関数解析入門 III
雑題

桂田 祐史

2004 年 8 月 12 日, 2017 年 4 月 30 日

目次

この文書の PDF ファイルは

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/functional-analysis-3.pdf`

に置く。

第1章　Fredholm の択一定理の有限次元バージョン

溝畑 [5]「フレドホルムの定理」の中に載っている標語

Uniqueness implies Solvability

1.1　はじめに

1.1.1　なぜこの文章を書いたか

Fredholm の択一定理は関数解析入門の華と言える重要な定理だが、多くの解説書で「有限次元空間では明らかに成り立つ」と説明してあるのは、実は初学者にとってかなり意地悪であると思われる。最近の線形代数の本には書いていないことが多いから。

1.1.2　Fredholm の業績

スウェーデンのフレドホルム (Erik Ivar Fredholm, 1866–1927, スウェーデンに生まれ、スウェーデンに没する) は、積分方程式論に関する画期的な結果を 1900 年に “Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet” という論文で発表した。

$K \in C([a,b]\times[a,b])$, $f, g \in C([a,b])$ とするとき、二つの積分方程式

$$u(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)\,dy = f(x) \quad (x\in[a,b]), \tag{1.1}$$

$$v(x) + \int_a^b K(y,x)v(y)\,dy = g(x) \quad (x\in[a,b]) \tag{1.2}$$

について以下の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) 任意の $f \in C([a,b])$ に対して (1.1) の解 u が存在する (いわゆる可解性) ためには、(1.1) の右辺を 0 とおいた同次方程式が自明な解 $u \equiv 0$ 以外に解を持たないことが必要十分である。(1.2) についても同様のことが成り立つ。さらに (1.1) が可解であることと、(1.2) が可解であることは同値である。

(2) (1.1) が可解であるとき、(1.1), (1.2) の右辺を 0 とおいた同次方程式の解空間の次元は有限であり、それらは一致する。

これが Hilbert 等に与えた影響について解説しよう (要工事 — 『応用解析 II 講義ノート』にも少し書いておいたけれど)。

1.1.3 Riesz-Schauder 理論, Fredholm operator の理論

F.Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. **41**, pp.71–98 (1918).

J.Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, Stud. Math. **2**, pp.1–6 (1930).

1.2 準備 — 抽象形

K を $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ を表すものとする。$A\in M(m,n;K)$ とする。もちろん $A^*\in M(n,m;K)$ であり、$A^{**}:=(A^*)^*=A$ である。

$$f(x)=Ax \quad (x\in K^n),\quad f^*(y)=A^*y \quad (y\in K^m)$$

によって、$f\colon K^n\to K^m$, $f^*\colon K^m\to K^n$ という写像が定まる。で定める。

命題 1.2.1 $K=\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ とする。$A\in M(m,n;K)$, $x\in K^n$, $y\in K^m$ とするとき、

$$(Ax,y)_{K^m}=(x,A^*y)_{K^n}.$$

証明

$$(Ax,y)_{K^m}=y^*(Ax)=(y^*A)x=(A^*y)^*x=(x,A^*y)=(x,A^*y)_{K^n}.\blacksquare$$

逆にこの性質で A^* を特徴づけることもできる。すなわち $A\in M(m,n;K)$, $B\in M(n,m;K)$ に対して、

$$\forall x\in K^n\quad \forall y\in K^m\quad (Ax,y)_{K^m}=(x,By)_{K^n}\quad\Longrightarrow\quad B=A^*.$$

命題 1.2.2 $K=\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$, $A\in M(m,n;K)$ とするとき $N(A)=R(A^*)^\perp$, すなわち

$$K^n=N(A)\oplus R(A^*)\quad (\text{直交直和}).$$

証明

$x\in K^n$ とするとき、

$$\begin{aligned}x\in N(A)\ &\Leftrightarrow\ Ax=0\ \Leftrightarrow\ \forall y\in K^m\quad (Ax,y)_{K^m}=0\ \Leftrightarrow\ \forall y\in K^m\quad (x,A^*y)_{K^n}=0\\ &\Leftrightarrow\ \forall z\in R(A^*)\quad (x,z)_{K^n}=0\ \Leftrightarrow\ x\in R(A^*)^\perp.\blacksquare\end{aligned}$$

系 1.2.3 $K=\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$, $A\in M(m,n;K)$ とするとき $N(A^*)=R(A)^\perp$, すなわち

$$K^m=N(A^*)\oplus R(A)\quad (\text{直交直和}).$$

証明

$A^{**}=A$ に注意すればよい。 $\blacksquare$

注意 1.2.4 有限次元内積空間では、任意の部分ベクトル空間 Y に対して、$Y^{\perp\perp}=Y$ であるから、$N(A)^\perp=R(A^*)$, $N(A^*)^\perp=R(A)$ でもある。$\blacksquare$

線形代数の常識[1]

$$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, A^T = \mathrm{rank}\, A^*$$

は $\dim R(A) = \dim R(A^*)$ を意味しているので、次の命題を得る。

命題 1.2.5 $K = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$, $A \in M(n; K)$ とするとき

$$\dim N(A) = \dim N(A^*).$$

特に

$$N(A) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad R(A) = K^m.$$

すなわち、$K^n \ni x \longmapsto Ax \in K^n$ について、単射 $\Leftrightarrow$ 全射。

注意 1.2.6 この命題の最後の「全射 $\Leftrightarrow$ 単射」の部分は、

準同型定理, 次元定理

$A \in M(m, n; K)$ に対して、写像 $f\colon K^n \to K^m$ を $f(x) = Ax$ で定義するとき、

$$K^n / \ker f \simeq \mathrm{Im}\, f \quad (\text{商線型空間 } K^n/\ker f \text{ は線型空間として } \mathrm{Im}\, f \text{ に同型}).$$

特に

$$n - \dim\ker f = \mathrm{rank}\, f.$$

を用いても証明することが出来る (むしろこちらの方がふつうかもしれない)。

1.3 有限次元版 Fredholm の定理

定理 1.3.1 (有限次元版 Fredholm の定理) K は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ のいずれかを表し、m, $n \in \mathbf{N}$, $A \in M(m, n; K)$ とする。

