y)}{|x-y|} ds_y - \frac{1}{\pi} f(x) \quad (x \in \Gamma)$$

の解になっていなければならない。

逆に τ がこの積分方程式の解ならば、二重層ポテンシャル u は Dirichlet 境界値問題の解である。

念のために注意しておく、上の議論は Dirichlet 問題の解が存在するが、それは二重層ポテンシャルでは表せない、という場合があることを除外していない。

3.2 外部 Dirichlet 問題

Γ を \mathbb{R}^2 内の十分滑らかな Jordan 閉曲線として、 Ω を Γ の囲む有界領域、 Ω' をその外部領域とする。外部領域 Ω' における Dirichlet 問題

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega'),$$

$$u = f \quad (\text{on } \Gamma),$$

u は有界.

を考える。

この問題も、内部 Dirichlet 問題と同様の考え方で扱える。ここでは結論だけ述べる。

二重層ポテンシャル

$$u(x) = \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{|x-y|^2} ds_y \quad (x \in \Omega')$$

が外部 Dirichlet 問題の解であるためには、 τ が積分方程式

$$(4) \quad \tau(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{|x-y|^2} ds_y + \frac{1}{\pi} f(x) \quad (x \in \Gamma)$$

の解であることが必要で、逆に τ がこの積分方程式の解であれば、 u は外部 Dirichlet 境界値問題の解になる。

3.3 内部 Neumann 問題

Γ が \mathbb{R}^2 内の十分滑らかな Jordan 閉曲線、 Ω を Γ の囲む有界領域とするとき、 Ω における Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \quad (\text{on } \Gamma)\end{aligned}$$

の解が未知の密度 ω による一重層ポテンシャル

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \omega(y) \log |x - y| ds_y$$

で表わせたとする。 ω は次の積分方程式の解である。

$$(5) \quad \omega(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \omega(y) \frac{\langle x - y, n_x \rangle}{|x - y|^2} ds_y - \frac{1}{\pi} f(x) \quad (x \in \Gamma).$$

3.4 外部 Neumann 問題

Γ は十分滑らかな Jordan 閉曲線として、 Ω を Γ の囲む有界領域、 Ω' をその外部領域とする。

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega') \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \quad (\text{on } \Gamma)\end{aligned}$$

の解が未知の密度 ω による一重層ポテンシャル

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \omega(y) \log |x - y| ds_y \quad (x \in \Omega)$$

で表わせたとする。 ω は次の積分方程式の解である。

$$(6) \quad \omega(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \omega(y) \frac{\langle x - y, n_x \rangle}{|x - y|^2} ds_y - \frac{1}{\pi} f(x) \quad (x \in \Gamma).$$

3.5 ゆっくり

$$K_1(x, y) := \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{|x - y|^2}, \quad K_2(x, y) := -\frac{\langle x - y, n_x \rangle}{|x - y|^2} \quad (x, y \in L, x \neq y)$$

とおく。

$$K_1(x, y) = K_2(y, x)$$

が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow z, y \rightarrow z} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{|x - y|^2} = -\frac{1}{2} \kappa(z).$$

こうしていずれの場合も次の形の積分方程式になる:

$$\tau(x) = \lambda \int_L K(x, y) \tau(y) ds_y + f(x).$$

補題 3.1

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_L \tau(y) \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{|x - y|^2} ds_y$$

は自明解しか持たない。

定理 3.2 内部 Dirichlet 問題の積分方程式 (3) と外部 Neumann 問題の積分方程式 (6) は、任意の連続関数 f に対して、一意的な解を持つ。

補題 3.3 (ペトロフスキー §35 の定理 2) 同次積分方程式

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \omega(y) \frac{\langle x - y, n_x \rangle}{|x - y|^2} ds_y$$

はただ一つの 1 次独立な解 $\omega = \bar{\omega}$ を持ち、

$$\int_{\Gamma} \bar{\omega}(y) ds_y \neq 0.$$

定理 3.4 外部 Dirichlet 問題の積分方程式 (4) は、

$$\int_L f(y) \bar{\omega}(y) ds_y = 0$$

が成り立つとき、そのときに限り解を持つ。解は定数差だけの不定性を持つ。内部 Neumann 問題の積分方程式 (6) は、

$$\int_L f(y) ds_y = 0$$

が成り立つとき、そのときに限り解を持つ。解は $\bar{\omega}$ の定数倍だけの不定性を持つ。

曲線のなめらかさについて。とんがっているとどうか。

曲線が C^2 と仮定すると積分核が連続になる。ペトロフスキーはそうしている。 C^2 でない場合、積分核が連続にならないが、対処のし方はある。

積分方程式の解の一意性について、Henrici は関数論的に証明した。ペトロフスキーでは別の方法でやっている。

3.6 まとめ — ポテンシャルでどこまで解けるか

ふつう Dirichlet 問題は二重層ポテンシャルで、Neumann 問題は一重層ポテンシャルで解く(そうすると、密度が第2種 Fredholm 積分方程式の解として特徴づけられる — 扱いやすい)。

二重層ポテンシャルは無限遠で0になってしまうので、任意の外部 Dirichlet 問題がポテンシャルのみで解けるわけではない。

定理 3.5 Γ を十分滑らかな \mathbb{R}^2 の Jordan 閉曲線、 Ω を Γ に囲まれた有界領域、 Ω' をその外部領域とする。

(1) 任意の $f \in C(\Gamma)$ に対する内部 Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ u &= f \quad (\text{on } \Gamma)\end{aligned}$$

の解は一意的に存在し、それは二重層ポテンシャル

$$u(x) = \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\cos(x-y, n_y)}{|x-y|} ds_y \quad (x \in \Omega)$$

の形で表現できる。しかもその分布密度 τ は、 f により一意的に定まる。具体的には、 τ は次の積分方程式の解である(一般に一意的に存在する):

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\cos(x-y, n_y)}{|x-y|} ds_y - \frac{1}{\pi} f(x) \quad (x \in \Gamma).$$

(2) 内部 Neumann 境界値問題

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \quad (\text{on } \Gamma)\end{aligned}$$

が解けるためには、境界値 f が

$$\int_{\Gamma} f(y) ds_y = 0$$

を満すことが必要十分である。このとき、解は一重層ポテンシャル

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \omega(y) \log|x-y| ds_y$$

の形で表現できる。しかもその分布密度 ω は $C\bar{\omega}$ (C は任意定数) を加えることを除いて一意的に定まる。具体的には、 ω は積分方程式

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle x-y, n_x \rangle}{|x-y|^2} \omega(y) ds_y + \frac{1}{\pi} f(x) \quad (x \in \Gamma)$$

の解である。また $\bar{\omega}$ は、補題 3.3 に現われる関数である。

(Neumann 問題の解は、定数だけの不定さがあるが、これは $\omega = \bar{\omega}$ を密度とする一重層ポテンシャルが定数ということか???)

(3) 任意の $f \in C(\Gamma)$ に対する外部 Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega') \\ u &= f \quad (\text{on } \Gamma) \\ \sup_{x \in \Omega'} |u(x)| &< \infty\end{aligned}$$

の解は一意的に存在し、それは

$$\begin{aligned}u &= \text{二重層ポテンシャル } U - \text{定数 } C^*, \\ U(x) &= \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{|x-y|^2} ds_y \quad (x \in \Omega')\end{aligned}$$

の形に表わされる。ここで C^* は、

$$C^* = \frac{\int_{\Gamma} f(y) \bar{\omega}(y) ds_y}{\int_{\Gamma} \bar{\omega}(y) ds_y}$$

で定義される ($\bar{\omega}$ は、補題 3.3 に現われる関数である)。また分布密度 τ は定数を加えることを除いて一意的に定まる。具体的には、次の積分方程式の解である:

$$\tau(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \tau(y) \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{|x-y|^2} ds_y + \frac{1}{\pi} f(x) \quad (x \in \Gamma).$$

(4) 外部 Neumann 境界値問題

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega') \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \quad (\text{on } \Gamma) \\ \sup_{x \in \Omega'} |u(x)| &< \infty\end{aligned}$$

が解けるためには、境界条件 f が

$$\int_{\Gamma} f(y) ds_y = 0$$

を満すことが必要十分である。このとき、解 u は

$$\begin{aligned}u &= \text{一重層ポテンシャル } U + \text{任意定数}, \\ U(x) &= -\int_{\Gamma} \log |x-y| \omega(y) ds_y \quad (x \in \Omega)\end{aligned}$$

の形で表現できる。分布密度 ω は f によって一意的に定まる。具体的には、 ω は次の積分方程式の解である:

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle x-y, n_x \rangle}{|x-y|^2} \omega(y) ds_y + \frac{1}{\pi} f(x) \quad (x \in \Gamma).$$

3.7 円板領域の場合

円盤領域の場合、積分方程式は具体的に解ける。(この項書きかけ)

