

常微分方程式の Green 関数

桂田 祐史

2008年6月8日, 2009年12月

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/green2.pdf>

1 1次元 Poisson 方程式

$$-x''(t) = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

結果を先に書くと

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s) ds, \quad G(t,s) := \begin{cases} s(1-t) & (0 \leq s \leq t \leq 1) \\ t(1-s) & (0 \leq t \leq s \leq 1). \end{cases}$$

1.1 素朴に積分して解く

$$x'(t) - x'(0) = - \int_0^t f(s) ds.$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) - x'(0)t &= - \int_0^t \left(\int_0^r f(s) ds \right) dr = - \int_0^t \left(\int_s^t f(s) dr \right) ds \\ &= - \int_0^t (t-s)f(s) ds. \end{aligned}$$

ゆえに ($x(0) = 0$ を用いて)

$$x(t) = x(0) + x'(0)t - \int_0^t (t-s)f(s) ds = x'(0)t - \int_0^t (t-s)f(s) ds.$$

$$0 = x(1) = x'(0) - \int_0^1 (1-s)f(s) ds$$

であるから、

$$x'(0) = \int_0^1 (1-s)f(s) ds.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x(t) &= t \int_0^1 (1-s)f(s) ds - \int_0^t (t-s)f(s) ds \\ &= \int_0^t [t(1-s) - (t-s)] f(s) ds + t \int_t^1 (1-s)f(s) ds \\ &= \int_0^t s(1-t)f(s) ds + \int_t^1 t(1-s)f(s) ds. \end{aligned}$$

1.2 定数変化法で解く

$x''(t) = 0$ の一般解は $x(t) = C_1 + C_2 t$ (C_1, C_2 は任意定数) である。そこで $x(t) = C_1(t) + C_2(t)t$ とおく。

$$x'(t) = C_1'(t) + C_2'(t)t + C_2(t).$$

$$(1) \quad C_1'(t) + C_2'(t)t = 0$$

を仮定すると、 $x'(t) = C_2(t)$. ゆえに $x''(t) = C_2'(t)$ であるから

$$C_2'(t) = -f(t).$$

(1) から

$$C_1'(t) = -C_2'(t)t = tf(t).$$

ゆえに

$$C_1(t) = C_1(0) + \int_0^t sf(s) ds,$$
$$C_2(t) = C_2(0) - \int_0^t f(s) ds.$$

これから

$$x(t) = C_1(0) + \int_0^t sf(s) ds + C_2(0)t - t \int_0^t f(s) ds.$$

境界条件 $x(0) = 0$ より $C_1(0) = 0$ である。 $x(1) = 0$ より

$$0 = x(1) = \int_0^1 sf(s) ds - \int_0^1 sf(s) ds.$$

ゆえに

$$C_2(0) = \int_0^1 f(s) ds - \int_0^1 sf(s) ds = \int_0^1 (1-s)f(s) ds.$$

ゆえに

$$x(t) = \int_0^t sf(s) ds + \int_0^1 t(1-s)f(s) ds - t \int_0^t f(s) ds$$
$$= \int_0^t [s + t(1-s) - t] f(s) ds + \int_t^1 t(1-s)f(s) ds$$
$$= \int_0^t s(1-t)f(s) ds + \int_t^1 t(1-s)f(s) ds.$$

2 より一般の2階線形常微分方程式の境界値問題の Green 関数

ここに書いてある話は良く知られていることではあるが、(初学者は探すのが一苦勞であろうから) 参考書をあげれば、例えば藤田 [1]. 桂田 [2] というノートがある。[2] で書いたまとめを引用しておく。

2 階線形常微分方程式の境界値問題のまとめ

- 正值性の仮定 ($p(t) \geq \exists \delta > 0$) を満たす 2 階線型常微分方程式の境界値問題について、交代定理「可解 \Leftrightarrow 一意 \Leftrightarrow 一意可解」がなりたつ。
- 同次境界条件の場合、一意可解性が成り立つならば、境界値問題の解は Green 関数を用いて表わされる。
- 形式的自己共役な場合には、一意可解性の簡単で具体的な判定条件がある。またその場合、Green 関数は対称性を持つ。
- 形式的自己共役でない場合も、十分小さい (絶対値の大きな負数) λ に対して、 $L_\lambda := L_0 + \lambda$ に対する境界値問題の一意可解性が成り立つ。

また明治大学数学科 3 年生向けの「常微分方程式 1」(by 森本先生) でも講義される。以下のまとめかたは、その講義の内容を拝借したものである。

直接のつながりはないが、初期値問題の Green 関数については、桂田 [3] を見よ。

$A \in M(n; \mathbf{C}), b \in \mathbf{C}^n$ に対して、

$$(2) \quad Ax = b$$

という線形方程式を考えよう (未知数の個数 = 方程式の個数, の連立 1 次方程式)。

$$A^{-1} \text{ が存在} \iff (Ax = 0 \implies x = 0)$$

に注意しよう。このとき、任意の b に対して、(2) の解は一意的に存在し、それは $x = A^{-1}b$ で与えられる。

定理 2.1 (同次方程式の解の一意性 \implies 非同次方程式の解の一意存在 (交代定理), Green 関数)