(1) 任意の $b \in K^m$ に対して、

$$Ax = b \text{ が解を持つ} \Leftrightarrow \forall y \in K^m \text{ に対して、} A^*y = 0 \Longrightarrow (b, y)_{K^m} = 0.$$

特に $m = n$ の場合、非同次方程式 $Ax = b$ の解 x の自由度 (明らかに $Ax = 0$ の解空間の次元に等しい) は、$A^*y = 0$ の解空間の次元に等しい。

(2) $A^*y = 0$ が自明解しか持たない $\Leftrightarrow$ $\forall b \in K^m$ に対して $Ax = b$ が可解 (非同次方程式がつねに可解)。

特に $m = n$ の場合は、

$$A^*y = 0 \text{ が自明解しか持たない} \Leftrightarrow \forall b \in K^m \text{ に対して } Ax = b \text{ が一意可解。}$$

証明

(1) $Ax = b$ が解を持つ $\quad\Leftrightarrow\quad b \in R(A) \quad\Leftrightarrow\quad b \in N(A^*)^\perp \quad\Leftrightarrow\quad \forall y \in K^m$ に対して、「$A^*y = 0 \quad\Longrightarrow\quad (b, y)_{K^m} = 0$」. 自由度については $\dim N(A) = \dim N(A^*)$ による。(2) は (1) の系である。■

[1] ここでは鍵となることだから、コンパクトな証明をつけよう。

まだまだだ…

第2章　開写像の原理

ここはもう少しきちんと書くべきだと思うが…

2.1　Baire のカテゴリー定理

定理 2.1.1 (カテゴリー定理) X が完備距離空間ならば、

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

を満たす X 内の任意の閉集合列 $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して、$\exists n \in \mathbf{N}$ s.t. F_n は内点を含む。

注意 2.1.2 (カテゴリー定理という名前の由来) (省略)

2.2　一様有界性の原理

定理 2.2.1 (一様有界性の原理 (uniform boundedness principle), 共鳴定理) X は Banach 空間、Y はノルム空間で、$\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ とする。

$$\forall u \in X \quad \sup_{A\in\mathcal{A}} \|Au\| < \infty$$

が成り立つならば

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \|A\| < \infty.$$

(Stefan Banach and Hugo Dyonizy Steinhaus, 1927)

例 2.2.2 Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合で、$\varphi\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は可測関数とする。もしも任意の $u \in L^2(\Omega)$ に対して、$u\overline{\varphi} \in L^1(\Omega)$ であれば、$\varphi \in L^2(\Omega)$.

例 2.2.3 弱正則 $\Longrightarrow$ 正則

定理 2.2.4 X は Banach 空間、Y はノルム空間とする。$A_n \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ であり、$\forall u \in X$ に対して $\{A_n u\}_{n\in\mathbf{N}}$ が Y の収束列とする。このとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $L(X,Y)$ で有界である。

(2) $\exists A \in L(X,Y)$ s.t. $\operatorname{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

もう少し一般化した形の定理を載せてある本も多い。次の命題は宮寺 [8] から採った。

定理 2.2.5 (Banach-Steinhaus の定理) X は Banach 空間、Y はノルム空間とする。$A_n \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ であり、

$$\forall x \in X \quad \sup_{n \in \mathbf{N}} \|A_n x\| < \infty$$

を満たす。$X_0 \subset X$ は、X_0 で生成される X の部分線型空間が X の稠密な部分集合で、$\forall x \in X_0$ に対して $\{A_n x\}_{n \in \mathbf{N}}$ が Y の収束列とする。このとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\forall x \in X$ に対して $\lim_{n \to \infty} A_n x$ が存在する。

(2) $\exists A \in L(X,Y)$ s.t. $\text{s-}\lim_{n \to \infty} A_n = A$. そして $\|A\| \le \liminf_{n \to \infty} \|A_n\|$.

(そういえば、小松先生は Banach-Steinhaus 好きだったな…)

命題 2.2.6 (Hilbert 空間の弱完備性)

2.3 開写像原理

定理 2.3.1 (開写像原理, 開写像定理 (open mapping theorem)) X, Y はBanach 空間で、$A \in L(X,Y)$, $R(A) = Y$ とする。このとき、X の任意の開集合の A による像は Y の開集合である。

系 2.3.2 (値域定理) X, Y は Banach 空間で、$A \in L(X,Y)$, $R(A) = Y$ かつ A は単射とすると $A^{-1} \in L(Y,X)$.

証明

定理より明らか。■

2.4 閉グラフ定理

定理 2.4.1 (閉グラフ定理, closed graph theorem) X, Y は Banach 空間、$A \colon X \to Y$ は閉線型作用素とすると、$A \in L(X,Y)$.
(Banach 空間における、到るところ定義された閉線型作用素は連続である。)

第3章　閉値域の定理 (closed range theorem)

有名な定理なのだが、今回は、藤田・黒田・伊藤 [7], 田辺 [6] の双方に「欲しいだけの詳しさで」載っていなかったので、ちょっと復習することになった。

3.1　位相的直和、位相的補空間についてぶつぶつ

3.1.1　代数的直和、代数的補空間、代数的射影作用素

線形代数レベルの話である。

定義 3.1.1 (代数的直和、代数的補空間) 線型空間 X とその部分線型空間 Y, Z について、X が Y と Z の**代数的直和**であるとは、

$$Y + Z = X, \quad Y \cap Z = \{0\}$$

が成り立つことをいう。このとき Z は Y の、Y は Z の**代数的補空間**という。

注意 3.1.2 一つの空間 Y に対して、代数的補空間は一意には決まらない (これは明らか)。かならず存在するのかな？

補題 3.1.3 (代数的直和に伴う射影作用素) 線型空間 X が Y と Z の代数的直和であるとき、

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad \exists! z \in Z \quad x = y + z$$

であるが、x に y, z を対応させる作用素をそれぞれ $P\colon X \to X$, $Q\colon X \to X$ とするとき、以下の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) P, Q は線型作用素。

(2) $P + Q = I$, $PQ = QP = O$.