4 Riemann の写像定理の歴史

高橋 [8] 第 5 章から引用

Riemann (1826–1866) は 1851 年に彼の学位論文の中で「単連結で少なくとも 2 点以上の境界点を持つ領域は単位円の内部に同型である」という定理を与えた。しかし Riemann の「証明」は Dirichlet (1805–1859) による Dirichlet の原理を用いるもので、Weierstrass (1815–1897) が指摘したように厳密な証明とは認められないものであった。その後、ノイマン、シュワルツ等は境界が解析曲線からなる場合に、ピカールは数個の解析曲線からなる場合に証明し、パンルベ (Painlevé, 1863–1933) は滑らかな閉曲線で囲まれた場合を取り扱った。これらの証明では、同時に境界の閉曲線と単位円周との対応をも考えていた。ところで、1907 年 Poincaré (1854–1912) は、境界の対応は論外におくという新しい立場に立って、領域が単位円板の内部に同型であることを証明した。この Poincaré の方法で残された境界と単位円周との対応は Carathéodory (1873–1950) によって研究された。この境界がいわゆる Jordan 閉曲線である場合には、同型を与える関数が境界の上まで連続的に拡張できて、領域の閉包 \bar{D} から閉単位円板への同相写像が得られる。一方、Riemann の証明を救う試みは、多くの数学者が努力したところだが、結局これに成功したのは 50 年後の Hilbert であった。Hilbert は変分問題の解が存在することを証明した。この方法を整理・修正して、それを関数論の幾何学的理論と極小曲面論に応用したのが Courant (1888–1972) である。

Poincaré の「科学と」には次のように書かれている (準備中)。

溝畑茂「解析学小景」 [9] には次のように書かれている (準備中)。

なお、杉浦 [10] も参照せよ。

Georg Friedrich Bernhard Riemann	1826–1866	写像定理の「証明」
Carl Gottfried Neumann	1832–1925	境界上の積分方程式に帰着
E.I.Fredholm	1866–1927	積分方程式の可解性 (Fredholm の交代定理, 1903)
David Hilbert	1862–1943	Dirichlet 原理の正当化
George Green	1793–1841	Green の積分定理, Green 関数

5 球における Poisson 積分

5.1 平面の円板領域の場合

(ここに書いたことは、大抵の本に載っている。例えばペトロフスキー [3] の第 3 章、藤田 [6] の第 3 章、熊ノ郷 [11] の第 3 章と第 5 章など。特に 2 次元の話に限れば、複素関数論や Fourier 解析の本にも載っていることが多い。例えば高橋 [8] の第 ? 章や辻・小松 [5] の第 ? 章、小松 [12] の第 ? 章。「微分方程式 2 講義ノート」 [2] にもまとめてある。)

単位円盤領域 $D_1 = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$ における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(7) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } D_1,$$

$$(8) \quad u = \psi \quad \text{on } \partial D_1$$

の解は次式で与えられるのであった:

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi])$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \sin n\theta \, d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

ただし、

$$\Psi(\theta) := \psi(\cos \theta, \sin \theta) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

これから

$$\begin{aligned} u(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \, d\phi \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \cos n\phi \, d\phi \cos n\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \sin n\phi \, d\phi \sin n\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta) \right] d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\phi - \theta) \right] d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) P_r(\theta - \phi) d\phi. \end{aligned}$$

ここで

$$P_r(\theta) := \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \right]$$

とおいた。

$$\begin{aligned} 2\pi P_r(\theta) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = 1 + 2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} = 1 + 2\operatorname{Re} \frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \\ &= 1 + 2\operatorname{Re} \frac{re^{i\theta}(1 - re^{-i\theta})}{|1 - re^{i\theta}|^2} = 1 + \frac{2(r \cos \theta - r^2)}{(1 - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \\ &= 1 + \frac{2(r \cos \theta - r^2)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \frac{2(r \cos \theta - r^2) + 1 - 2r \cos \theta + r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \end{aligned}$$

まとめると

定理 5.1 (単位円板における Poisson 積分)

$$(9) \quad P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

とおくとき、 $\psi \in C(\partial D_1)$ に対する、単位円盤における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題 (7) の古典解は

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi) \psi(\cos \phi, \sin \phi) d\phi & (r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi]) \\ \psi(\cos \theta, \sin \theta) & (r = 1, \theta \in [0, 2\pi]) \end{cases}$$

で与えられる。

(9) で定義される $P(r, \theta)$ を **Poisson 核**、積分

$$(10) \quad P_r * \Psi(\theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi) \Psi(\phi) d\phi$$

を **Poisson 積分** と呼ぶ。

注意 5.2 Fourier 級数で書けているのに、あえて書き直す理由は何か？

1. 実は Poisson 積分は、空間の次元 n が 3 以上の場合に一般化できるという利点がある。(これに対して、Fourier 級数による解法を一般化するのは難しい。 $n = 3$ の場合にこれに相当するのは、球面調和関数を用いた解法であろうが、相当面倒である。)
2. 熱伝導方程式に対する Green 関数でもそうであるが、無限級数よりも、単一の関数を書いて積分する形の公式の方が取り扱いやすい場合が多い。(無限級数では、すぐに項別積分が可能かどうか問題になる — まあ、積分形式で書いても、事情はそう変わるわけではないのだが、、、)

余談 5.1 半径 R の円盤における問題の場合は

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} d\phi \quad (r \in [0, R), \theta \in [0, 2\pi])$$

Poisson 核の性質について準備しよう。

補題 5.3 (Poisson 核の性質) (1) $P_r(\theta) > 0$.

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1.$$

$$(3) \quad P_r(-\theta) = P_r(\theta + 2\pi) = P_r(\theta).$$

$$(4) \quad \text{任意の } \delta \in (0, \pi) \text{ に対して、} \delta \leq |\theta| \leq \pi \text{ を満たす } \theta \text{ に関して一様に } \lim_{r \uparrow 1} P_r(\theta) = 0.$$

証明

(1) $1 - r^2 > 0$, $1 - 2r \cos \theta + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2 > 0$ であるから。

(2) 級数は項別積分できるから、

$$\int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \left(2\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 0 \right) = 1.$$

(3) \cos は周期 2π の偶関数であるから。

(4) $P_r(\theta)$ は変数 θ の偶関数であるから、 $\theta > 0$ だけ考えれば十分である。 $\delta \leq \theta \leq \pi$ で \cos が減少関数だから $\cos \theta \leq \cos \delta$. ゆえに

$$1 - 2r \cos \theta + r^2 \geq 1 - 2r \cos \delta + r^2 > 0.$$

割り算して

$$0 < \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2}.$$

すなわち

$$0 < P_r(\theta) \leq P_r(\delta).$$

$r \uparrow 1$ とすると、右辺 $\rightarrow 0$ は明らかだから (分母 $\rightarrow 1 - 2\cos \delta + 1 = 2(1 - \cos \delta) \neq 0$ に注意)、 θ につき一様に

$$\lim_{r \uparrow 1} P_r(\theta) = 0. \blacksquare$$

定理 5.4 $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とする。

(1) $1 \leq p < \infty$ ならば任意の $f \in L^p(T)$ に対して

$$\lim_{r \uparrow 1} \|P_r * f - f\|_{L^p(T)} = 0.$$

(2) 任意の $f \in C(T)$ に対して

$$\lim_{r \uparrow 1} \|P_r * f - f\|_{L^\infty(T)} = 0.$$

証明 (1) は省略 (例えば小松 [12] を見よ)。(2) を証明する。 f は一様連続であるから、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して、十分小さな $\delta > 0$ を取ると、

$$|\theta - \tau| < \delta \implies |f(\theta) - f(\tau)| < \varepsilon.$$

そこで

$$P_r * f(\theta) - f(\theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi)(f(\phi) - f(\theta)) d\phi = \int_{|\theta - \phi| \leq \pi} P_r(\theta - \phi)(f(\phi) - f(\theta)) d\phi$$

より

$$\begin{aligned}
 |P_r * f(\theta) - f(\theta)| &\leq \int_{\delta \leq |\theta - \phi| \leq \pi} P_r(\theta - \phi) |f(\phi) - f(\theta)| d\phi + \int_{|\theta - \phi| < \delta} P_r(\theta - \phi) |f(\phi) - f(\theta)| d\phi \\
 &\leq 2 \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| \int_{\delta \leq |\theta - \phi| \leq \pi} P_r(\theta - \phi) d\phi + \varepsilon \int_{|\theta - \phi| < \delta} P_r(\theta - \phi) d\phi \\
 &\leq 2 \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| \int_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} P_r(\tau) d\tau + \varepsilon
 \end{aligned}$$

右辺第1項は補題 5.3 の (4) から $r \uparrow 1$ のとき θ につき一様に 0 に収束する。■

5.2 多次元の場合

高次元への拡張は次のようになる。

定理 5.5 (高次元の球における Poisson 積分) n 次元の開球 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x|^2 < R^2\}$ の境界を Γ_R と書くとき、 $\psi \in C(\Gamma_R)$ に対して、ディリクレ問題

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u = \psi \quad (\text{on } \Gamma)$$

の解 $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$ はただ一つ存在して、Poisson の積分表示式

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\Gamma_R} \frac{R^2 - |x|^2}{(R^2 - 2x \cdot y + |x|^2)^{n/2}} dS_y.$$

で与えられる。

(証明は例えば熊ノ郷 [11])

