Banach 空間における微積分の基本定理

桂田 祐史

2004 年 4 月 28 日

1 (普通の微積分版) 微分積分学の基本定理

定理 1.1 (微積分の基本定理 I (不定積分は原始関数)) 任意の連続関数の不定積分は原始関数である。すなわち、$x \in C([a,b];\mathbf{R})$ とするとき、

$$y(t) := \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b])$$

とおくと、

$$y'(t) = x(t) \quad (t \in [a,b]).$$

定理 1.2 (微積分の基本定理 II (定積分の原始関数による計算)) $x \in C([a,b];\mathbf{R})$ の原始関数 y (つまり $y' = x$ をみたす y) があるとき、

$$\int_a^b x(t)\,dt = [y(t)]_a^b .$$

あるいは、任意の $y \in C^1([a,b];\mathbf{R})$ に対して

$$\int_a^b y'(t)\,dt = [y(t)]_a^b .$$

定理 1.3 (微積分の基本定理 III (部分積分)) $x,\ y \in C^1([a,b];\mathbf{R})$ に対して

$$\int_a^b x'(t)y(t)\,dt = [x(t)y(t)]_a^b - \int_a^b x(t)y'(t)\,dt.$$

I を示すには、$h \to 0$ のとき

$$\left|\frac{y(t+h)-y(t)}{h} - x(t)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(x(s)-x(t))ds\right| \le \max_{\substack{s\in[a,b]\\ |s-t|\le|h|}} |x(s)-x(t)| \to 0.\blacksquare$$

II を示すには、

$$Y(t) := \int_a^t x(s)\,ds$$

とおくと、I より $Y'(t) = x(t)$ $(t \in [a,b])$ であるから、$Y' = y'$ であるので、$\exists \xi \in \mathbf{R}$ s.t. $Y(t) = y(t) + \xi$ $(t \in [a,b])$. これから

$$\int_a^b x(t)\,dt = Y(b) = Y(b) - Y(a) = y(b) - y(a).\blacksquare$$

III を示すには、積の微分法の公式

$$(x(t)y(t))' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

を積分して、

$$\int_a^b (x(t)y(t))'\,dt = \int_a^b x'(t)y(t)\,dt + \int_a^b x(t)y'(t)\,dt.$$

この左辺は II より $[x(t)y(t)]_a^b$ に等しい。 ■

2 (Lebesgue 積分版) 微分積分学の基本定理

この節の内容は Lebesgue 積分の常識で、多くのテキストに載っているが、関連する結果が非常に豊富という点で特に吉田 [3] を強く推奨しておく。

この節の内容を一言でまとめると、『絶対連続であれば、ほとんど到るところ微分できて、「自然な」公式が成り立つ』となる。こういう言葉はないが、「ルベーグの意味で微分可能」とでも言うにふさわしい性質である。

定理 2.1 (Lebesgue の微分定理 — 微積分の基本定理 I′) 可積分関数の不定積分は絶対連続かつほとんど到るところ微分可能で、その導関数はほとんど到るところもとの関数に等しい。すなわち、$x \in L^1(a,b;\mathbf{R})$ のとき

$$y(t) := \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b])$$

とおくと、$y \in \mathrm{AC}([a,b];\mathbf{R})$ であり、ほとんどすべての $t \in [a,b]$ に対して $y'(t)$ が存在して、

$$y'(t) = x(t) \quad \text{a.e. on } [a,b].$$

この定理は名前の通り、Lebesgue による。証明は Lebesgue 積分を扱っている大抵の本に載っている。

ある意味で逆が成立する。

定理 2.2 (Radon-Nikodym の定理) 絶対連続ならば可積分関数の不定積分 + 定数の形に書ける。すなわち、$y \in \mathrm{AC}([a,b];\mathbf{R})$ ならば、$x \in L^1(a,b;\mathbf{R})$ が存在して、

$$y(t) = y(a) + \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b]).$$

このとき、ほとんどすべての $t \in [a,b]$ に対して、$y'(t)$ が存在し、

$$y'(t) = x(t) \quad (t \in [a,b]).$$

この定理の証明も Lebesgue 積分を扱っている大抵の本に載っている。なお、絶対連続性の仮定は本質的である。そのことは (もちろん Lebesgue の微分定理からも納得できようが) 次の例からも納得できるであろう。P_C を $[0,1]$ 上の Cantor 関数とすると、P_C は連続かつほとんど到るところ $P_C'(t) = 0$, $P_C(0) = 0$, $P_C(1) = 1$. それゆえ

$$P_C(1) - P_C(0) = 1 \neq 0 = \int_0^1 P_C'(t)\,dt.$$

定理 2.3 (微積分の基本定理 II′) $y \in \mathrm{AC}([a,b];\mathbf{R})$ に対して

$$\int_a^t y'(t)\,dt = [y(t)]_a^b.$$

ただし $y'(t)$ は、Radon-Nikodym の定理によりほとんど到るところで存在を保証されるところの微分係数である。

II′ の証明　Radon-Nikodym の定理より、$\exists z \in L^1(a,b;\mathbf{R})$ s.t.