(3) $P^2 = P$, $Q^2 = Q$.

証明

(1) $x_1, x_2 \in X$ が与えられたとする。次を満たす y_1, z_1, y_2, z_2 が存在する。

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad y_1 \in Y, \quad z_1 \in Z,$$

$$x_2 = y_2 + z_2, \quad y_2 \in Y, \quad z_2 \in Z.$$

このとき

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2), \quad \lambda y_1 + \mu y_2 \in Y, \quad \lambda z_1 + \mu z_2 \in Z$$

となるので、

$$P(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda P x_1 + \mu P x_2, \quad Q(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda z_1 + \mu z_2 = \lambda Q x_1 + \mu Q x_2.$$

(2) $x \in X$ に対して、

$$x = y + z, \quad y \in Y, \quad z \in Z$$

を満たす y, z がある。$y = Px$, $z = Qx$ であるので、

$$x = y + z = Px + Qx = (P+Q)x$$

であるから、$I = P + Q$. また y, z の分解は

$$y = y + 0, \quad y \in Y, \quad 0 \in Z,$$

$$z = 0 + z, \quad 0 \in Y, \quad z \in Z$$

であるから、$Py = y$, $Qy = 0$, $Pz = 0$, $Qz = z$. ゆえに

$$PQx = P(Qx) = Pz = 0, \quad QPx = Q(Px) = Qy = 0.$$

これは $PQ = QP = O$ を意味する。

(3) (2) の証明に続いて、

$$P^2 x = P(Px) = Py = y = Px, \quad Q^2 x = Q(Qx) = Qz = z = Qx$$

となるので、$P^2 = P$, $Q^2 = Q$. ■

定義 3.1.4 (代数的射影作用素) 線型空間 X が Y と Z の代数的直和であるとき、

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad \exists! z \in Z \quad \text{s.t.} \quad x = y + z$$

であるが、x に y を対応させる作用素 $P\colon X \ni x \mapsto y \in X$ を X の Y への**代数的射影作用素**とよぶ。

注意 3.1.5 個人的には用語法があまり適切でないと感じている。X が Hilbert 空間の場合には、任意の閉線型部分空間 M に対して、M の直交補空間 $M^\perp$ (これは M から一意的に定まる) を取ると、X は M と $M^\perp$ の直和になる。そこで、X の M への (直交) 射影というのは、M だけで一意的に決定されるものである。ところが、ここで問題にしている代数的直和については、Y を決めても Z は一意的には決まらず、P は Y と Z の組を指定してはじめて定まるものだから、「X の Y への射影」という表現は誤解を招きやすい。 ■

代数的射影作用素 P は $P^2 = P$ を満たすわけだが、逆にこの性質を持つ線型作用素があるとき、一つの代数的直和分解が得られることを以下に示す。先走って標語的にまとめておくと、

代数的直和分解 $\longleftrightarrow$ 代数的射影作用素

補題 3.1.6 X は線型空間、$P\colon X \to X$ は線型作用素で、$P^2 = P$ とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $Q := I - P$ とおくと、

$$P + Q = I, \quad PQ = QP = O, \quad Q^2 = Q.$$

(2) $Y := PX$ とおくと、$\forall x \in X$ に対して

$$x \in Y \quad \Longleftrightarrow \quad Px = x.$$

証明

(1) (どれも単純な計算で証明できる。) $P+Q=I$ は明らか。$PQ = P(I-P) = P - P^2 = O$, $QP = (I-P)P = P - P^2 = O$, $Q^2 = (I-P)(I-P) = I^2 - 2P + P^2 = I - P = Q$.

(2) $x \in Y$ とすると、$\exists x' \in X$ s.t. $Px' = x$. 両辺に P をかけて $P^2x' = Px$. $P^2 = P$ より左辺 $= P^2x' = Px' = x$ であるから、$Px = x$. 逆に $Px = x$ のとき $x \in PX = Y$ であるのは明らか。 ■

命題 3.1.7 X は線型空間、$P\colon X \to X$ は線型作用素で $P^2 = P$ とするとき、$Y := PX$, $Q := I - P$, $Z := QX$ とおくと、X は Y と Z の直和になる。

証明

$P + Q = I$ より、$Y + Z = X$. また $PQ = O$ より $Y \cap Z = \{0\}$ である (実際 $x \in Y \cap Z$ とすると、$x = Px$, $x = Qx$ であるから、$x = Px = PQx = Ox = 0$ となり、$Y \cap Z = \{0\}$ が示される)。 ■

3.1.2 (位相的) 直和、補空間、射影作用素であまり本に書いていないこと

部分空間を最初から閉部分空間に限定する (テキストが多い) のは？

無限次元の線型空間を相手にするときは、前項の概念 (代数的直和、代数的補空間、代数的射影作用素) はあまり役に立たない。

位相空間論において、直積位相は射影が連続になるように定義されることからも示唆されるように、射影作用素は連続であって欲しい (そうなっていると便利である)。ところで、有限次元線型空間においては、任意の代数的射影作用素は (当然) 連続になるが、無限次元線型空間の場合は無条件ではそうならず、条件として要請する必要がある。

補題 3.1.8 (射影作用素が連続ならば値域は閉) ノルム空間 X がその部分空間 Y, Z の代数的直和であるとき、X の Y への代数的射影作用素 $P\colon X \to X$ が連続ならば、Y, Z は閉線型部分空間である。

証明

$Y = PX$ 内の点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が X 内で $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ と収束したとする。P は連続と仮定したから $Py_n \to Py$. ところで $Py_n = y_n$ であるから、$y_n \to Py$ ということでもある。極限の一意性から $Py = y$. ゆえに $y \in Y$. ゆえに Y は閉集合である。$Q = I - P$ も連続なので、同様にして Z は閉集合であることが示される。 ■

(位相的) 直和や (位相的) 射影作用素の議論で、線型部分空間を閉線型部分空間に断りなく限るテキストが多いのは、こういう事情があるのであろう。

次の項で、Banach 空間においては、代数的直和分解 $X = Y + Z$ において、Y, Z が閉集合であれば、代数的射影作用素は連続であることが示される。要するに