5.3 複素関数論の見地から

高橋 [8] による。

補題 5.6 開円盤 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < \rho\}$ の点 $z = re^{i\theta}$ に対して

$$P(r, \theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{\rho + z}{\rho - z} \right) = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2}$$

とおく。これをこの円盤の Poisson 核とよぶ。このとき次の性質がある。

(1)

$$P(r, \theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta}.$$

(2)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta) d\theta = 1.$$

(3) $P(r, \theta) > 0$, $P(r, \theta) = P(r, -\theta) = P(r, \theta + 2\pi)$ すなわち $P(r, \theta)$ は θ につき周期 2π の偶関数である。

(4) $0 < \delta \leq |\theta| \leq \pi$ のとき、

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} \leq P(r, \theta) \leq P(r, \delta).$$

(この左辺を高橋先生は間違っていた、と思う。そもそも何のために使うのだろう。)

(5) $0 < \delta < \pi$ のとき、 $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ を満す θ につき一様に

$$\lim_{r \uparrow \rho} P(r, \theta) = 0.$$

証明 $P_r(\theta)$ は変数 θ の偶関数であるから、 $\theta > 0$ だけ考えれば十分である。 $\delta \leq \theta \leq \pi$ で \cos が減少関数だから

$$-1 = \cos \pi \leq \cos \theta \leq \cos \delta.$$

ゆえに

$$\rho^2 + 2\rho r + r^2 = \rho^2 - 2\rho r \cos \pi + r^2 \geq \rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2 \geq \rho^2 - 2\rho r \cos \delta + r^2 > 0.$$

割り算して

$$\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + 2\rho r + r^2} = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos \pi + r^2} \leq \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2} \leq \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos \delta + r^2}.$$

すなわち

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} = \frac{\rho - r^2}{\rho^2 - 2\rho r + r^2} = P_r(\pi) \leq P_r(\theta) \leq P_r(\delta). \quad \blacksquare$$

定理 5.7 円周 $|z| = \rho$ 上で連続な関数 f が (変数 t の 2π を周期とする関数として) 与えられたとき、 $|z| < \rho$ に対して

$$F(z) = F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)P(r, \theta - t)dt$$

とおけば、この関数 F は $|z| < \rho$ で調和、 $|z| \leq \rho$ で連続で、

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \rho e^{i\theta_0} \\ |z| < \rho}} F(z) = f(\theta_0)$$

が成り立つ。

系 5.8 u が $\{z; |z| \leq \rho\}$ で連続、 $\{z; |z| < \rho\}$ で調和ならば、 $0 \leq r < \rho$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき、

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) u(\rho e^{it}) dt$$

で、しかも u は正則関数

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{it} + z}{\rho e^{it} - z} u(\rho e^{it}) dt$$

の実部に等しい。

定理 5.9 円周 $|z| = \rho$ 上で可積分な関数 f が (変数 t の 2π を周期とする関数として) 与えられたとき、 $|z| < \rho$ に対して

$$F(z) = F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)P(r, \theta - t)dt$$

とおけば、この関数 F は $|z| < \rho$ で調和で、ほとんどすべての θ_0 に対して

$$\lim_{r \uparrow \rho} F(re^{i\theta_0}) = f(\theta_0)$$

が成り立つ。

6 Poisson 方程式の特解

(なかなか決定打がない。)

6.1 熊ノ郷氏のテキストから

熊ノ郷 [11] 第 5 章からの引用。

命題 6.1 $\rho < n$ なる実数 ρ に対して、 $H_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ を $-\rho$ 次の同次関数、すなわち

$$H(\lambda x) = \lambda^{-\rho} H(x) \quad (\lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

として、

$$u_\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} H_\rho(x-y)\varphi(y) dy$$

とおくとき、次が成り立つ。

(i) $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ とすると、 $\rho + k < n$ なる k に対して $u_\rho \in C^k(\mathbb{R}^n)$ となり、

$$\partial_x^\alpha u_\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\alpha H_\rho)(x-y)\varphi(y) dy \quad (|\alpha| \leq k)$$

(ii) さらにある $\sigma \in (0, 1]$ なる σ に対して、 φ が σ 次 Hölder 連続であるならば、すなわち

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^\sigma$$

を満す正定数 C が存在するならば、 $\rho = -k + n$ に対して $u_\rho \in C^k(\mathbb{R}^n)$ であり、任意の $\tau > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} \partial_x^\beta u_\rho(x) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x; \tau)} (\partial_{x_j} \partial_x^\beta H_\rho)(x-y)\varphi(y) dy \\ &\quad + \int_{B(x; \tau)} (\partial_{x_j} \partial_x^\beta H_\rho)(x-y)(\varphi(y) - \varphi(x)) dy \\ &\quad + \varphi(x) \int_{\partial B(0; \tau)} \frac{y_j}{|y|} \partial_y^\beta H_\rho(y) dS_{\tau, y} \quad (|\beta| = k-1, j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

ここで $dS_{\tau, y}$ は球面 $\partial B(0; \tau)$ の面積要素を表わす。

命題 6.2 $\rho < n$ なる実数 ρ に対して、 $H_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ を $-\rho$ 次の同次関数として、

$$u_\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} H_\rho(x-y) \log|x-y|\varphi(y) dy$$

とおくとき、 $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ とすると、 $\rho + k < n$ なる k に対して $u_\rho \in C^k(\mathbb{R}^n)$ となり、

$$\partial_x^\alpha u_\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_\xi^\alpha H_\rho(\xi) \log|\xi|)|_{\xi=x-y}\varphi(y) dy \quad (|\alpha| \leq k)$$

定理 6.3 $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ は σ 次 Hölder 連続とする ($\sigma \in (0, 1]$)。このとき

$$u(x) = E * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)dy$$

とおくと、 $u \in C^2$ となり、

$$-\Delta u = f.$$

補題 6.4 非負整数 m に対して $\{c_j\}_{j=1}^{m+1}$ を

$$\sum_{\ell=1}^{m+1} c_\ell (-\ell)^k = 1 \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

を満す実数の組とする。このとき $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ で C^m -級となる関数 $(t, x) \mapsto f(t, x)$ は

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & (t \geq 0) \\ \sum_{\ell=1}^{m+1} c_\ell f(-\ell t, x) & (t < 0) \end{cases}$$

によって $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ で定義された C^m -級の関数 \tilde{f} に拡張される。

補題 6.5 Ω は \mathbb{R}^n における C^m -級の有界領域で ($m \geq 1$) あるとする。すなわち $\forall x_0 \in \Gamma := \partial\Omega$ に対して、 x_0 の近傍 U_0 と $\phi \in C^m(U_0; \mathbb{R})$ が存在して、

$$\Gamma \cap U_0 = \{x \in U_0; \phi(x) = 0\}, \quad \Omega \cap U_0 = \{x \in U_0; \phi(x) > 0\}$$

となる。このとき $f \in C^m(\bar{\Omega})$ は $C_0^m(\mathbb{R}^n)$ の元 \tilde{f} に拡張される。

さて、 Ω を \mathbb{R}^n の C^1 級の有界領域、 $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ とするとき、 ψ を $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ の元 $\tilde{\psi}$ に拡張し、

$$v := E * \tilde{\psi}$$

とおくと、 $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ で、

$$-\Delta v = \tilde{\psi}$$

ゆえに

$$-\Delta v = \psi \quad (\text{in } \Omega).$$

そこで $\varphi := \psi - v|_\Gamma$ とおいて、

$$\Delta w = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad w = \varphi \quad (\text{on } \Gamma)$$

なる w を求めれば $u = w + v$ は

$$-\Delta u = \psi \quad (\text{in } \Omega), \quad u = \psi \quad (\text{on } \Gamma)$$

を満す。

6.2 ペトロフスキーのテキストから

ペトロフスキー [3] の §35-5 から。

Ω を \mathbb{R}^2 の有界領域、 $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ とするとき、

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log|x-y|f(y)ds_y \quad (x \in \Omega)$$

とおくとき、 $v \in C(\mathbb{R}^2)$, $v|_{\Omega} \in C^2(\Omega)$ であり、一階微分については積分記号下の微分が成立する。そして

$$-\Delta v = f \quad (\text{in } \Omega), \quad \Delta v = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}).$$

注意 6.6 $f \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ というだけでは、 $u = v|_{\Omega}$ の通常の意味での 2 階微分可能性は保証されない。もっとも、超関数微分やある種の拡張された Laplacian を考えれば $-\Delta u = f$ は成立する。

6.3 藤田のテキストから

藤田 [6] の第 3 章にある。命題としては上のペトロフスキーと同じものがあるが、証明はずっと読みやすい (お勧め)。

6.4 Kellog のテキストから

f が有界かつ Hölder 条件を満たすならば OK, というのだが、

- Hölder 条件は局所的なもので構わない。つまり、ある点 x で f が Hölder 条件を満たせば、その点で u は二階微分できて $-\Delta u(x) = f(x)$ を満たす。
- 上に述べたことから明らかであるが、 u が二階微分可能で Poisson 方程式を満たすための十分条件として、Hölder 条件の指数、つまり