$$y(t) = y(a) + \int_a^t z(s)\,ds \quad (t \in [a,b).$$

これから、ほとんどすべての $t \in [a,b]$ に対して、$y'(t) = z(t)$. これから

$$\int_a^b y'(t)\,dt = \int_a^b z(s)\,ds = y(b) - y(a).\blacksquare$$

定理 2.4 (微積分の基本定理 III′ (部分積分)) $x,\, y \in \mathrm{AC}([a,b];\mathbf{R})$ とするとき、

$$\int_a^b x'(t)y(t)\,dt = [x(t)y(t)]_a^b - \int_a^b x(t)y'(t)\,dt.$$

ただし $x'(t)$, $y'(t)$ は、Radon-Nikodym の定理によりほとんど到るところで存在を保証されるところの微分係数である。

証明　Radon-Nikodym の定理から、ほとんど到るところ $x'(t)$, $y'(t)$ が存在する。そういう t に対して、

$$(x(t)y(t))' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

が成り立つ (証明は普通の微積分の積の微分法)。右辺の各項は可積分関数と連続関数の積であるから可積分であり、それゆえ左辺も可積分である。積分すると

$$\int_a^b (x(t)y(t))'\,dt = \int_a^b x'(t)y(t)\,dt + \int_a^b x(t)y'(t)\,dt.$$

II′ より左辺は $[x(t)y(t)]_a^b$ に等しい[1]。■

3　(Bochner 積分版) 微分積分学の基本定理

この節の内容は日本語では宮寺 [2], 田辺 [1] が詳しい。

Banach 空間値関数に定理 I′ が拡張される。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 3.1 (定理 I″) X が Banach 空間、$x \in L^1([a,b];X)$ のとき

$$y(t) := \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b])$$

とおくと、$y \in \mathrm{AC}([a,b];X)$ であり、ほとんどすべての $t \in [a,b]$ に対して $y'(t)$ が存在し、

$$y'(t) = x(t) \quad \text{a.e. on } [a,b].$$

[1] 念のため補足しておくと、絶対連続関数の積は絶対連続関数である。

証明 これは定理 A.1 である。証明は宮寺 [2], 田辺 [1], 吉田 [5] を見よ。 ■

定理 3.2 (定理 II$''$) X が Banach 空間、$x \in L^1(a,b;X)$, $y \in \mathrm{AC}([a,b];X)$, さらに

(1) ほとんどすべての $t \in [a,b]$ において、y は弱微分可能で $y'(t) = x(t)$

が成り立つならば、次式が成立する。

$$\int_a^b x(t)\,dt = [y(t)]_a^b.$$

(なお、X が回帰的 Banach 空間ならば、(1) は y の絶対連続性から導かれる。)

証明 これは定理 A.2 の簡単な系である。証明は宮寺 [2], 田辺 [1] を見よ。 ■

この定理の結果の式は

$$\int_a^b y'(t)\,dt = [y(t)]_a^b$$

であるが、Banach 空間値の関数に対しては $y \in \mathrm{AC}$ というだけでは y' の存在は保証されない (つまり一般の Banach 空間値の関数については、Radon-Nikodym の定理は成立しない) ことに注意する。