Banach 空間 X の代数的直和分解 $X = Y + Z$ と、X の Y への代数的射影作用素 $P\colon X \to X$ に対して、

$$P \text{ が連続} \iff Y \text{ と } Z \text{ は閉集合.}$$

が成り立ち、閉部分空間であることを要請するのと、射影作用素の連続性を要請するのは同じことである。

テキストに見られる二つの流儀

次項では、種本にしたテキストの影響で、補空間の言葉でまとめてあるが、テキストによっては、補空間や直和という言葉をあまり使わず (極端な場合まったく出さずに) 射影作用素の言葉だけですませているものもある。参考書を探すときには注意を要する。

3.1.3 位相的直和、位相的補空間

この項の内容は主に Brezis [10] による。なお、[10] では代数的直和を単に「直和」と書いているが、この文書では誤解のないようにつねに「代数的直和」と書く。

Hilbert 空間 X では、任意の閉線型部分空間 M について

$$X = M \oplus M^{\perp} \quad (\text{直交直和})$$

が成立する。

この一般化、つまり内積を考えない直和分解を考えよう。X が二つの線型部分空間 M と L の代数的直和であるとは、

$$X = M + L \quad (\text{代数的直和}) \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x \in X \quad \exists! y \in M \quad \exists! z \in L \quad x = y + z$$

ということであった ($X = M + L$ かつ $M \cap L = \{0\}$ とも書ける)。

有限次元線型空間のことを思い出しても、M の相手「補空間」 L は一意的には決まらない、ということをまず注意しておく。

無限次元空間の場合は、位相的なことを考慮する必要がある。一言で言うと、M と L を閉集合であるという条件を付加する。こうしておくとそれぞれへの射影作用素が連続になる (以下の系 3.1.11 を参照)。

定義 3.1.9 (位相的補空間) X は Banach 空間で、M を X の閉線型部分空間、L を X の線型部分空間とするとき、L が M の**位相的補空間**であるとは、次の二つの条件を満たすことをいう。

(1) L は閉集合。

(2) $M \cap L = \{0\}$, $M + L = X$.

この定義の状況下で、X から M や L への射影は連続になる (以下で証明する)。

明らかに、Hilbert 空間においては、任意の閉線型部分空間 M に対して、M の直交補空間 $M^\perp$ は M の位相的補空間になっている。

命題 3.1.10 (Brezis [10] 命題 II.8) X を Banach 空間、M と L を X の閉線型部分空間で、$M+L$ は閉集合であるものとするとき、$\exists C\in\mathbf{R}$, $\forall x\in M+L$, $\exists y\in M$, $\exists z\in L$ s.t.

$$x=y+z \quad \text{and} \quad \|y\|\le C\|x\| \quad \text{and} \quad \|z\|\le C\|x\|.$$

証明

$M\times L$ にノルム $\|[x,y]\|:=\|x\|+\|y\|$ を与えたノルム空間と、X の部分ノルム空間 $M+L$ を考え、$T\colon M\times L\to M+L$ を

$$T[x,y]:=x+y$$

で定めると、これは有界線型かつ全射であるから、開写像定理により、$\exists C>0$, ($\forall x\in M+L$: $\|x\|<C$) ($\exists y\in M$) ($\exists z\in L$) s.t.

$$x=y+z,\quad \|x\|+\|y\|<1.$$

これから任意の $x\in M+L$ に対して、$\exists y\in M$, $\exists z\in L$ s.t.

$$x=y+z,\quad \|y\|+\|z\|\le\frac{1}{C}\|x\|.\blacksquare$$

この補題から次の系は明らかである。

系 3.1.11 (位相的直和において射影は連続) を参照)。X は Banach 空間、M, L は X の閉線型部分空間で、L は M の位相的補空間であるとする。このとき、射影 $X\ni x\mapsto y\in M$, $X\ni x\mapsto z\in L$ (ただし $x=y+z$) はともに連続かつ線型な作用素である。

ところで、ここが重要なことだが、任意に選んだ閉線型部分空間 M に対して、その位相的補空間が存在するとは限らない。

命題 3.1.12 (位相的補空間の存在・否存在) (1) 任意の有限次元線型部分空間 M は位相的補空間を持つ。

(2) 任意の有限余次元閉線型部分空間 M は位相的補空間を持つ。

(3) Hilbert 空間に同型でないすべての Banach 空間は位相的補空間を持たない閉線型部分空間を持つ (Lindenstrauss and Tzafriri)。

(証明はとりあえず省略。(1), (2) については例えば Brezis [10] などを見よ。小松・伊藤 [3] や Treves [11] にもあったかな。(3) については、Banach に載っているとも。)

$p\ne 2$ のときの $L^p(\Omega)$ や ℓ^p においても、位相的射影を持たない閉線型部分空間がある。これらが Hilbert 空間と同型でないことを示せば良いわけだが、

F.J.Murray, Trans.Amer.Math.Soc. **41** (1937), 138–152

にあるとか (岡本・中村 [1] に載っていた情報)。

3.2 Banach 空間の部分集合の直交について

(閉値域の定理の準備として命題を寄せ集めたが、現在は「不要」な内容)