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

の形に書いたときの α の値の範囲については 何でも良い (つまり 1 より大きな α について Hölder 条件を満たせば、1 より小さい α' について Hölder 条件が成り立つから。これは局所的 Hölder 条件だから。)。 $0 < \alpha < 1$ とか $0 < \alpha \leq 1$ と書いてある本が多いが、それは $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ という結論を導きたいからであろう。……(2013/10 久しぶりに見たら、とんでもないことが書いてあるぞ) なんて書いたけれど、 $\alpha > 1$ であれば f の導関数が 0 になって、 f は定数関数になってしまう、というのが大事だ。つまり $\alpha > 1$ はほとんどナンセンスである。一方で f が C^1 ならば、少なくともローカルには $\alpha = 1$ として Hölder の条件が成り立つ。

7 積分方程式

この節の内容は藤田 [6] による。

定理 7.1 (Laplacian の座標変換に関する不変性) 微分作用素 Δ は座標系の平行移動、広義回転 (回転および反転) に関して不変である。

証明 (準備中 — そんなに難しくない。「微分方程式2 講義ノート」 [2] に書いておいた。) ■

定理 7.2 (Neumann データの必要条件) u が滑らかな境界を持つ有界領域 Ω において境界まで込めて C^1 級の調和関数とすれば、

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

が成り立つ。ただし n は Ω の境界上の点における外向き単位法線ベクトルを表わす。

証明 Green の公式

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS, \\ \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx &= \int_{\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dS. \end{aligned}$$

の二つ目において、 $v \equiv 1$, $\Delta u = 0$ とする。 ■

\mathbb{R}^m において

$$(11) \quad E(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & (m=2) \\ \frac{1}{(m-2)|S^{m-1}|} \frac{1}{|x|^{m-2}} & (m \geq 3) \end{cases}$$

とおく (ただし $|S^{d-1}|$ は \mathbb{R}^d 内の単位球の表面積とする)。

補題 7.3 Ω は \mathbb{R}^m の滑らかな Jordan 閉曲面で囲まれた有界領域とする。 u が $\bar{\Omega}$ で C^2 -級ならば

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \, dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) u(y) \, dS_y \\ &= \begin{cases} u(x) & (x \in \Omega) \\ \frac{1}{2} u(x) & (x \in \partial\Omega) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}). \end{cases} \end{aligned}$$

ただし E は (11) で定義される関数である。

証明 $m=3$ として証明する (そうでない場合も同様である)。一般性を失うことなく $x=0$ と仮定できる。

(i) $x = 0 \in \Omega$ の場合 ε を $\overline{B(0; \varepsilon)} \subset \Omega$ となるような十分小さな正数として、

$$\sigma_\varepsilon = \partial B(0; \varepsilon) \stackrel{\text{def.}}{=} \{y \in \mathbb{R}^3; |y| = \varepsilon\}, \quad \Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B(0; \varepsilon)}$$

とおく。Green の積分公式 (11) から

$$(12) \quad - \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|y|} \Delta u \, dy = \int_{S \cup \sigma_\varepsilon} \left[u \frac{1}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|y|} \right) - \frac{1}{|y|} \frac{\partial u}{\partial n_y} \right] dS_y.$$

ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすることを考える。左辺については

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(- \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|y|} \Delta u \, dy \right) = - \int_{\Omega} \frac{1}{|y|} \Delta u \, dy.$$

一方 (12) の右辺の面積分を S 上のものと σ_ε 上のものに分けて考えると、 S 上の面積分は ε によらない。 σ_ε 上の面積分

$$I_\varepsilon = \int_{\sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|y|} \right) dS_y, \quad J_\varepsilon = \int_{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{1}{|y|} \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} dS_y$$

を考察する。 σ_ε 上では

$$\frac{\partial}{\partial n_y} = - \frac{\partial}{\partial |y|} = - \frac{\partial}{\partial r}$$

であることと、 $|y| = \varepsilon$ であることから

$$I_\varepsilon = \int_{\sigma_\varepsilon} u(y) \left(- \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) dS_y = \int_{\sigma_\varepsilon} u(y) \frac{1}{\varepsilon^2} dS_y = 4\pi \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\sigma_\varepsilon} u(y) dS_y \right).$$

この式右辺の () 内は σ_ε における u の平均値になっているので、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $u(0)$ に収束する。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\varepsilon = 4\pi u(0).$$

一方

$$|J_\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\sigma_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial n_y} \right| |d\sigma| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{|y| \leq \varepsilon_0} \left| \frac{\partial u}{\partial n_y} \right| \cdot 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

ゆえに (12) で $\varepsilon \rightarrow 0$ とした極限として

$$(13) \quad - \int_{\Omega} \frac{1}{|y|} \Delta u \, dy = \int_S \left[u \frac{1}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|y|} \right) - \frac{1}{|y|} \frac{\partial u}{\partial n_y} \right] dS_y + 4\pi u(0)$$

を得る。

(ii) $x = 0 \in \partial\Omega$ の場合 今度は

$$\sigma_\varepsilon := \{y \in \bar{\Omega}; |y| = \varepsilon\}, \quad S_\varepsilon := \{y \in S; |y| \geq \varepsilon\}$$

とおく。以前と同様に Green の公式から

$$(14) \quad - \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|y|} \Delta u \, dy = \int_{S_\varepsilon \cup \sigma_\varepsilon} \left[u \frac{1}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|y|} \right) - \frac{1}{|y|} \frac{\partial u}{\partial n_y} \right] dS_y.$$

を得るが、今度は

$$I_\varepsilon := \int_{\sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|y|} \right) dS_y \rightarrow 2\pi u(0) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

となる。実際

$$I_\varepsilon = 2\pi \frac{|\sigma_\varepsilon|}{2\pi\varepsilon^2} \left(\frac{1}{|\sigma_\varepsilon|} \int_{\sigma_\varepsilon} u(y) dy \right)$$

と書け、

$$\left(\frac{1}{|\sigma_\varepsilon|} \int_{\sigma_\varepsilon} u(y) dy \right) \rightarrow u(0) \quad (\varepsilon \downarrow 0),$$

$$\frac{|\sigma_\varepsilon|}{2\pi\varepsilon^2} \rightarrow 1 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

が成り立つから。■

系 7.4 (調和関数の境界積分による表現 — 境界要素法の基礎) Ω は \mathbb{R}^m の滑らかな Jordan 閉曲面で囲まれた有界領域とする。 u が $\bar{\Omega}$ で C^2 -級、 Ω で調和ならば

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y \quad (x \in \Omega),$$

$$\frac{1}{2}u(x) = \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y \quad (x \in \partial\Omega).$$

ただし E は (11) で定義される関数である。

証明 補題の等式において $\Delta u = 0$ とすればよい。■

系 7.5 (調和関数の実解析性) 任意の領域における調和関数は実解析的である。特に C^∞ -級でもある。

証明 (C^∞ 級であることの証明) 注目する点を中心とする球において、系 7.4 の表現をすると、積分記号下の微分が何回でもできることがわかる。■

系 7.6 (Laplacian の基本解) Ω を \mathbb{R}^m の任意の領域で、 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ とするとき、

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta \varphi(y) dy.$$

ただし E は (11) で定義される関数である。これから超関数の意味で

$$-\Delta_y E(x-y) = \delta(x-y).$$

特に

$$-\Delta E = \delta.$$

つまり

\mathbb{R}^m において E は $-\Delta$ の基本解である。

証明 簡単のため、 Ω は補題 7.3 の条件を満足すると仮定して証明する。 u として φ を適用すると、 ∂S で $\varphi = 0$ となることから、

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta \varphi(y) dy$$

が得られる。■

超関数の畳み込みについて知っていれば、Poisson 方程式

$$-\Delta u = f$$

の特解として

$$u = E * f$$

が得られることが分かるであろう。普通の関数の世界の命題として二つほど紹介しておこう。

命題 7.7 (Poisson 方程式の特解) Ω が \mathbb{R}^m の有界領域であるとき、 $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ に対して

$$u(x) := \int_{\Omega} E(x-y)f(y)dy \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

とおくと、 $u \in C^2(\Omega)$ で、

$$-\Delta u = f(x) \quad (x \in \Omega)$$

証明 藤田他 [6] を見よ。■

命題 7.8 Ω が \mathbb{R}^m の有界領域であるとき、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ がある $\theta \in (0, 1)$ について θ 次 Hölder 連続、すなわち

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\theta \quad (x, y \in \Omega)$$

が成り立つような正定数 K が存在するならば、 u は $C^{2+\theta}$ -級で

$$-\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

証明 途中までは■

8 最大値原理

一般の楕円型方程式については、Protter-Weinberger [13] に詳しいが、Laplace 方程式の場合は球面平均の定理から強最大値原理が導かれるので、あまり細かい議論は必要ない。

8.1 概観

弱い最大値原理は藤田 [6] に載っていて、「微分方程式2講義ノート」 [2] に証明まで込めて引用した。

強い最大値原理の証明には

1. 球面平均の定理を使う方法 (藤田 [6])
2. 球面平均の定理を使わない方法 (ペトロフスキー §28)
これは一般の楕円型方程式に拡張可能?

