

$y'' + py' + qy = f(x)$ の初期値問題の Green 関数

桂田 祐史

2008年5月13日, 2009年10月4日

定数係数線形常微分方程式の特解の求め方、教科書に載っている未定係数法は「定番」なのであるが、一般性が低いし、計算は決して簡単ではないし(面倒だからコンピューターに任せようとしても、プログラムを書くのは大変)、正直気に入らないので、欲求不満解消のため、この文書を書く。

ここに書いたことは、常微分方程式の本には載っていないことが多い。筆者は、神保 [1], 石村 [2] を読んで気がついた。気がついてから探してみたら、高橋 [3] にも少し書いてあった。金子 [4] §3.3 には、超関数をからめた解説がある。

1 目標

定理 1.1 $p, q \in \mathbf{C}$, $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ は連続 (I は \mathbf{R} の区間), $x_0 \in I$ とするとき、

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + p \frac{du}{dx} + qu = f(x) \quad (x \in I), \quad u(x_0) = u'(x_0) = 0$$

の一意的な解は

$$u(x) := \int_{x_0}^x G(x-t)f(t) dt, \quad G(x) := \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる。ただし α, β は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根である。

この命題に対して、以下の 3 種類の証明を与える。

- 1 階微分方程式の解の公式を 2 回繰り返す素朴な方法 (結構面倒である...読んでも信じにくいのでは?)
- 畳込みの基本的な性質を利用する方法 (まあまあ見通しが良いが、重積分の順序交換をするのが難?)
- ラプラス変換を利用する方法 (結局ラプラス変換の勝ち? 1 年生には飛び道具かもしれないけれど...)

2 素朴に挑戦

2.1 準備: 1 階定数係数線形常微分方程式

次の定理は、「1 階線形常微分方程式」で問題として解いた。

定理 2.1 $\alpha \in \mathbb{C}$, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ 連続 (I は \mathbb{R} の区間), $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = f(x) \quad (x \in I), \quad y(x_0) = y_0$$

は一意的な解

$$y = y_0 e^{\alpha(x-x_0)} + \int_{x_0}^x e^{\alpha(x-t)} f(t) dt$$

を持つ。言い換えると、

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = f(x) \quad \text{かつ} \quad y(x_0) = y_0 \quad \iff \quad y = y_0 e^{\alpha(x-x_0)} + \int_{x_0}^x e^{\alpha(x-t)} f(t) dt.$$

これから次の二つの系を得る。最初のものは有名な定理であるが、二番目のものをこれからしばらく頭の中にとどめておこう。

系 2.2 $\alpha \in \mathbb{C}$, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ 連続 (I は \mathbb{R} の区間), $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0 \quad (x \in I), \quad y(x_0) = y_0$$

は一意的な解

$$y = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$$

を持つ。言い換えると、

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0 \quad \text{かつ} \quad y(x_0) = y_0 \quad \iff \quad y = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}.$$

系 2.3 $\alpha \in \mathbb{C}$, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ 連続 (I は \mathbb{R} の区間), $x_0 \in I$ とするとき、

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = f(x) \quad (x \in I), \quad y(x_0) = 0$$

は一意的な解

$$y = \int_{x_0}^x e^{\alpha(x-t)} f(t) dt$$

を持つ。言い換えると、

$$\frac{dy}{dx} - \alpha y = f(x) \quad \text{かつ} \quad y(x_0) = 0 \quad \iff \quad y = \int_{x_0}^x e^{\alpha(x-t)} f(t) dt.$$

2.2 微分作用素の因数分解あるいは連立1階微分方程式への帰着

$p, q \in \mathbb{C}, f: I \rightarrow \mathbb{C}$ とするとき、

$$(1) \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

を考える。特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根を α, β とする。すなわち $\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$.

$$v := \frac{dy}{dx} - \beta y$$

とおくとき、

$$y'' + py' + qy = f(x) \iff \frac{dv}{dx} - \alpha v = f(x).$$

実際、

$$\frac{dv}{dx} - \alpha v = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} - \beta y \right) - \alpha \left(\frac{dy}{dx} - \beta y \right) = \frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha + \beta) \frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = y'' + py' + qy$$