定義 3.2.1 (直交) ノルム空間 X の部分集合 M に対して

$$M^\perp := \{f \in X'; \forall x \in M\ \langle f, x\rangle = f(x) = 0\}.$$

また X' の部分集合 L に対して、

$${}^\perp L := \{x \in X; \forall f \in L\ \langle f, x\rangle = 0\}.$$

$M^\perp$ は X' の、${}^\perp L$ は X の、ともに閉線型部分空間である。

命題 3.2.2 X をノルム空間、M を X の線型部分空間とするとき、

$${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}.$$

N を X' の線型部分空間とするとき、

$$({}^\perp N)^\perp \supset \overline{N}.$$

次の命題が成り立つ (藤田・黒田・伊藤 [7] の補題 9.8)。

命題 3.2.3 X, Y は Banach 空間、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ は稠密な定義域を持つ閉作用素とするとき、

$$\overline{R(A)} = {}^\perp N(A^*).$$

以下の 3 つの命題は田辺 [6] から引用した。

命題 3.2.4 X, Y はノルム空間、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ は稠密な定義域を持つ線型作用素とするとき、

$$R(A)^\perp = N(A^*).$$

命題 3.2.5 X, Y は Banach 空間で、特に Y は回帰的とする。$A\colon X \supset D(A) \to Y$ を稠密な定義域を持つ閉線型作用素とするとき、

$$N(A) = R(A^*)^\perp.$$

命題 3.2.6 X, Y はノルム空間で、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ は稠密な定義域を持つ線型作用素とするとき、

$$\overline{R(A)} = {}^\perp N(A^*).$$

はて？命題 3.2.6 は命題 3.2.3 よりも明らかに強い。実は、田辺 [6] には命題 3.2.6 の証明は載っていないが、命題 3.2.4 を認めれば (これは証明が載っている)、両辺の直交を取って、${}^\perp(V^\perp) = \overline{V}$ を用いれば (これは一般に成り立つと思っているのだが) 明らかそうだが。(何か、あまり整理されていない印象がある…)

Brezis [10] には次の定理が載っている。

命題 3.2.7 X, Y は Banach 空間で、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ は稠密な定義域を持つ閉線型作用素とするとき、

(1) $N(A) = {}^{\perp}R(A^*)$.

(2) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$.

(3) $N(A)^{\perp} \supset \overline{R(A^*)}$. ($X$ が回帰的ならば $=$ か？)

(4) ${}^{\perp}N(A^*) = \overline{R(A)}$.

3.3 閉値域の定理の陳述

そもそもこの項を書き始めた理由は、菊地 [2] に載っていた次の定理の証明を探そうとしたことによる。

定理 3.3.1 (閉値域定理 (菊地 [2])) X, Y は Hilbert 空間で、$A \in L(X, Y)$ とするとき、次の (i), (ii), (iii), (iv) は互いに同値である。

(i) $R(A)$ は Y の閉集合である: $\overline{R(A)} = R(A)$.

(ii) 正定数 k が存在して、

$$\|Av\|_Y \geq k\|v\|_X \quad (v \in R(A^*)). \tag{3.1}$$

(これは $R(A^*) \ni v \mapsto Av \in R(A)$ が連続な逆を持つ、ということである。)

(iii) 正定数 k が存在して、

$$\|A^*w\|_X \geq k\|w\|_Y \quad (w \in R(A)). \tag{3.2}$$

(これは $R(A) \ni w \mapsto A^*w \in R(A^*)$ が連続な逆を持つ、ということである。)

(iv) $R(A^*)$ は X の閉集合である: $\overline{R(A^*)} = R(A^*)$.

探せばすぐに分かるだろうと高をくくっていたら、そんなに簡単なことではなかった。以下、いくつか引用するが、決定打はない。

3.3.1 田辺 [6] から

定理 3.3.2 (田辺 [6] の補遺から) X, Y は Banach 空間、$T\colon X \supset D(T) \to Y$ は稠密な定義域を持つ閉線型作用素とするとき、次の (i) と (ii) は互いに同値である。

(i) $R(T)$ は閉集合。

(ii) $R(T^*)$ は閉集合。

3.3.2 Brezis [10] から

定理 3.3.3 (Brezis [10] から) X, Y を Banach 空間、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ を稠密な定義域を持つ閉線型作用素とするとき、次の (i), (ii), (iii), (iv) は互いに同値である。

(i) $R(A)$ は閉

(ii) $R(A^*)$ は閉

(iii) $R(A) = {}^\perp N(A^*)$

(iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$

定理 3.3.4 (Brezis [10] の定理 II.19) X, Y を Banach 空間、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ を稠密な定義域を持つ閉線型作用素とするとき、次の (i), (ii), (iii) は同値である。

(i) A は全射である。

(ii) $\exists C \ge 0$ s.t. $\|v\| \le C\|A^*v\| \quad (v \in D(A^*))$.

(iii) $N(A^*) = \{0\}$ かつ $R(A^*)$ は閉である。

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii) は省略。(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は簡単なので省略。(iii) $\Longrightarrow$ (i) は $R(A) = {}^\perp N(A^*) = Y$ を用いる。 ■

応用上は A が全射であることを示すために (ii) $\Longrightarrow$ (i) を用いる。$f \in Y'$ として、 $A^*v = f$ を考え、f に依らない定数 C で

$$\|v\| \le C\|f\|$$

を満たすものの存在を示せば良いわけである (アプリオリ評価の方法)。

定理 3.3.5 (Brezis [10] の定理 II.20) X, Y を Banach 空間、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ を稠密な定義域を持つ閉線型作用素とするとき、次の (i), (ii), (iii) は同値である。

(i) A^* は全射である。

(ii) $\exists C \ge 0$ s.t. $\|u\| \le C\|Au\| \quad (v \in D(A))$.

(iii) $N(A) = \{0\}$ かつ $R(A)$ は閉である。

以上から、

$$A \text{ が全射} \Longrightarrow A^* \text{ が単射},\ A^* \text{ が全射} \Longrightarrow A \text{ が単射}.$$

ところで、X, Y......

3.3.3 吉田 [9] から

定理 3.3.6 (Yosida [9] から) X, Y は Banach 空間で、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ は稠密な定義域を持つ閉線型作用素とするとき、以下の (i), (ii), (iii), (iv) は互いに同値である。

(i) $R(A)$ は Y の閉集合

(ii) $R(A')$ は X' の閉集合

(iii) $R(A) = N(T')^{\perp}$. ただし $N(T')^{\perp} := \{y \in Y; \langle y, y^*\rangle = 0 \quad \text{for all } y^* \in N(T')\}$

(iv) $R(A') = {}^{\perp}N(T)$. ただし ${}^{\perp}N(T) := \{x^* \in X'; \langle x, x^*\rangle = 0 \quad \text{for all } x \in N(T)\}$

系 3.3.7 X, Y は Banach 空間で、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ は稠密な定義域を持つ閉線型作用素とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $R(A) = Y \quad \Leftrightarrow \quad A'$ は連続な逆を持つ。

(2) $R(A') = X' \quad \Leftrightarrow \quad A$ は連続な逆を持つ。

系 3.3.8 X は Hilbert 空間で、$A\colon X \supset D(A) \to X$ は稠密な定義域を持つ閉線型作用素とする。

$$\exists c > 0 \quad \forall u \in D(A) \quad \mathrm{Re}(Au, u) \ge c\|u\|^2$$

が成り立つならば $R(A^*) = X$.