球面平均の定理は 2 次元の場合は Fourier 級数解から明らか。Fourier 級数解が一意的な解であることを証明するため弱い最大値原理は必要だが。

8.2 弱い最大値原理

定理 8.1 (調和関数の弱最大値原理) Ω を有界領域とし、 $\Gamma = \partial\Omega$ とおく。 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ が Ω で調和ならば、

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \Gamma} u(x), \quad \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \Gamma} u(x).$$

証明 藤田 [6] あるいは「微分方程式 2 の講義ノート」 [2] を見よ。■

8.3 球面平均の定理

定理 8.2 (調和関数の球面平均の定理) K を \mathbb{R}^3 における中心 a , 半径 R の閉球とし、 S をその境界とする。 u が K で連続、 K の内部で調和ならば、 $u(a)$ は u の S における平均値に等しい。すなわち

$$(15) \quad u(a) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x-a|=R} u(x) dS.$$

証明 まず u が S まで込めて C^2 -級の場合に証明する。一般性を失わずに $a = 0$ とできる。

$$4\pi u(0) = \int_S \frac{1}{|y|} \frac{\partial u}{\partial n_y} dS_y - \int_S \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|y|} \right) u(y) dS_y$$

が成り立つが、 S 上では

$$\frac{1}{|y|} = \frac{1}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|y|} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{R^2}$$

であるから

$$4\pi u(0) = \frac{1}{R} \int_S \frac{\partial u}{\partial n_y} dS_y + \frac{1}{R^2} \int_S u(y) dS_y.$$

ところで、調和関数については右辺の第一項は 0 であるから、

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S u(y) dS_y.$$

u が S まで C^2 -級でない場合には、 $K_\varepsilon = \overline{B(0; R - \varepsilon)}$ について上の議論を行って

$$u(0) = \frac{1}{4\pi(R - \varepsilon)^2} \int_{S_\varepsilon} u(y) dS_y.$$

を得てから $\varepsilon \downarrow 0$ とする。■

定理 8.3 (球面平均の定理の逆) Ω を \mathbb{R}^3 の任意の領域とする。 Ω で定義された連続関数 u が、 Ω に含まれる任意の閉球 $K = \{x \in \mathbb{R}^3; |x - a| \leq R\}$ に対して

$$u(a) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x-a|=R} u(x) dS$$

が成り立つならば、 u は Ω において調和関数である。

証明 (準備中 — 藤田 [6] 第4章にある) ■

8.4 強最大値原理 — 球面平均の定理による証明

定理 8.4 (調和関数の強最大値原理) Ω を \mathbb{R}^3 の有界領域とする。 u が $\bar{\Omega}$ で連続、 Ω で調和な関数であるならば、 u が定数関数である場合をのぞいて、領域の境界 $\Gamma = \partial\Omega$ においてのみ $\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$, $\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$ に到達する。

証明 (準備中 — 藤田 [6] 第4章にある) ■

8.5 球面平均の定理を使わない方法

補題 8.5 Ω を \mathbb{R}^n の開球 $B(a; R) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < R\}$ とする。連続関数 $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ が Ω の内部で調和であり、ある $x_0 \in \partial\Omega$ に対して、

$$\forall x \in \Omega \quad u(x) > u(x_0)$$

を満たし、 x_0 における Ω の外向単位法線 n と鋭角をなす^a ベクトル ν 方向の方向微分係数 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ が存在するならば

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

^a ν と n が鋭角をなすとは、 $\langle \nu, n \rangle > 0$ ということ。

証明 $n = 2$ の場合に証明する。 $a = 0$ としてよい。

$$v(x) := -\log r + \frac{r^2}{4R^2} + \log R - \frac{1}{4}, \quad r = |x|$$

とおくと、 $v = 0$ (on $\partial\Omega$), さらに

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} + \frac{r}{2R^2} < 0 \quad (r \in (0, R])$$

であるから

$$v(x) > 0 \quad (0 < |x| \leq R).$$

一方

$$\Delta v = \frac{1}{R^2}.$$

さて、

$$D := \{x \in \mathbb{R}^2; R/2 < |x| < R\}, \quad \alpha := \inf\{u(x) - u(x_0); |x| = R/2\}$$

とおくと、仮定より $\alpha > 0$. そこで

$$w(x) := u(x) - u(x_0) - \frac{\alpha}{v(R/2e_1)}v(x)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} w &\geq 0 \quad (\text{on } \partial D), \\ \Delta w &= -\frac{\alpha}{v(R/2e_1)R^2} < 0 \end{aligned}$$

w は D で最小値を取れないので $w \geq 0$ (in D). ゆえに

$$u(x) - u(x_0) \geq \frac{\alpha}{v(R/2e_1)}v(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos(\vec{u}, \vec{r})$$

定理 8.6 (調和関数の強最大値原理) Ω を \mathbb{R}^n の領域 Ω における定数でない調和関数とする。このとき、 Ω の点において u がその上限、下限に到達することは決してない。

証明 (工事中) ■

系 8.7 (調和関数の弱最大値原理) \mathbb{R}^n の有界領域 Ω において調和で、 $\bar{\Omega}$ で連続な関数は、 $\partial\Omega$ で最大値および最小値を取る。

証明 (工事中) ■

9 Green 関数

なかなかすっきり書いてある本がないなあ。直感的にコンパクトにまとめて「微分方程式2」の講義ノートに書き加えたいのだが。

9.1 落書き

- 辻・小松 [5] 関数論演習、スタンリー・ファーロー
- 2003 年頃の数セミに書かれた記事 (by 岡本久 [14])。
- 超関数的特徴づけ
- 代表的な領域の Green 関数
- Green 関数の微分で Poisson 核がかかること
- 熱方程式の Green 関数との関係

\mathbb{R}^n の領域 Ω に対する Dirichlet 問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad (\text{in } \Omega) \\ u &= 0 \quad (\text{on } \Gamma) \end{aligned}$$

の解を

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$$

のように表現したい。こういう G を Ω に対する **Green 関数** という。

超関数の言葉を使うと、任意の $y \in \bar{\Omega}$ に対して

$$(16) \quad -\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) \quad (x \text{ についての超関数としての等式})$$

$$(17) \quad G(x, y) = 0 \quad (\forall x \in \partial\Omega)$$

であるような G を見つければよいことになる。

ところで条件 (16) を満たすものとして、我々は基本解 (を平行移動した) $E(x - y)$ というものを知っている。そこで

$$\begin{aligned} g(x, y) &:= G(x, y) - E(x, y) \\ &= G(x, y) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \quad (\text{例えば } n = 3 \text{ の場合}) \end{aligned}$$

により**補正関数** g を定義すると、 g は次の性質を持てば良いことが分る。

補正関数の条件

$\forall y \in \Omega$ を固定して $v = g(\cdot, y)$ つまり $v(x) = g(x, y)$ ($x \in \bar{\Omega}$) とおくと、 v は

$$\Delta v = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad v(x) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} = 0 \quad (x \in S)$$

を満たす。

この条件は $g(\cdot, y)$ についての Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題に他ならない。つまり Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題が解けるならば Green 関数が得られる。これから次のことは納得できるであろう。

- 一般的な領域の Green 関数を具体的に求めることは難しい。存在を抽象的に証明することはできる。
- 球や半平面などの簡単な領域については Green 関数を具体的に求めることができる (これらの領域については、Poisson 核の具体的な公式も有名だ)。
- 2次元領域については写像関数 (単位円板の上に等角に写像する関数) を用いれば、Green 関数が書ける。従って、写像関数の具体形が分かっている領域については Green 関数、Poisson 核の具体形が得られる。

9.2 簡単な領域の Green 関数

例 9.1 (半空間の Green 関数) $\Omega_+ := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$, $S := \partial\Omega_+$ とする。また任意の点 $x \in \mathbb{R}^3$ の S に関する対称点を x^* と書く。つまり

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

このとき、次の問題を考える。

S に金属板をおいて接地 (アース) しているとき、 $a \in \Omega_+$ に電荷 q_a をおくと、電位はどうなるか?

これは

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega_+), \quad u = 0 \quad (\text{on } S)$$

なる u を求めよ、という Dirichlet 問題に他ならない。

金属板を取り外し、代わりに a の対称点 a^* に点電荷 $-q_a$ を置いてみる。このときの電位は

$$v(x) = \frac{q_a}{|x - a|} - \frac{q_a}{|x - a^*|}$$

であるが、これについて以下の (i), (ii) が成り立つ

(i) $v = 0$ on S .
(物理的に明らかであるが、 $x \in S$ ならば $|x - a| = |x - a^*|$ であることから。)

(ii) $\Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{a, a^*\}$.

ゆえに $v|_{\Omega_+}$ が求める電位 u に他ならない。

そこで $\rho \in C_0^1(\Omega_+)$ に対して

$$u(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_+} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x - y^*|} \right) \rho(y) dy \quad (x \in \Omega_+)$$

とおくと

$$-\Delta u = \rho \quad (\text{in } \Omega_+), \quad u = 0 \quad (\text{on } S)$$

となる。実際

$$-\Delta \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_+} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) dy \right) = \rho(x)$$

は良く知られていて、また $\Delta_x \left(\frac{1}{|x-y^*|} \right) = 0$ in Ω_+ なので

$$-\Delta \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_+} \frac{1}{|x-y^*|} \rho(y) dy \right) = 0$$

が成り立つから $-\Delta u = \rho$. さらに $x \in S$ に対して

$$\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y^*|} = 0$$

であるから $u = 0$ on S .