さて、部分積分であるが、一般の Banach 空間では積が定義されないので、とりあえずは次の命題を目標としよう (多分 Banach 環ならば大丈夫だと思う)。

定理 3.3 (定理 III$''$) X は Banach 空間、$x \in \mathrm{AC}([a,b];\mathbf{R})$, $y \in \mathrm{AC}([a,b];X)$, y はほとんど到るところ弱微分可能ならば、

$$\int_a^b x'(t)y(t)\,dt = [x(t)y(t)]_a^b - \int_a^b x(t)y'(t)\,dt.$$

証明 Radon-Nikodym の定理より、x はほとんど到るところ微分可能で、x' は可積分である。また定理 A.2 より、y はほとんど到るところ強微分可能で、y' は可積分となる。ゆえにほとんど到るところで

$$(x(t)y(t))' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

が成り立ち、両辺は可積分である (右辺の各項は連続関数と可積分関数の積として可積分である)。

$$\int_a^b (x(t)y(t))'\,dt = \int_a^b x'(t)y(t)\,dt + \int_a^b x(t)y'(t)\,dt.$$

左辺について、xy は絶対連続で、ほとんど到るところ $(xy)'$ が存在して、L^1 に属するので、定理 II$''$ が使えて $[x(t)y(t)]_a^b$ に等しい。 ■

4 超関数微分との関係

微分と来れば、超関数微分 (あるいは Sobolev の意味での微分) との関係に言及するべきである。

4.1 実数値関数の場合

次の非常に簡明な結果が成立する。

定理 4.1 ($\mathrm{AC} = W^{1,1}$) コンパクトな区間 $[a,b]$ で定義された $y\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ に対して、次の二条件は互いに同値である。

(i) $y \in \mathrm{AC}([a,b];\mathbf{R})$.

(ii) $y \in W^{1,1}((a,b);\mathbf{R})$. すなわち、$y \in L^1(a,b;\mathbf{R})$ かつ $\exists x \in L^1(a,b;\mathbf{R})$ s.t.

$$\int_a^b y(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b x(t)\varphi(t)\,dt \quad (\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})).$$

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明。$y \in \mathrm{AC}([a,b];\mathbf{R})$ とする。まず明らかに $y \in L^1(a,b;\mathbf{R})$. Radon-Nikodym の定理より、$[a,b]$ 上ほとんど到るところ微分可能で、$y' \in L^1(a,b;\mathbf{R})$. 任意の $\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})$ は絶対連続であるから、定理 2.4 によって

$$\int_a^b y(t)\varphi'(t)\,dt = [y(t)\varphi(t)]_a^b - \int_a^b y'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_a^b y'(t)\varphi(t)\,dt.$$

これは $y \in W^{1,1}(a,b;\mathbf{R})$ で、y の Sobolev の意味での導関数が、y' に他ならないことを示している。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) については、次の命題 4.2 から分かる。■

命題 4.2 (Brezis [4] の定理 VIII.2) I を $\mathbf{R}$ の開区間 (有界でも非有界でもよい), $1 \le p \le \infty$, $u \in W^{1,p}(I;\mathbf{R})$ ならば、$\exists \widetilde{u} \in C(\overline{I};\mathbf{R})$ s.t.

$$u = \widetilde{u} \quad \text{a.e. on } \overline{I},$$

$$[\widetilde{u}(t)]_y^x = \int_y^x u'(t)\,dt \quad (x,\, y \in \overline{I}).$$

ここで u' は u の Sobolev の意味での広義導関数 (超関数微分) である。

これ以外に Brezis [4] の p.171 命題 VIII.3 とその直後の注意を見よ。

4.2 Banach 空間に値を持つ関数の場合

次の命題とその証明は Temam [6] にある[2]。

[2] その証明は 1 次元に帰着させているわけではないので、4.1 の定理の証明ともなっている (ようである)。

定理 4.3 X を Banach 空間、$-\infty < a < b < \infty$, y, $x \in L^1(a,b;X)$ とするとき、次の 3 条件は互いに同値である。

(i) $[y(s)]_a^t = \displaystyle\int_a^t x(s)\,ds \qquad (t \in [a,b])$.

(ii) y の超関数微分は x である。すなわち

$$\int_a^b y(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b x(t)\varphi(t)\,dt \quad (\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})).$$

(iii) $\forall \eta \in X'$ に対して、

$$\frac{d}{dt}\langle y(t),\eta\rangle = \langle x(t),\eta\rangle \quad ((a,b) \text{ 上のスカラー超関数の意味で}).$$

すなわち

$$\int_a^b \langle y(t),\eta\rangle\,\varphi'(t)dt = -\int_a^b \langle y(t),\eta\rangle\,\varphi(t)\,dt \quad (\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})).$$

A　宮寺 [2] から

定理 A.1 X は Banach 空間、$x\colon [a,b] \to X$ は Bochner 可積分とするとき、

$$y(t) := \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b])$$

は $[a,b]$ 上で強絶対連続であり、ほとんど到るところ強微分可能で

$$y'(t) = x(t) \quad \text{a.e. on } [a,b].$$

ところで (実数値関数と異なり) Banach 空間値関数 $x\colon [a,b] \to X$ は絶対連続であるというだけでは、ほとんど到るところ微分できるとは限らない。しかし次の定理が成り立つ。