であるから¹。

つまり、(1) は、連立微分方程式

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} - \beta y = v,$$

$$(3) \quad \frac{dv}{dx} - \alpha v = f(x)$$

に帰着される。

ゆえに、 y が (1) の解であれば、 v は (3) の解であるから、1階微分方程式の解の公式 (系 2.3) によって

$$(4) \quad v(x) = v(x_0)e^{\alpha(x-x_0)} + \int_{x_0}^x e^{\alpha(x-t)} f(t) dt.$$

一方 y は (2) の解でもあるから、やはり系 2.3 によって

$$(5) \quad y(x) = y(x_0)e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^x e^{\beta(x-t)} v(t) dt.$$

(5) に (4) を代入し、 $v(x_0) = y'(x_0) - \beta y(x_0)$ を使って整理すると

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0)e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^x e^{\beta(x-t)} \left(v(x_0)e^{\alpha(t-x_0)} + \int_{x_0}^t e^{\alpha(t-s)} f(s) ds \right) dt \\ &= y(x_0)e^{\beta(x-x_0)} + (y'(x_0) - \beta y(x_0)) \int_{x_0}^x e^{\beta(x-t)} e^{\alpha(t-x_0)} dt + \int_{x_0}^x e^{\beta(x-t)} \left(\int_{x_0}^t e^{\alpha(t-s)} f(s) ds \right) dt. \end{aligned}$$

¹これは微分演算子 D に慣れれば

$$(D^2 + pD + q)y = [(D - \alpha)(D - \beta)]y = (D - \alpha)[(D - \beta)y]$$

という計算で理解できる。

これで (1) の解が得られた。以下、この結果を整理する。右辺の 3 項を順に $I(x)$, $J(x)$, $K(x)$ とおくと、簡単な計算で、

$$I(x_0) = y(x_0), \quad I'(x_0) = \beta y(x_0),$$

$$J(x_0) = 0, \quad J'(x_0) = y'(x_0) - \beta y(x_0)$$

が分かるので、 $w(x) := I(x) + J(x)$ とおくと、

$$w(x_0) = y(x_0), \quad w'(x_0) = \beta y(x_0) + y'(x_0) - \beta y(x_0) = y'(x_0).$$

w は、 $f \equiv 0$ とした同次微分方程式の解であるから、初期値問題

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + p \frac{dw}{dx} + qw = 0, \quad w(x_0) = y(x_0), \quad w'(x_0) = y'(x_0)$$

の解であることが分かる。ゆえに K は

$$\frac{d^2 K}{dx^2} + p \frac{dK}{dx} + qK = f(x), \quad K(x_0) = 0, \quad K'(x_0) = 0$$

の解である。

積分の順序を交換すると

$$K(x) = \int_{x_0}^x \left(\int_s^x e^{\beta(x-t)} e^{\alpha(t-s)} dt \right) f(s) ds.$$

内側の積分は

$$\int_s^x e^{\beta(x-t)} e^{\alpha(t-s)} dt = \begin{cases} \frac{e^{\alpha(x-s)} - e^{\beta(x-s)}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ (x-s)e^{\alpha(x-s)} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

となるので、

$$(6) \quad G(x) := \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

とおくと、

$$K(x) = \int_{x_0}^x G(x-s) f(s) ds.$$

実はこの G を用いると、

$$J(x) = (y'(x_0) - \beta y(x_0)) G(x - x_0)$$

と書き直せる。

2.3 解の公式

定理 2.4 $p, q \in \mathbf{C}$, $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ 連続 (I は \mathbf{R} の区間), $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{C}$, $y_1 \in \mathbf{C}$ とするとき、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

は一意的な解

$$y = y_0 e^{\beta(x-x_0)} + (y_1 - \beta y_0) G(x - x_0) + \int_{x_0}^x G(x - s) f(s) ds$$

を持つ。ここで

$$G(x) := \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta). \end{cases}$$