この他にも色々な本に目を通したけれど、そのものずばりには出会えなかった。それでは仕方がないので…自分で考える。

3.4 定理 3.3.1 の証明

まず次のことを注意しておく。

- 上にも書いたように関数解析の多くのテキストに (i) $\Leftrightarrow$ (iv) の証明が載っている。ここでは認めよう。
- A, A^* は連続であるので、
  - (a) (ii) が成り立つならば、(ii) の不等式は $\forall v \in \overline{R(A^*)}$ について成り立つ。
  - (b) (iii) が成り立つならば、(iii) の不等式は $\forall w \in \overline{R(A^*)}$ について成り立つ。
- Hilbert 空間における稠密な定義域を持つ閉線型作用素に対して、

  $$X = \overline{R(A^*)} \oplus N(A), \quad Y = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) \quad (\text{いずれも直交直和分解})$$

  が成り立つ (次の節で後始末)。

(ii)$\Longrightarrow$ (i) の証明

(ii) が成り立っているとする。上に述べた注意から

$$\forall x \in \overline{R(A*)} \quad \|Ax\| \geq k\|x\|.$$

$\{x_n\}$ が $x_n \in X$, $Ax_n \to a$ in Y を満たすとき、$a \in R(A)$ を示そう。

$$x_n = y_n + z_n, \quad y_n \in \overline{R(A^*)}, \quad z_n \in N(A)$$

と分解できる。$Ax_n = Ay_n + Az_n = Ay_n + 0 = Ay_n$ であるから、$Ax_n - Ax_m = A(y_n - y_m)$ であり、

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(y_n - y_m)\| \geq k\|y_n - y_m\|.$$

これから $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列であるから、極限 $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ が存在する。このとき、

$$Ay = \lim_{n\to\infty} Ay_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = a.$$

ゆえに $a \in R(A)$. ■

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$R(A)$ が閉集合ならば、$R(A^*)$ も閉集合である。そこで

$$\widetilde{A}\colon R(A^*) \ni x \longmapsto Ax \in R(A)$$

を考えると、次の (a), (b), (c) が成り立つ。

(a) $R(A)$, $R(A^*)$ はそれぞれ Y, X の閉線型部分空間として Banach 空間である。

(b) $\widetilde{A}$ は上への写像である。実際、$\forall a \in R(A)$ に対して、$Ax = a$ となる $x \in X$ があるが、x を $x = y + z$ ($y \in \overline{R(A^*)} = R(A^*)$, $z \in N(A)$) と分解すると、$Ax = Ay + Az = Ay + 0 = Ay$ なので、$a = Ay = \widetilde{A}y$.

(c) $\widetilde{A}$ は 1 対 1 である。実際、$x \in R(A^*)$, $\widetilde{A}x = 0$ とすると、$Ax = 0$ より $x \in R(A^*) \cap N(A) = \{0\}$ なので $x = 0$.

ゆえに値域定理から、$\widetilde{A}$ は連続な逆を持つ。よって $\forall x \in R(A^*)$ につき、

$$\|x\| = \left\|\widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}x\right\| \leq \left\|\widetilde{A}^{-1}\right\| \left\|\widetilde{A}x\right\| = \left\|\widetilde{A}^{-1}\right\| \|Ax\|.$$

ゆえに $k = \left\|\widetilde{A}^{-1}\right\|^{-1}$ とすれば

$$\|Ax\| \geq k\|x\|. ■$$

3.5 Hilbert 空間の閉線型作用素に基づく直和分解

前節で利用した Hilbert 空間の直和分解に関する命題の後始末をしておく。

補題 3.5.1 (閉作用素の核は閉部分空間) X, Y はノルム空間、$A\colon X \supset D(A) \to Y$ が閉作用素ならば $N(A)$ は X の閉線型部分空間である。

証明

$\{x_n\}$ が $x_n \in N(A)$, $x_n \to x$ in X を満たすとすると、$Ax_n = 0$ より $Ax_n \to 0$. 閉線型作用素の定義より $x \in D(A)$. $Ax = 0$. ゆえに $x \in N(A)$. これは $N(A)$ が閉集合であることを示している。 ■

補題 3.5.2 (Hilbert 空間の部分集合の直交の基本的性質) X は Hilbert 空間とするとき、以下の (1), (2), (3), (4) が成り立つ。

(1) X の任意の部分集合 A に対して、$A^\perp$ は X の閉線型部分空間である。

(2) X の任意の部分集合 A, B に対して、$A \subset B$ であれば $A^\perp \supset B^\perp$.

(3) X の任意の部分集合 A に対して、$A^\perp = (\overline{A})^\perp$. ただし $\overline{A}$ は A の閉包を表すものとする。

(4) A が X の線型部分空間ならば $(A^\perp)^\perp = \overline{A}$.

証明

(1) (線型部分空間であること) $x, y \in A^\perp$, $\lambda, \mu \in K$ とするとき $\forall z \in A$ について、

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

であるから、$\lambda x + \mu y \in A^\perp$.

(閉集合であること) $\{x_n\}$ が $x_n \in A^\perp$, $x_n \to x$ を満たすとすると、$\forall z \in A$ について、

$$0 = (x_n, z) \to (x, z) \quad \therefore (x, z) = 0.$$

ゆえに $x \in A^\perp$.

(2) $x \in B^\perp$ とすると、$\forall b \in B$ に対して $(x, b) = 0$. 明らかに $\forall a \in A$ に対して $(x, a) = 0$. ゆえに $x \in A^\perp$.