定理 A.2 X は Banach 空間、$y\colon [a,b] \to X$ は絶対連続、ほとんど到るところで弱微分可能ならば、弱導関数 $x(s) := y'(s)$ は $[a,b]$ 上 Bochner 可積分で、

$$y(t) = y(a) + \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b]).$$

ゆえに y はほとんど到るところ強微分可能で、

$$y'(t) = x(t) \quad \text{a.e. on } [a,b].$$

定理 A.3 X は Banach 空間、$y\colon [a,b] \to X$ は強有界変分、y はほとんど到るところで弱微分可能ならば、弱導関数 $x(s) :=$ w-$y'(s)$ は $[a,b]$ 上で Bochner 可積分である。

このとき

$$z(t) := y(a) + \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b])$$

は定理 A.1 より絶対連続かつほとんど到るところ強微分可能な関数で、$z'(t) = x(t)$ (a.e. on $[a,b]$) を満たすが、$z(t) \equiv y(t)$ とは限らない。しかし、上の仮定に加えて

$\forall f \in X'$ に対して $[a,b] \ni t \mapsto \langle f, y(t)\rangle \in \mathbf{R}$ は絶対連続である (y の弱連続性)

を仮定すると $z(t) \equiv y(t)$. すなわち

$$y(t) = y(a) + \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b]).$$

なお X が回帰的ならば、関数が有界変分であることから、ほとんど到るところ弱微分可能であり、弱導関数が Bochner 可積分であることが分かる (田辺 [1])。

定理 A.4 X は回帰的 Banach 空間、$y\colon [a,b] \to X$ は絶対連続ならば、y は $[a,b]$ 上ほとんど到るところ強微分可能で、強導関数 $x(s) := y'(s)$ は $[a,b]$ 上で Bochner 可積分であり、

$$y(t) = y(a) + \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b]).$$

系 A.5 X は回帰的 Banach 空間、$y\colon [a,b] \to X$ とするとき、次の二条件は互いに同値である。

(i) y は絶対連続である。

(ii) $\exists x\colon [a,b] \to X$ Bochner 可積分 s.t.

$$y(t) = y(a) + \int_a^t x(s)\,ds \quad (t \in [a,b]).$$

そして、このとき y はほとんど到るところ強微分可能で

$$y'(t) = x(t) \quad \text{a.e. on [a,b]}.$$

B 命題 4.2 の証明

命題 4.2 は基本的な内容だが、案外と載っていない本が多いので、Brezis [4] に従って証明しておく。

補題 B.1 (超関数微分が 0 である局所可積分関数は 0 である) (a,b) を $\mathbf{R}$ の開区間とする。$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b;\mathbf{R})$ が $\forall \varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})$ に対して

$$\int_I f(t)\varphi'(t)\,dt = 0$$

をみたすならば、$\exists C \in \mathbf{R}$ s.t.

$$f = C \quad \text{a.e. on } (a,b).$$

証明　(導関数が 0 に等しい超関数は定数関数に等しいという命題の証明と同じである。)

$$\int_a^b \psi(t)\,dt = 1$$

を満たす $\psi \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})$ を一つ取って固定する (実は $C = \int_a^b f(t)\psi(t)\,dt$ となる)。任意の $w \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})$ に対して、

$$h(t) := w(t) - \left(\int_a^b w(s)ds\right)\psi(t) \quad (t \in (a,b)) \tag{2}$$

とおくと、$h \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})$ かつ

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b w(t)\,dt - \int_a^b w(s)\,ds \int_a^b \psi(t)\,dt = \int_a^b w(t)\,dt - \int_a^b w(s)\,ds = 0.$$

ゆえに

$$\varphi(t) := \int_a^t h(s)\,ds \quad (t \in (a,b))$$

とおくと $\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})$, $\varphi' = h$. 仮定から

$$0 = \int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt$$

である。これに $\varphi' = h$ と h の定義式 (2) を代入すると

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b f(t)w(t)\,dt - \int_a^b f(t)\left(\int_a^b w(s)\,ds\right)\psi(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)w(t)\,dt - \int_a^b f(t)\psi(t)\,dt \int_a^b w(s)\,ds \\
&= \int_a^b f(t)w(t)\,dt - C\int_a^b w(s)\,ds = \int_a^b (f(t) - C)\,w(t)\,dt,
\end{aligned}$$