ただし α, β は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根とする。

定理 2.5 $p, q \in \mathbf{C}$, $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ 連続 (I は \mathbf{R} の区間), $x_0 \in I$ とするとき、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = f(x), \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

は一意的な解

$$y = \int_{x_0}^x G(x - s) f(s) ds, \quad G(x) := \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

を持つ。ただし α, β は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根とする。

3 畳み込みを利用した証明

(これは古いテキストに載せていたものである。)

一般の $f(x)$ に対して、非同次方程式

$$(7) \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

の特解を求めるには、(1) Laplace 変換を利用する方法, (2) 定数変化法など色々な方法があるが、ここでは初期値問題の Green 関数を用いる方法を紹介する。

定理 3.1 (Green 関数による特解) 2 次方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とするとき、

$$(8) \quad G(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha = \beta \text{ の場合}), \end{cases}$$

$$(9) \quad u(x) = \int_0^x G(x-y)f(y) dy$$

とおくと、

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

が成り立つ。すなわち u は (7) の特解である。

この定理に現れた関数 G のことを微分方程式 (7) の初期値問題の Green 関数とよぶ。

例 3.2 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ の特解を求めてみよう。特性根は 2, 3 であるから、Green 関数は

$$G(x) = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{3 - 2} = e^{3x} - e^{2x}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_0^x G(x-y)f(y) dy &= \int_0^x (e^{3(x-y)} - e^{2(x-y)})e^{2y} dy = e^{3x} \int_0^x e^{-y} dy - e^{2x} \int_0^x dy \\ &= e^{3x}(1 - e^{-x}) - e^{2x}x = e^{3x} - e^{2x} - xe^{2x} \end{aligned}$$

は一つの特解である²。同次方程式の一般解が $y = Ae^{3x} + Be^{2x}$ であることに注意すると、 $u = -xe^{2x}$ も特解であることが分かる。■

定義 3.3 区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数 f, g があるとき、関数 $f * g$ を

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y) dy \quad (x \in [0, \infty))$$

で定義し、 f と g の^{たたみこみ}畳み込みまたは合成積とよぶ。

例 3.4 関数 $e_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を

$$e_1(x) = 1, \quad e_{k+1} = e_1 * e_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

で定義するとき、

$$(10) \quad e_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

²この計算は難しくはないが、かなり面倒である。一方、コンピューターを用いる場合、未定係数法などと比較すると、プログラムが単純で使いやすい。

である。実際、(10) が $n = k$ のとき成り立つと仮定すると

$$e_{k+1}(x) = (e_1 * e_k)(x) = \int_0^x e_1(x-y)e_k(y) dy = \int_0^x 1 \cdot \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} dy = \left[\frac{y^k}{k!} \right]_0^x = \frac{x^k}{k!}$$

であり、帰納法により (10) は任意の自然数 n について成り立つことが分かる。■

畳み込みを用いると、上の (9) の u は $u = G * f$ と書けることが分かる。畳み込みは上の定理の証明にも活躍する。そのために少し準備しよう。

命題 3.5 (畳み込みの性質) (1) $(c_1 f_1 + c_2 f_2) * g = c_1 (f_1 * g) + c_2 (f_2 * g)$.

(2) $f * g = g * f$.

(3) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(4) $f * g \equiv 0$ ならば $f \equiv 0$ または $g \equiv 0$.

証明 (1) は簡単であるので省略する。(2), (3) は演習問題とする。(4) は以下の議論に必要がないので省略する³。■

定理の証明に入る前に、定数係数 1 階線型微分方程式の初期値問題

$$y' - ay = f(x), \quad y(0) = 0$$

の解は

$$y = \int_0^x e^{a(x-y)} f(y) dy$$

であることを思い出しておく。畳み込みを用いると

$$y = (e^{ax} * f)(x)$$

とも書ける。

定理の証明 $A(x) := e^{\alpha x}$, $B(x) := e^{\beta x}$ とおく。 u が

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

を満たすとするとき、 $v := u' - \beta u$ とおくと、

$$v' - \alpha v = (v'' - \beta v') - \alpha(v' - \beta v) = v'' - (\alpha + \beta)v' + \alpha\beta v = v'' + pv' + qv = f(x),$$