結局

$$G(x, y) := \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y^*|} \right)$$

とおけば G は Ω_+ の Green 関数である。■

例 9.2 (球の Green 関数) $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < R\}$, $S := \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = R\}$ とする。
 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して、その鏡像 x^* を

$$x^* := \frac{R^2}{|x|^2} x$$

で定義する。 $a \in \Omega \setminus \{0\}$ に点電荷 1, a^* に $-R/|a|$ をおいたときの電位は

$$v(x) = \frac{1}{|x-a|} - \frac{R}{|a|} \frac{1}{|x-a^*|}$$

となるが、

$$v = 0 \quad (\text{on } S).$$

実際 $|x| = R$, $|a||a^*| = R^2$ に注意すると

$$\begin{aligned} |a|^2|x-a^*|^2 - R^2|x-a|^2 &= |a|^2(|x|^2 - 2\langle a^*, x \rangle + |a^*|^2) - R^2(|x|^2 - 2\langle a, x \rangle + |a|^2) \\ &= |a|^2 R^2 - 2|a|^2 \langle a^*, x \rangle + R^2 R^2 - R^2 R^2 + 2R^2 \langle a, x \rangle - R^2 |a|^2 \\ &= 2(R^2 \langle a, x \rangle - |a|^2 \langle a^*, x \rangle) \\ &= 2 \left(R^2 \langle a, x \rangle - |a|^2 \left\langle \frac{R^2}{|a|^2} a, x \right\rangle \right) = 0 \end{aligned}$$

であるから

$$|a||x-a^*| = R|x-a|$$

すなわち

$$v(x) = \frac{1}{|x-a|} - \frac{R}{|a|} \frac{1}{|x-a^*|} = 0.$$

そこで

$$G(x, y) := \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|y||x-y^*|} \right) \quad (x \in \bar{\Omega}, y \in \Omega \setminus \{x\})$$

とおくと、これは Green 関数になる。

$$g(x, y) := \frac{1}{4\pi} \frac{R}{|y||x-y^*|}$$

とおくと、

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\sqrt{R^4 - 2R^2\langle x, y \rangle + |x|^2|y|^2}}$$

$y = 0$ でも特異ではない。実際

$$(R^2 - \langle x, y \rangle)^2 + |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2 \geq (R^2 - \langle x, y \rangle)^2$$

であり、 $|x| < R, |y| \leq R$ ならば、この値は正であるから。

一方、明らかに g は $B(0; R) \times \overline{B(0; R)}$ で C^∞ .

y を固定したとき、 $\Delta_x g(\cdot, y) = 0$ in $B(0; R)$.

以上の準備のもとに

$$u(x) := \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \quad (x \in \Omega)$$

は解である。実際

$$u(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} f(y) dy - \int_{\Omega} g(x, y) f(y) dy$$

において、右辺第1項は良く知られているように C^2 -級で $-\Delta$ を施すと f になり、右辺は明らかに調和関数。

$u \in C(\bar{\Omega})$ かつ $u = 0$ on S .

まず $g > 0$ より

$$0 < G(x, y) < \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \quad (x \neq y).$$

$y \in \Omega$ を固定して

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega; |x-y| > \varepsilon\}$$

とおくと

(1) $G(x, y) = 0$ ($x \in S$).

(2) $G(x, y) > 0$ ($x \in \partial B(y; \varepsilon)$).

(3) $\Delta G(\cdot, y) = 0$ in Ω_ε .

最大値原理より $G(x, y) > 0$ ($x \in \Omega_\varepsilon$). ε は任意であったから $G(x, y) > 0$ ($x \in \Omega \setminus \{y\}$).

9.3 一般の有界領域に対する Green 関数の定義

一般の有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ に対する Green 関数の定義を述べる。 $\Delta := \{(x, x); x \in \bar{\Omega}\}$, $S := \partial\Omega$ とおく。

$G: (\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ が Ω の Green 関数であるとは、

(1) G は $(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) \setminus \Delta$ で連続。

(2) $y \in \bar{\Omega}$, $x \in S$, $x \neq y$ とするとき $G(x, y) = 0$.

(3) $g(x, y) := -\left(G(x, y) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}\right)$ とおくと、 g は $\frac{\partial g}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$ とともに $\Omega \times \bar{\Omega}$ で連続であり、 x に関して Ω で調和。さらに $\exists M_1 > 0$ s.t.

$$|g(x, y)| \leq \frac{M_1}{|x-y|} \quad (x, y \in \Omega).$$

命題 9.3 (1) $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t.

$$0 < G(x, y) < \frac{M}{|x-y|} \quad (x, y \in \Omega, x \neq y)$$

(2) $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ならば

$$-\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{on } S)$$

の解 u は

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$$

で与えられる。

(3)

$$G(x, y) = G(y, x) \quad (x, y \in \Omega, x \neq y).$$

(この節は工事中)

9.4 島倉 [1] から

十分滑らかな領域で囲まれた \mathbb{R}^n の有界領域 Ω において Dirichlet 問題

$$(18) \quad (-\Delta + \lambda)u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \quad u(x') = \varphi(x') \quad (x' \in \partial\Omega)$$

を考える。十分滑らかな f と φ に対して、この解が一意であるとき、それを

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y; \lambda) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y; \lambda) \varphi(y) dS_y$$

のように表わすことができる。 $G(x, y; \lambda)$ のことを $-\Delta + \lambda$ の Ω における Dirichlet 問題の **Green 関数** と呼び、 $\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y; \lambda)$ のことを **Poisson 核** と呼ぶ (ν_y は $y \in \partial\Omega$ における $\partial\Omega$ への内向き法線方向への微分を表わす)。 Ω が有界領域であれば、(18) は少なくとも $\lambda \geq 0$ のとき一意可解である。一般に Green 関数は、もし存在すれば

$$G(x, y; \lambda) = E(x, y; \lambda) - G_c(x, y; \lambda)$$

の形をしている。ここで E は $-\Delta + \lambda$ の基本解であり、 G_c は **補正関数** (compensating function) と呼ばれる。すなわち、 $y \in \Omega$ を固定して $x \rightarrow x' \in \partial\Omega$ としたとき $G(x, y; \lambda) \rightarrow 0$ となるように E を補正するのが G_c である。 G の著しい性質は

- $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, $x \neq y$ かつ $\lambda \geq 0$ のとき $G(x, y; \lambda) > 0$.
- $(x, y) \in \Omega \times \partial\Omega$ かつ $\lambda \geq 0$ のとき $\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y; \lambda) > 0$.

である (これは最大値原理から分かる)。

Laplace 方程式の Dirichlet 問題を解くのが Poisson 核、
Poisson 方程式の同次 Dirichlet 問題を解くのが Green 関数、
両者にはきれいな関係がある (何となく Duhamel 原理に似ている)

9.5 対応する放物型問題との関係

9.5.1 島倉 [1] から

$L = P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ を Ω における楕円型微分作用素とする。

関数 $E(x, y)$ が L の基本解であるとは、 $E: (\Omega \times \Omega) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ で、任意の $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x, y) f(y) dy$$

は $Lu = f$ を満たすことを言う。これは大体

$$LE(\cdot, y) = \delta(\cdot - y)$$

を満たす、ということである。特に任意の $y \in \Omega$, $x \in \Omega \setminus \{x\}$ に対して

$$LE(x, y) = 0$$

が成り立つ。

$$(IP) \quad \begin{cases} u_t + Lu = 0 & (t > 0, x \in \Omega) \\ u(x, 0) = f(x) & (x \in \Omega) \\ \Omega \neq \mathbb{R}^n \text{ の場合は境界条件もつける} \end{cases}$$

$U(x, y; t)$ が $\frac{\partial}{\partial t} + L$ の基本解であるとは、 $U: \Omega \times \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ であり、任意の $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$u(x, t) = \int_{\Omega} U(x, y; t) f(y) dy$$

は (IP) の解であることをいう。

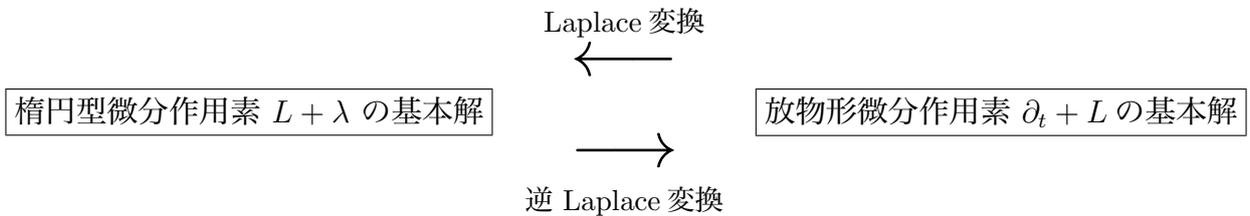
$$E(x, y; \lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(x, y; t) dt$$