$I = [a, b], p, q, r \in C(I; \mathbf{C}),$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in I \quad p(t) \geq \delta$$

とするとき、

$$L_0[u] := pu'' + qu' + ru \quad (u \in C^2(I; \mathbf{C}))$$

とおく (つまり $L_0[u](t) = p(t)u''(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t), t \in I$)。同次 Dirichlet 境界値問題

$$L_0[u](t) = 0 \quad (a < t < b), \quad u(a) = u(b) = 0$$

の解が $u \equiv 0$ のみであれば、 $\forall f \in C(I; \mathbf{C})$ に対して、

$$(3) \quad L_0[u](t) = f(t) \quad (a < t < b), \quad u(a) = u(b) = 0$$

の解は一意的に存在し、次式で与えられる:

$$u(t) = \int_a^b G(t, s)f(s) ds \quad (t \in I).$$

ただし

$$G(t, s) := \begin{cases} \frac{\varphi(t)\psi(s)}{W(s)p(s)} & (a \leq t \leq s \leq b) \\ \frac{\varphi(s)\psi(t)}{W(s)p(s)} & (a \leq s \leq t \leq b), \end{cases}$$

φ は $L_0[\varphi] = 0, \varphi(a) = 0, \varphi'(a) = 1$ の解,

ψ は $L_0[\psi] = 0, \psi(b) = 0, \psi'(b) = 1$ の解,

$$W(s) := \det \begin{pmatrix} \varphi(s) & \psi(s) \\ \varphi'(s) & \psi'(s) \end{pmatrix} = \varphi(s)\psi'(s) - \psi(s)\varphi'(s).$$

G を境界値問題 (3) の **Green 関数 (Green function)** と呼ぶ。

例 2.2 $u''(t) = f(t), u(0) = u(1) = 0$ という問題の場合、

$$\varphi'' = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1,$$

$$\psi'' = 0, \quad \psi(1) = 0, \quad \psi'(1) = 1$$

から

$$\varphi(s) = s, \quad \psi(s) = s - 1$$

と求まるので、

$$W(s) = \det \begin{pmatrix} \varphi(s) & \psi(s) \\ \varphi'(s) & \psi'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s & s - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = s \cdot 1 - (s - 1) \cdot 1 = 1,$$

これと $p(s) \equiv 1$ から

$$u(t) = \int_0^t G(t, s)f(s) ds,$$

$$G(t, s) = \begin{cases} t(s - 1) & (0 \leq t \leq s \leq 1) \\ s(t - 1) & (0 \leq s \leq t \leq 1) \end{cases}$$

が得られる。1 節の問題の解は、これに -1 をかけたものである。■

なお、藤田 [1] 定理? では、

$$-u'(a) + \sigma_1 u(a) = u'(b) + \sigma_2 u(b) = 0$$

という境界条件も扱っている。

任意の f に対して解が存在することから、一意性が出るか?

$p, q, r \in C([a, b]; \mathbf{C})$ かな? $p(t) \geq \delta > 0$ はどこで効くのだろう?

証明 φ, ψ を定める常微分方程式の初期値問題は、確かに一意可解である。

φ, ψ は 1 次独立である。実際、 $c_1\varphi + c_2\psi = 0$ とすると、

$$v(t) := c_1\varphi(t) = -c_2\psi(t)$$

とおくと、

$$L_0[v] = 0, \quad v(a) = c_1\varphi(a) = 0, \quad v(b) = -c_2\psi(b) = 0$$

であるから、一意性の仮定から $v = 0$ が導かれ、

$$c_1 = c_1\varphi'(a) = v'(a) = 0, \quad c_2 = c_2\psi'(b) = -v'(b) = 0.$$

ゆえに Wronskian は 0 にならない: $W(s) \neq 0$ ($s \in I$).

後のために、 $\varphi(b) \neq 0, \psi(a) \neq 0$ を示す。もしも $\varphi(b) = 0$ と仮定すると、 φ は $L_0[\varphi] = 0, \varphi(a) = \varphi(b) = 0$ を満たすので、仮定 (同次境界値問題の解の一意性) から、 $\varphi \equiv 0$ が導かれ、 $\varphi'(a) = 1$ と矛盾する。同様にして $\psi(a) \neq 0$ が得られる。