(3) $A \subset \overline{A}$ より、(2) を用いて $A^\perp \supset (\overline{A})^\perp$. 逆向きの包含関係を証明するため、$x \in A^\perp$ とする。$\forall y \in \overline{A}$ に対して、$\exists \{y_n\}$ s.t. $y_n \in A$ $(n \in \mathbf{N})$ かつ $y_n \to y$ $(n \to \infty)$. このとき

$$0 = (x, y_n) \to (x, y) \quad \therefore (x, y) = 0.$$

ゆえに $x \in \left(\overline{A}\right)^\perp$. ゆえに $A^\perp \subset \left(\overline{A}\right)^\perp$.

(4) (えーと、どうやるんだっけ？) ■

命題 3.5.3 X, Y は Hilbert 空間、$A \colon X \supset D(A) \to Y$ は稠密な定義域を持つ線型作用素とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $N(A^*) = R(A)^\perp$, $R(A^*) \subset N(A)^\perp$. ゆえに $X = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}$.

(2) 特に A が閉線型作用素ならば $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$. ゆえに $Y = N(A) \oplus \overline{R(A^*)}$.

証明

(この命題は藤田・黒田・伊藤 [7] の演習問題。証明してみよう :-) ■

3.6 個人的な感想・まとめ

有限次元の線型空間においては、

$$Y = N(A^*) \oplus R(A), \tag{3.3}$$
$$X = N(A) \oplus R(A^*) \tag{3.4}$$

という簡明な結果がなりたつが (命題 1.2.2, 系 1.2.3)、無限次元の線型空間においては少々仮定の追加が必要ということだ。

3.6.1 Hilbert 空間の場合

Hilbert 空間においては、一般の Banach 空間よりは事情がシンプルである。まずはこの場合から考えよう。

(3.3) については、A が稠密な定義域を持つ線型作用素であるという緩い仮定 (これは共役作用素を定義するのに必要だ) の下で一般化

$$Y = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}$$

が成り立つ。共役作用素の核 $N(A^*)$ はつねに閉部分空間であること、$R(A)$ は無条件では閉部分空間にならないことに注意しよう。

一方 (3.4) については、A が稠密な定義域を持つ**閉**線型作用素であるという仮定で

$$X = N(A) \oplus \overline{R(A^*)}$$

が成り立つ。A が閉作用素という仮定から $N(A)$ が閉部分空間となるが、まったくの無条件では $N(A)$ が閉部分空間であることは保証されない[1]。当然 $R(A^*)$ も無条件では閉部分空間にならない。

ともあれ、Hilbert 空間では、稠密な定義域を持つ閉線型作用素が<u>閉値域であれば</u>、

$$Y = N(A^*) \oplus R(A), \quad X = N(A) \oplus R(A^*)$$

という有限次元空間と同じ結果が成り立つことになる。

3.6.2 Banach 空間の場合

Banach 空間の場合には、(3.3), (3.4) のような直和の形での結果を望むのは難しそうな雰囲気である (詳しくないので「無理」と言い切れないが多分駄目でしょう)。用いるのは「直交関係」である。

稠密な定義域を持つ線型作用素について成り立つ

$$R(A)^{\perp} = N(A^*), \quad \overline{R(A)} = {}^{\perp}N(A^*)$$

と、稠密な定義域を持つ線型作用素で、値を回帰的な Banach 空間に取るものについて成り立つ

$${}^{\perp}R(A^*) = N(A), \quad \overline{R(A^*)} = N(A)^{\perp}$$

を基礎とする。

[1] $Y = \overline{N(A)} \oplus \overline{R(A^*)}$ が成り立つかどうかも今の私には分からない。

例えば、任意の f に対して $Au = f$ が可解である (A が全射である) ためには、閉値域作用素であって、かつ A^* の核が 0 であれば良いことはすぐわかるが、そのための必要十分条件として、

$$\exists C \geq 0 \quad \forall x \in D(A^*) \quad \|x\| \leq C\|A^*x\|$$

というもの (アプリオリ評価不等式) がある (定理 3.3.4)。

第4章　デルタ関数は L^p の元ではないこと

$I =]-1,1[$ とおき、Heaviside 関数 $H\colon \to \mathbf{R}$ を

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

で定めるとき、Heaviside 関数の弱微分は L^p に属さない。つまり

$$\int_I H\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1,1)$$

を満たす $g \in L^p(-1,1)$ が存在しないことの証明

存在したと仮定すると

$$\int_I H\varphi' = \int_0^1 \varphi' = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0).$$

ゆえに

$$\varphi(0) = \int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1,1). \tag{4.1}$$

特に

$$\int_I g\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(-1,1) \quad \text{with } \varphi(0) = 1.$$

これから

$$\forall \psi \in C_0^\infty(0,1) \qquad \int_0^1 g\psi = 0.$$

ゆえに

$$g = 0 \quad \text{a.e. on }]0,1[.$$

同様に

$$\forall \xi \in C_0^\infty(-1,0) \qquad \int_{-1}^0 g\xi = 0$$

から

$$g = 0 \quad \text{a.e. on }]-1,0[.$$

よって

$$g = 0 \quad \text{a.e. on }]-1,1[.$$

これは (4.1) に反する。

別の証明: (ただし $p \neq 1$ の場合) (4.1) に Hōlder の不等式を適用して、$\forall \varphi \in C_0^\infty$ に対して

$$|\varphi(0)| \le \|g\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}}$$

が成り立つことが分かる。ここで p' は p の共役指数である。

ところが

$$\varphi_n(0) = 1, \|\varphi_n\|_{L^{p'}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

なる $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty$ が存在するので、これは矛盾である。 ■

第5章　稠密性

稠密性(ちゅうみつせい)(density) について、復習しよう。

5.1　基礎

定義 5.1.1 (稠密性) 位相空間 X の部分集合 A が X で**稠密 (dense)** であるとは、$\overline{A} = X$ が成り立つことである。ここで $\overline{A}$ は A の X における閉包 (closure) を表す。

ところで、閉包とは何だっけ？念のために復習しておこう[1]。
$\overline{A}$ の要素は A の接触点と呼ばれる。つまり

$$\overline{A} = A \text{ の接触点の全体}.$$

接触点の特徴づけを書いておこう。

定義 5.1.2 (接触点の定義) X を位相空間、 A を X の部分集合、 x を X の要素とするとき、x が A の**接触点**であるとは

$$(\forall U : x \text{ の近傍}) \quad U \cap A \neq \emptyset$$

が成り立つことである。

この定義から

$$\overline{A} = \{x \in X; x \text{ の任意の近傍 } U \text{ に対して } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

系 5.1.3 (距離空間における接触点の特徴づけ) (X, d) を距離空間、 A を X の部分集合、 x を X の要素とするとき、$x \in \overline{A}$ であるためには

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

が成り立つことが必要十分である。ここで $B(x;\varepsilon)$ は x の ε 近傍: $B(x;\varepsilon) = \{y \in X; d(x, y < \varepsilon\}$.