がまともな意味を持つならば、 $E(x, y; \lambda)$ は $L + \lambda I$ の基本解となる。

その反対に $\exists c \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > c\}$ に対して $E(x, y; \lambda)$ が $L + \lambda I$ の基本解で、 λ の正則関数であり、

$$U(x, y; t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} E(x, y; \lambda) e^{\lambda t} d\lambda$$

がまともな意味を持つならば $U(x, y; t)$ は $\frac{\partial}{\partial t} + L$ の基本解である。



9.6 1次元の場合 (常微分作用素) の例

$\Omega = (0, \ell), L = -\frac{d^2}{dx^2}$, Dirichlet 境界条件の場合を考えよう。境界条件を考えるので、Green 関数と呼ぶことにする。

9.6.1 L の Green 関数

藤田「応用数学」[15] に載っていたように、

$$G(x, y) := \begin{cases} \frac{x(\ell - y)}{\ell} & (0 \leq x \leq y \leq \ell) \\ \frac{(\ell - x)y}{\ell} & (0 \leq y \leq x \leq \ell) \end{cases}$$

とおくと、

$$u(x) := \int_0^\ell G(x, y) f(y) dy$$

は $Lu = f, u(0) = u(\ell) = 0$ の解となる。実際

$$L_x G(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 G(x, y) = \delta(x - y), \quad G(0, y) = G(\ell, y) = 0$$

が成り立つ。

より一般の常微分作用素に対しても、解の基本系が求まれば Green 関数が構成できる (藤田「現代解析入門」 [16] や桂田 [17] を見よ)。

9.6.2 $L + \lambda$ の Green 関数

藤田「現代解析入門」 [16]、あるいは桂田 [17] で示した手順に従って計算する (暇なときに数式処理で検算すること)。

$(L + \lambda)\varphi = 0$ の解 φ_1, φ_2 で、

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1'(0) = 1,$$

$$\varphi_2(\ell) = 0, \quad \varphi_2'(\ell) = -1$$

を満たすもの (要は、二つの境界条件の一方を満たし、0 でなくて、なるべく簡単なもの) を取る。具体的には

$$\varphi_1(x) = \frac{\sinh \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{\sinh \sqrt{\lambda}(\ell - x)}{\sqrt{\lambda}}$$

となる。一般論から φ_1, φ_2 は解の基本系であることが保証される。定数変化法により $(L + \lambda)u = f, u(0) = u(\ell) = 0$ の解を求めよう。

$$u(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

とおく (c_1, c_2 が関数であることを強調するために “(x)” を書いたが、以下では省略する)。

$$u' = c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 + c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2'$$

であるが、条件

$$(19) \quad c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0$$

を課すことにする。すると

$$u'' = c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2''.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} -(L + \lambda)u &= u'' - \lambda u = c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_1(\varphi_1'' - \lambda\varphi_1) + c_2(\varphi_2'' - \lambda\varphi_2) \\ &= c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2'. \end{aligned}$$

(19), (20) をまとめて、

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}.$$

係数行列の行列式を W とおくと、

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \varphi_2' & -\varphi_2 \\ -\varphi_1' & \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_2 f}{W} \\ -\frac{\varphi_1 f}{W} \end{pmatrix}.$$

W は一般論から定数であることがわかるが、実際に計算すると確かに

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\sinh \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \cdot \cosh \sqrt{\lambda}(\ell - x) - \frac{\sinh \sqrt{\lambda}(\ell - x)}{\sqrt{\lambda}} \cosh \sqrt{\lambda} x \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sinh [\sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda}(\ell - x)] \\ &= -\frac{\sinh \sqrt{\lambda} \ell}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

さて境界条件を考えよう。 $\varphi_1(0) = \varphi_2(\ell) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} u(0) &= c_1(0)\varphi_1(0) + c_2(0)\varphi_2(0) = c_2(0)\varphi_2(0), \\ u(\ell) &= c_1(\ell)\varphi_1(\ell) + c_2(\ell)\varphi_2(\ell) = c_1(\ell)\varphi_1(\ell) \end{aligned}$$

となるので、 $c_2(0) = c_1(\ell) = 0$ であれば $u(0) = u(\ell) = 0$ が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int_x^\ell c_1'(y) dy = -\int_x^\ell \frac{\varphi_2(y)}{W} f(y) dy, \\ c_2(x) &= -\int_0^x c_2'(y) dy = -\int_0^x \frac{\varphi_1(y)}{W} f(y) dy. \end{aligned}$$

したがって、

$$u(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) = \int_0^\ell G(x, y; \lambda) f(y) dy,$$

ただし

$$G(x, y; \lambda) := \begin{cases} -\frac{\varphi_1(y)\varphi_2(x)}{W} = \frac{\sinh \sqrt{\lambda} y \sinh \sqrt{\lambda}(\ell - x)}{\sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda} \ell} & (0 \leq y \leq x \leq \ell) \\ -\frac{\varphi_1(x)\varphi_2(y)}{W} = \frac{\sinh \sqrt{\lambda} x \sinh \sqrt{\lambda}(\ell - y)}{\sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda} \ell} & (0 \leq x \leq y \leq \ell) \end{cases}$$

9.6.3 $\partial_t + L$ の Green 関数

桂田 [2] にも記したように

$$U(x, y; t) := 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \sin n\pi y$$

は $\partial_t + L$ の Green 関数になる。

また、熱方程式の初期値問題の基本解 (いわゆる Gauss 核, 熱核)

$$K(x, y; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$$

を境界に関して繰り返し折り返した和を作ることによって基本解の公式を得ることもできる (鏡映法 ... いずれにせよ一意性があるので結局は同じものであるが)。

(工藤君の卒研にあったな...)

9.7 2次元の場合の例 (1) 円盤

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}$, $L = -\Delta$ の場合を考えよう。

9.7.1 $L = -\Delta$ の Green 関数

これは既に見た 3次元の場合とほとんど同じで

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{R|x-y|}{|y||x-y^*|}$$

9.7.2 $L + \lambda = -\Delta + \lambda$ の Green 関数

$$G(x, y; \lambda) =$$

(準備中)

9.7.3 $\partial_t + L = \partial_t - \Delta$ の Green 関数

$$U(x, y; t) =$$

(準備中)

9.8 関数論による 2次元 Green 関数

この項の内容は、辻・小松 [5] による。

内向き単位法線方向の微分係数が出て来る。幸い (?) $\frac{\partial}{\partial n}$ ではなく、 $\frac{\partial}{\partial \nu}$ と書いてあるので、この節では、 n は外向き単位法線ベクトル、 ν は内向き単位法線ベクトル、と約束することにして無理に「外向き」に直さないことにする。

定義 9.4 G が \mathbb{C} の領域 D の Green 関数であるとは、 $G: D \times D \setminus \{(z, z); z \in D\} \rightarrow \mathbb{R}$ で、次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすことをいう。

(i) $\forall z_0 \in D$ に対して、 $D \setminus \{z_0\} \ni z \mapsto G(z, z_0) \in \mathbb{R}$ は調和関数である。

(ii) $\forall z_0 \in D$ に対して、 $D \setminus \{z_0\} \ni z \mapsto G(z, z_0) + \log|z - z_0| \in \mathbb{R}$ は D で調和な関数に拡張できる (z_0 は除去可能な特異点である)。

(iii) $\forall z_0 \in D, \forall \zeta \in \Gamma := \partial D$ に対して、 $\lim_{\substack{\zeta \in D \\ z \rightarrow \zeta}} G(z, z_0) = 0$ 。

$\frac{1}{2\pi}G$ が D における $-\Delta$ の Green 関数、ということか。

命題 9.5 D が \mathbb{C} の領域、 G が D の Green 関数であれば、 $\forall z_0 \in D, \forall z \in D \setminus \{z_0\}$ に対して、 $G(z, z_0) > 0$ 。

証明 調和関数の最大値原理による。■

系 9.6 $\forall z_0 \in D, \forall \zeta \in \Gamma := \partial D \setminus \{z_0\}$, ν_ζ を ζ における内向き単位法線ベクトルとするとき、

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_\zeta}(\zeta, z_0) \geq 0.$$

証明 (さも簡単そうに書いてあるのだが、そもそも方向微分係数が存在することは明らかなのだろうか。存在するならば ≥ 0 となることは明らかだが。)■

命題 9.7 D を \mathbb{C} 内の領域、 $\forall z_0 \in D$ とする。 Δ が $z_0 \in \Delta \subset D$ を満たす、滑らかな境界 Γ を持つ領域とするとき、

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \nu_z}(z, z_0) ds_z = 2\pi.$$

ν_z は内向き単位法線ベクトル、 ds_z は線要素 (文献によっては $|dz|$ と書かれるもの) である。

命題 9.8 C を \mathbb{C} 内の滑らかな Jordan 閉曲線、 D を C の囲む有界領域、 G を D の Green 関数とするとき、 \bar{D} で連続かつ D で調和な任意の関数 u に対して

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu_\zeta}(\zeta, z) ds_\zeta \quad (z \in D).$$

系 9.9 C を \mathbb{C} 内の滑らかな Jordan 閉曲線、 D を C の囲む有界領域、 $h: C \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とすると、 D での Laplacian の Dirichlet 境界値問題