ただし

$$C := \int_a^b f(s)\psi(s)\,ds.$$

変分法の基本補題から

$$f(t) = C \quad (\text{a.a. } t \in (a,b)).\blacksquare$$

補題 B.2 (局所可積分関数の不定積分の超関数微分はもとの関数である) (a,b) を $\mathbf{R}$ の開区間、$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b;\mathbf{R})$, $y_0 \in (a,b)$ とするとき、

$$f(t) := \int_{y_0}^t g(s)\,ds \quad (t \in (a,b))$$

で $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ を定めると、$f \in C((a,b);\mathbf{R})$ かつ

$$\int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b g(t)\varphi(t)\,dt \quad (\varphi \in C_0^\infty((a,b);\mathbf{R})).$$

証明　証明の要点は Fubini の定理による積分の順序交換である (ただし積分範囲は (t,s) 平面の二つの三角形の和であり、まず積分を二つに分けてから、それぞれについて Fubini の定理を適用することになる)。

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt &= \int_a^{y_0} f(t)\varphi'(t)\,dt+\int_{y_0}^b f(t)\varphi'(t)\,dt\\
&= \int_a^{y_0}\varphi'(t)dt\int_t^{y_0} g(s)\,ds+\int_{y_0}^b\varphi'(t)dt\int_{y_0}^t g(s)\,ds\\
&= -\int_a^{y_0} g(s)\,ds\int_a^s\varphi'(t)\,dt+\int_{y_0}^b g(s)\,ds\int_t^b\varphi'(t)\,dt=-\int_a^b g(s)\varphi(s)\,ds.\blacksquare
\end{aligned}$$

命題 4.2 の証明　$I=(a,b)$ とする。$u\in W^{1,p}(I;\mathbf{R})$ より $u'\in L^p(I;\mathbf{R})$ であるから、任意に $t_0\in I$ を取って固定して、

$$\overline{u}(t):=\int_{t_0}^t u'(s)\,ds\quad (t\in\overline{I})$$

とおくと $\overline{u}$ は $C(\overline{I};\mathbf{R})$ に属する ($I=(a,b)$ 自身が非有界の場合でも、t_0, t は有限なので、$\overline{u}$ を定義する積分の積分区間は有界であり、u' はそこで可積分となることに注意)。また、補題 B.2 より

$$\int_a^b\overline{u}(t)\varphi'(t)\,dt=-\int_a^b u'(t)\varphi(t)\,dt\quad (\varphi\in C_0^\infty(I;\mathbf{R})).$$

一方 $u\in W^{1,p}(I;\mathbf{R})$ であるから

$$\int_a^b u(t)\varphi'(t)\,dt=-\int_a^b u'(t)\varphi(t)\,dt.$$

これから

$$\int_a^b\left(u(t)-\overline{u}(t)\right)\varphi'(t)\,dt=0.$$

補題 B.1 より $\exists C\in\mathbf{R}$ s.t.

$$u-\overline{u}=C\quad\text{a.e. on }I.$$

そこで

$$\widetilde{u}(t):=\overline{u}(t)+C\quad (t\in\overline{I})$$

とおくと、$\widetilde{u}\in\left(\overline{I};\mathbf{R}\right)$ そして

$$\widetilde{u}=u\quad\text{a.e. on }I,$$

そして

$$\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(t)=\int_y^x u'(t)\,dt\quad (x,\,y\in\overline{I}).\blacksquare$$

C　その他

C.1

Henri Léon Lebesgue (1875–1941)
Otto Martin Nikodym (1887–1974)
Johann Radon (1887–1956)

参考文献

[1] 田辺 広域, 関数解析 上, 実教出版 (1978).

[2] 宮寺 功, 関数解析, 理工学社 (1972).
第 2 版が 2003 年に出版されている。

[3] 藤田 宏, 吉田 耕作, 現代解析入門, 岩波書店 (1991).
吉田先生執筆の後篇が測度・積分の解説である。

[4] ハイム・ブレジス著, 藤田 宏 監訳, 小西 芳雄(よしお) 訳, 関数解析, 産業図書 (1988).

[5] Kôsaku Yosida, Functional analysis, sixth edition, Springer (1980).

[6] Roger Temam, Navier-Stokes equations: Theory and Numerical analysis, AMS (2001).