$$v(0) = u'(0) - \beta u(0) = 0 - \beta \cdot 0 = 0$$

であるから、上に書いた注意より

$$v(x) = (A * f)(x).$$

ところで

$$u' - \beta u = v(x), \quad u(0) = 0$$

³例えば Yosida, Functional analysis, 6th ed., Springer (1980) を見よ。

であるから、 $u = B * v$. ゆえに

$$u = B * v = B * (A * f) = (B * A) * f.$$

ゆえに $G := B * A$ とおくと、 $u = G * f$ となる。以下 G を具体的に計算して求めよう。

$\alpha \neq \beta$ の場合は

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x B(x-y)A(y) dy = \int_0^x e^{\beta(x-y)} e^{\alpha y} dy = e^{\beta x} \int_0^x e^{(\alpha-\beta)y} dy \\ &= e^{\beta x} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)y}}{\alpha-\beta} \right]_0^x = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

一方、 $\alpha = \beta$ の場合は、

$$G(x) = \int_0^x B(x-y)A(y) dy = \int_0^x e^{\alpha(x-y)} e^{\alpha y} dy = e^{\alpha x} \int_0^x dy = x e^{\alpha x}. \blacksquare$$

問題

1. 畳み込みについて、交換法則 $f * g = g * f$, 結合法則 $(f * g) * h = f * (g * h)$ が成り立つことを証明せよ。(注意: 後者の証明には重複積分の順序交換が必要である。)
2. G を $y'' + py' + qy = 0$ (p, q は定数) の Green 関数とすると、 $G'' + pG' + qG = 0$, $G(0) = 0, G'(0) = 1$ が成り立つことを示せ。
3. Cauchy の補題

$$\int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds$$

を証明せよ。

一般の初期条件

x_0 を f の定義域に含まれる任意の点とすると、

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(x_0) = u'(x_0) = 0$$

を考える。

$$U(x) := u(x + x_0), \quad F(x) := f(x + x_0)$$

とおくと

$$U'' + pU' + qU = F, \quad U(0) = U'(0) = 0$$

となる。既に得られている定理 3.1 から、

$$U(x) = \int_0^x G(x-y)F(y) dy.$$

これから u を求めよう。まず

$$u(x) = U(x - x_0) = \int_0^{x-x_0} G((x - x_0) - y) F(y) dy.$$

$\xi = y + x_0$ とおくと、 $d\xi = dy$, $y = 0$ のとき $\xi = x_0$, $y = x - x_0$ のとき $\xi = x$, $(x - x_0) - y = x - x_0 - (\xi - x_0) = x - \xi$, $y = \xi - x_0$ であるから、

$$u(x) = \int_{x_0}^x G(x - \xi) F(\xi - x_0) d\xi = \int_{x_0}^x G(x - \xi) f(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x G(x - y) f(y) dy.$$

任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ を固定したとき、

$$(f * g)(x) := \int_{x_0}^x f(x - y)g(y) dy$$

で「ずれた畳み込み」を定義するとき、

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

が成り立つのだろうか。

n 階方程式への拡張

n 階の微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

への拡張について説明しておく。

特性根を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ として、

$$G(x) = e^{\alpha_1 x} * e^{\alpha_2 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}, \quad u(x) = G * f(x)$$

とおくと、 u は

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} u' + a_n u = f(x), \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

をみたく。Green 関数 G の計算には Laplace 変換が役立つ。

$$\mathcal{L}[G](s) = \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}](s) = \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x}](s) \cdots \mathcal{L}[e^{\alpha_n x}](s) = \frac{1}{s - \alpha_1} \cdots \frac{1}{s - \alpha_n}.$$

この右辺を部分分数分解してから、Laplace 逆変換すれば G が求められる。

特に特性根が相異なるならば、この右辺は

$$\frac{1}{s - \alpha_1} \cdots \frac{1}{s - \alpha_n} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{s - \alpha_j}, \quad A_j = \prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)$$