定数変化法で解を求めよう。

$$u(t) = c_1(t)\varphi(t) + c_2(t)\psi(t)$$

とおくと、

$$u'(t) = (c_1'\varphi + c_2'\psi) + (c_1\varphi' + c_2\psi').$$

ここで

$$(4) \quad c_1'(t)\varphi(t) + c_2'(t)\psi(t) = 0 \quad (t \in I)$$

を仮定すると、

$$u'(t) = c_1\varphi' + c_2\psi'.$$

ゆえに

$$u''(t) = c_1'\varphi' + c_2'\psi' + c_1\varphi'' + c_2\psi''.$$

これらから、

$$L_0[u] = c_1L_0[\varphi] + c_2L_0[\psi] + p(c_1'\varphi' + c_2'\psi').$$

u が $L_0[u] = f$ の解であるためには

$$(5) \quad c_1'\varphi' + c_2'\psi' = \frac{f}{p}$$

であることが必要十分である。(4), (5) をまとめて

$$\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{p} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \psi' & -\psi \\ -\varphi' & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\psi f}{pW} \\ \frac{\varphi f}{pW} \end{pmatrix}.$$

これから (a と b のどちらから積分するかは、後を見越した工夫)

$$(6) \quad c_1(t) = c_1(b) + \int_b^t \frac{-\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds, \quad c_2(t) = c_2(a) + \int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds.$$

ゆえに

$$u(t) = \left(c_1(b) + \int_b^t \frac{\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds \right) \varphi(t) + \left(c_2(a) + \int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds \right) \psi(t).$$

境界条件に代入して ($\varphi(a) = \psi(b) = 0$ に注意すると)、

$$0 = u(a) = c_2(a)\psi(a), \quad 0 = u(b) = c_1(b)\varphi(b).$$

$\psi(a) \neq 0, \varphi(b) \neq 0$ であるから、 $c_1(b) = c_2(a) = 0$. ゆえに

$$u(t) = \varphi(t) \int_b^t \frac{\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds + \psi(t) \int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds = \int_a^b G(t,s)f(s) ds. \blacksquare$$

p, q, r が実数値で、 $q = p'$ である場合、 L_0 は**形式的自己共役**であるという¹。これは

$$(L_0[u], v) = (u, L_0[v])$$

となることにちなむ。実際

$$L_0[u] = pu'' + qu' + ru = pu'' + p'u' + ru = (pu')' + ru$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} (L_0[u], v) &= \int_a^b (pu')'v dt + \int_a^b ruv dt = [p(t)u'(t)v(t)]_a^b - \int_a^b (pu')v' dt + \int_a^b ruv dt \\ &= - \int_a^b u'(pv') dt + \int_a^b ruv dt = - [u(t)p(t)v'(t)]_a^b + \int_a^b u(pv')' dt + \int_a^b ruv dt \\ &= \int_a^b u [(pv')' + rv] dt = (u, L_0[v]). \end{aligned}$$

この証明を見れば分かるように、「形式的自己共役」というときは、境界条件も込めて考えるべきものである(そういう意味では、境界条件に言及しない「 L_0 は形式的自己共役」という言い方には問題がある)。

¹もともと「自己共役」とは、Hilbert 空間内の線形作用素についての言葉である。

定理 2.3 (定数項の係数 ≤ 0 である形式的自己共役な境界値問題の一意性) $I = [a, b]$,
 $p, r \in C(I; \mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \quad \forall t \in I \quad p(t) \geq \delta, \\ \forall t \in I \quad r(t) \leq 0 \end{aligned}$$

とするとき、

$$L_0[u] := (pu')' + ru \quad (u \in C^2(I; \mathbf{C}))$$

とおくと、境界値問題

$$L_0[u](t) = 0 \quad (a < t < b), \quad u(a) = u(b) = 0$$

の解は $u \equiv 0$ のみである。

証明 u_1, u_2 が共に解とする。 $u := u_1 - u_2$ とおく。

$$L_0[u] = 0, \quad u(a) = u(b) = 0$$

が成り立つ。 $L_0[u]$ に u をかけて部分積分すると

$$\begin{aligned} 0 = (L_0[u], u) &= \int_a^b (pu')'u \, dt + \int_a^b ru^2 \, dt = [pu'u]_a^b - \int_a^b pu'u' \, dt + \int_a^b ru^2 \, dt \\ &= - \int_a^b p(u')^2 \, dt + \int_a^b ru^2 \, dt \leq -\delta \int_a^b (u')^2 \, dt. \end{aligned}$$

移項して δ で割って

$$\int_a^b (u')^2 \, dt \leq 0.$$

これから $u' = 0$. u は定数だが、 $u(a) = u(b) = 0$ なので実は $u = 0$. ゆえに $u_1 = u_2$. ■

定理 2.4 定数項の係数が ≤ 0 であるような形式的自己共役作用素の境界値問題に対して、Green 関数が存在する。

証明 上の二つの定理の系である。 ■

参考文献

- [1] 藤田宏：現代解析入門, 前篇「現代解析入門」, 岩波書店 (1991), 後篇は吉田耕作著.
- [2] 桂田祐史：常微分方程式ノート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/members/ODE.pdf> (1991~).
- [3] 桂田祐史： $y'' + py' + qy = f(x)$ の初期値問題の Green 関数, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/green.pdf> (2008~).