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } D), \quad u = h \quad (\text{on } C)$$

の解は

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C h(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu_\zeta}(\zeta, z) ds_\zeta \quad (z \in D).$$

(つまり $\frac{\partial G}{\partial \nu_\zeta}(\zeta, z)$ は Poisson 核である、ということだ。)

10 変分法

将来はまとめたいが…とりあえず溝畑 [18], Brezis [19] を見よう。

A ベクトル解析の公式

\vec{n} は D の境界 ∂D 上の点における外向き単位法線ベクトルを表す。

A.1 2次元

定理 A.1 (Green の定理)

$$(20) \quad \iint_D \text{rot } \vec{u} \, dxdy = \int_{\partial D} \vec{u} \cdot d\vec{s}.$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ とすると、

$$(21) \quad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

実は本質的に同じ内容だが、3次元の Gauss の発散定理に似た形に書き直すことが出来る (それで Gauss-Green の定理と呼ばれることもある)。

命題 A.2 (2次元の Gauss の発散定理)

$$(22) \quad \iint_D \operatorname{div} \vec{u} \, dx dy = \int_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds.$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$$(23) \quad \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P n_x + Q n_y) ds.$$

Green の定理の系として、ポテンシャル論で有用な公式が得られる:

系 A.3 (Green の積分公式)

$$(24) \quad \iint_D (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy = \int_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds.$$

$$(25) \quad \iint_D (f \Delta f + |\nabla f|^2) dx dy = \int_{\partial D} f \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds.$$

$$(26) \quad \iint_D (f \Delta g - g \Delta f) dx dy = \int_{\partial D} \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) ds.$$

$$(27) \quad \iint_D \Delta f dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds.$$

A.2 3次元

定理 A.4 (Gauss の発散定理)

$$(28) \quad \iiint_D \operatorname{div} \vec{u} \, dx dy dz = \iint_{\partial D} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

この定理の簡単な系としてポテンシャル論で有用な次の諸公式が得られる:

系 A.5 (Green の積分公式)

$$(29) \quad \iiint_D (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy dz = \iint_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} d\sigma.$$

$$(30) \quad \iiint_D (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz = \iint_{\partial D} \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma.$$

$$(31) \quad \iiint_D (f \Delta f + |\nabla f|^2) dx dy dz = \iint_{\partial D} f \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma.$$

$$(32) \quad \iiint_D \Delta f dx dy dz = \iint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma.$$

A.3 一般化された Green の積分公式

以下は熊ノ郷 [11] による。

定理 A.6 (Gauss の発散定理) Ω は \mathbb{R}^n の C^1 級の有界領域で、その境界を Γ とする。

このとき $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ に対して

$$\int_{\Gamma} \left(\sum_{j=1}^n v_j(x) n_j(x) \right) dS = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} v_j(x) \right) dx,$$

ベクトル解析の記法を使えば

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} dx$$

が成り立つ。ここで $\vec{n}(x) = \begin{pmatrix} n_1(x) \\ \vdots \\ n_n(x) \end{pmatrix}$ は Γ の点 x における外向き単位法線ベクトルを表す。

Ω における 2 階の偏微分作用素

$$L[u] = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u$$

を考える。ここで

$$a_{jk} \in C^2(\bar{\Omega}), \quad b_j \in C^1(\bar{\Omega}), \quad c \in C(\bar{\Omega}), \quad a_{jk} = a_{kj}$$

とする。このとき L の共役作用素 L^* を

$$L^*[v] = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (a_{jk}(x)v) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (b_j(x)v) + c(x)v$$

で定める。

$L = L^*$ のとき、 L を自己共役と呼ぶ。

L が自己共役であるための必用十分条件は

$$b_j(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} \quad (x \in \Omega, j = 1, 2, \dots, n)$$

であり、このとき

$$L[u] = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + c(x)u$$

と書ける。

定理 A.7 (一般化された Green の積分公式) $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ について

$$\int_{\Omega} (vL[u] - uL^*[v])dx = \int_{\Gamma} \left[v \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} + \gamma uv \right] dS.$$

ここで $\vec{\nu} = \vec{\nu}(x)$ は

$$\vec{\nu}(x) = \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \vdots \\ \nu_n(x) \end{pmatrix}, \quad \nu_j(x) = \sum_{k=1}^n a_{jk}(x)n_k(x) \quad (j = 1, \dots, n).$$

で定義されるベクトル値関数であり、 $\gamma = \gamma(x)$ は

$$\gamma(x) = \sum_{j=1}^n n_j(x) \left(b_j(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} \right)$$

で定義される実数値関数。特に L が自己共役の場合は $\gamma \equiv 0$ で、

$$\int_{\Omega} (vL[u] - uL[v])dx = \int_{\Gamma} \left[v \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} \right] dS.$$

注意 A.8 $L = \Delta$ のときは、 $a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}$, $b_j(x) \equiv 0$, $c(x) \equiv 0$ であり、 $L^* = \Delta = L$. ゆえに自己共役である。さらに $\vec{\nu} = \vec{n}$. ゆえに次の通常の Green の積分公式に一致する。

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v)dx = \int_{\Gamma} \left[v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right] dS.$$

B 球面調和関数

(準備中)

C Poincaré-Perron の方法による Dirichlet 問題の解

(準備中)

Jules Henri Poincaré (1854-1912, フランス)

Oskar Perron (1880-1975) には色々な業績があるが、1923 年の [20] で Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解の存在を証明した。

A 計算用紙

A.1 対数関数

$a > 0$ とする。 $0 < \varepsilon < a$ である ε に対して、

$$\int_{\varepsilon}^a \log x \, dx = [x \log x]_{\varepsilon}^a - \int_{\varepsilon}^a x \cdot \frac{1}{x} \, dx = a \log a - \varepsilon \log \varepsilon - (a - \varepsilon).$$

ゆえに

$$\int_0^a \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^a \log x \, dx = a \log a - a \quad (\text{広義積分は収束}).$$

この値は、 $a \rightarrow 0$ とするとき、もちろん 0 に収束するので、 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.

$$(*) \quad 0 < a < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_0^a \log x \, dx \right| < \varepsilon.$$

$$f(x) = x \log x$$

$c \in (a, b)$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_a^b \log |x - c| \, dx &= \int_a^c \log(c - x) \, dx + \int_c^b \log(x - c) \, dx \\ &= - \int_{c-a}^0 \log t \, dt + \int_0^{b-c} \log t \, dt \\ &= \int_0^{c-a} \log t \, dt + \int_0^{b-c} \log t \, dt. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ を (*) を満たす数とすると、 $b - a < \delta$ ならば、 $\forall c \in (a, b)$ に対して、 $0 < c - a < \delta$ かつ $0 < b - c < \delta$ であるから、

$$\left| \int_a^b \log |x - c| \, dx \right| \leq \left| \int_0^{c-a} \log t \, dt \right| + \left| \int_0^{b-c} \log t \, dt \right| < 2\varepsilon.$$

参考文献

- [1] 島倉紀夫：楕円型偏微分作用素, 紀伊國屋書店 (1978).
- [2] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」), <http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/pde/pde-2013.pdf> (1997 年～).
- [3] I. G. Petrovskii(イ・ゲ・ペトロフスキー)：偏微分方程式論, 東京図書 (1958), 吉田耕作校閲／渡辺毅訳.
- [4] Kellogg, O. D.: *Foundations of Potential Theory*, Springer (1929).
- [5] 辻正次, 小松勇作：大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢満、祐乗坊瑞満、水本久夫。
- [6] 藤田宏, 池部晃生, 犬井鉄郎, 高見穎郎：数理物理に現われる偏微分方程式 I, II, 岩波講座基礎数学, 岩波書店 (1977, 1979).
- [7] 佐藤正千代, 新濃清志：ポテンシャル, 培風館 (1984).
- [8] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から出版された。
- [9] 溝畑茂：解析学小景, 岩波書店 (1997).
- [10] 杉浦光夫：ヒルベルトの問題から見た 20 世紀数学, 笠原 乾吉・杉浦光夫 (編), 20 世紀の数学, 第 14 章, 日本評論社 (1998).
- [11] 熊ノ郷準くまのこうひとし：偏微分方程式, 共立出版 (1978).
- [12] 小松彦三郎ひこさぶろう：Fourier 解析, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店 (1978).
- [13] Protter, M. H. and Weinberger, H. F.: *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag (1984).
- [14] 岡本久：知られざるグリーン, 数学セミナー, 2003 年 7 月号, (2003).
- [15] 藤田宏：三訂版 応用数学, 放送大学出版協会 (2000), 第 7 章『発展系の数値解析』は <http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-0.pdf> から入手できる。
- [16] 藤田宏：現代解析入門, 前篇「現代解析入門」, 岩波書店 (1991), 後篇は吉田耕作著。
- [17] 桂田祐史：常微分方程式ノート, <http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/members/ODE.pdf> (1991～).
- [18] 溝畑茂みぞはた：偏微分方程式論, 岩波書店 (1965).
- [19] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳).

- [20] Perron, O.: Eine Neue Behandlung der Ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$,
Math. Zeitschrift, Vol. **18**, pp. 42–54 (1923).