と部分分数分解できるので、容易に

$$G(x) = \sum_{j=1}^n A_j e^{\alpha_j x}$$

であることがわかる。なお、 G は次の条件で特徴づけられる:

$$\begin{aligned} G^{(n)} + a_1 G^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} G' + a_n G &= 0, \\ G(0) = G'(0) = \cdots = G^{(n-2)}(0) &= 0, \quad G^{(n-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

問 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$ の場合は、 $G(x) = \frac{x^{n-1}e^{\alpha x}}{(n-1)!}$ であることを示せ。

4 ラプラス変換を利用する方法

ラプラス変換は、道具一式を用意するのに手間がかかるが、結局が一番見通しが良いかもしれない。ラプラス変換を袖にする数学書も多いが、学習しておく価値はあるな、と思う次第である。

命題 4.1 p, q は実数、 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ を連続関数とすると、常微分方程式の初期値問題

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = f(t) \quad (t \in (0, \infty)), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

の解は、

$$x(t) = \int_0^t G(t-s)f(s) ds$$

で与えられる。ここで G は次式で定義される関数である (初期値問題の Green 関数と呼ばれる):

$$G(t) := L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + ps + q} \right] (t) = e^{\alpha t} * e^{\beta t} = \begin{cases} \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ te^{\alpha t} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

ただし α と β は、2次方程式 $s^2 + ps + q = 0$ の2根とする。

証明 与えられた微分方程式をラプラス変換して、ラプラス変換の線形性を用いると

$$L[x''(t)](s) + pL[x'(t)](s) + qL[x(t)](s) = L[f](s).$$

左辺第1項と第2項に、導関数のラプラス変換の公式

$$L[g^{(k)}(t)](s) = s^k L[g(t)](s) - s^{k-1}g(0) - s^{k-2}g'(0) - \dots - sg^{(k-2)}(0) - g^{(k-1)}(0)$$

を用いて、初期条件 $x(0) = x'(0) = 0$ を代入すると

$$s^2 L[x(t)](s) + psL[x(t)](s) + qL[x(t)](s) = L[f](s).$$

すなわち

$$(s^2 + ps + q)L[x(t)](s) = L[f](s)$$

これを $L[x(t)](s)$ について解くと (単に割り算するだけ)

$$L[x(t)](s) = \frac{1}{s^2 + ps + q} L[f](s).$$

右辺が積の形になっていることに注目して、

$$G(t) := L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + ps + q} \right] (t)$$

とおくと、

$$L[x(t)](s) = L[G](s)L[f](s) = L[G * f](s)$$

となるので、逆ラプラス変換して次式を得る。

$$x(t) = G * f(t).$$

以下、 G を具体的に計算する。 $s^2 + ps + q = (s - \alpha)(s - \beta)$ であるから、

$$G(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{(s - \alpha)(s - \beta)} \right] (t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s - \alpha} \right] (t) * L^{-1} \left[\frac{1}{s - \beta} \right] (t) = e^{\alpha t} * e^{\beta t}.$$

これを求めるのに、もちろん畳込みの定義に従って積分計算しても良いが、次のようにラプラス変換を利用することも出来る。

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき、

$$\frac{1}{(s - \alpha)(s - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{1}{s - \beta} \right)$$

であるから

$$G(t) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(L^{-1} \left[\frac{1}{s - \alpha} \right] (t) - L^{-1} \left[\frac{1}{s - \beta} \right] (t) \right) = \frac{1}{\alpha - \beta} (e^{\alpha t} - e^{\beta t}).$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき、(本当はちょっと準備が必要だが)

$$G(t) = \lim_{\beta' \rightarrow \alpha} \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta' t}}{\alpha - \beta'} = \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha t} = t e^{\alpha t}. \blacksquare$$

参考文献

- [1] 神保秀一：微分方程式概論，サイエンス社 (1999).
- [2] 石村直之：パワーアップ微分方程式，共立出版 (2001).
- [3] 高橋陽一郎：微分方程式入門，東京大学出版会 (1988).
- [4] 金子晃^{あきら}：偏微分方程式入門，東京大学出版会 (1998).