従って、距離空間においては

$$\overline{A} = \{x \in X; \forall \varepsilon > 0 \quad B(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

[1] A の閉包とは A を含む最小の閉集合のことである、という定義を書いてある本も多いが、ここでは解析学を学ぶ際にイメージが湧きやすいような順序で説明する。

系 5.1.4 (距離空間における接触点の点列による特徴づけ) (X, d) を距離空間、 A を X の部分集合、x を X の要素とするとき、$x \in \overline{A}$ であるには、

$$\exists \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset A \quad s.t. \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in} \quad X$$

が必要十分である。

従って、距離空間においては

$$\overline{A} = \{x \in X; \exists \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset A \quad \text{s.t.} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.$$

5.2　解析学のために

まずいくつか例をあげよう。

(i) $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ で稠密。

(ii) $C_0(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ で稠密 (Lebesgue 積分の議論)。

(iii) $C_0^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ で稠密 (軟化作用素の応用)。

(iv) $C_0^\infty(\Omega)$ は $W_0^{m,p}(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ で稠密 ($W_0^{m,p}$ の定義)。

定理 5.2.1 $f \in L^2(\Omega)$ が

$$(f, \varphi) = 0 \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega))$$

を満たすならば $f = 0$.

これは変分法の基本補題の特別な場合であるが、

定理 5.2.2 X は Hilbert 空間で、 A が X で稠密な部分集合とするとき、$f \in X$ が

$$(f, \varphi) = 0 \quad (\varphi \in A)$$

を満たすならば $f = 0$.

定理 5.2.3 (等式延長の原理) X を位相空間、 Y を Hausdorff 空間、A を X の稠密な部分集合、$f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ を連続な写像で、

$$f(x) = g(x) \quad (x \in A)$$

が成り立つならば、実は $f = g$.

定理 5.2.4 (一様連続関数の拡張可能性) X を位相空間、 (工事中)

第6章　Hilbert 変換

6.1　数直線上の Hilbert 変換

$\mathbf{R}$ 上定義された関数 f に対して、

$$Hf(y) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{f(x)}{x-y}dx \tag{6.1}$$

で定義される関数 Hf を f の **Hilbert 変換**という。ただし積分は主値を取るものとする。すなわち

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{f(x)}{x-y}dx = \lim_{\delta\to+0}\int_{|x-y|\geq\delta} \frac{f(x)}{x-y}dx. \tag{6.2}$$

もしも $f \in L^2(\mathbf{R})$ ならば、(6.1) の積分はほとんどいたるところ収束し、$Hf \in L^2(\mathbf{R})$ で、

$$\|f\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|Hf\|_{L^2(\mathbf{R})}. \tag{6.3}$$

また

$$H(Hf) = -f. \tag{6.4}$$

6.2　Fourier 積分定理

数直線上定義された関数 f, $x \in \mathbf{R}$ が、次のいずれかの条件を満足するとする:

- f は x の近傍で有界変動。
- f は有限個の最大最小しか持たない。
- $$\int_{\mathbf{R}}$$

このとき、**Fourier の単積分定理** (single integral theorem of Fourier)

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}dt \tag{6.5}$$

が成り立つ。

また x で f が有界変動である時、**Fourier の 2 重積分定理** (double integral theorem of Fourier)

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_0^T dt\int_{\mathbf{R}} f(u)\cos t(u-x)du \tag{6.6}$$

は、次の (i), (ii), (iii) のいずれかがあれば成立する。

(i) $f \in L^1(\mathbf{R})$.

(ii) $f(x)/x$ が $|x| > X(>0)$ で L^1 に属し、$x \to \pm\infty$ のとき $f(x)$ は単調に 0 に収束する。

(iii) $f(x) = g(x)\sin(px+q)$ という形をとり、g が単調に 0 に収束する。

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\int_{\mathbf{R}} \sin t(u-x) f(u)du$$

を (6.6) の右辺の積分の**共役 Fourier 積分**と呼ぶ。これは形式的に

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\lambda t}{t}(f(x+t)-f(x-t))dt \tag{6.7}$$

となり、これに関連して

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty,\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{A} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt \tag{6.8}$$

が考えられる。これは $f \in L^1(0,\infty)$ ならば、ほとんどすべての x に対して存在し、g は f の**共役関数** (**conjugate function**) あるいは **Hilbert 変換** (**Hilbert transform**) と呼ばれる。$f \in L^p$ $(p>1)$ ならば、$g \in L^p$ で、

$$\|g\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}. \tag{6.9}$$

6.3 田辺

前節、前々節で特に $n=1$ の場合に相当するのは

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{x-t}dt = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}dt \tag{6.10}$$

である。これは、超関数 Pf.$1/x$ を用いると、

$$\pi^{-1}\,(\mathrm{Pf}.1/x) * f \tag{6.11}$$

と表される。f が一様に Hölder 連続、その台が compact ならば、

$$\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}dt = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{t}\{f(x-t)-f(x+t)\}dt \tag{6.12}$$

により、(6.10) の極限は一様収束の意味で存在する。これを f の **Hilbert 変換** という。

$h = \mathrm{Pf}.1/x$ とおくとき、h の Fourier 変換は次のようになる:

$$(\mathcal{F}h)(\xi) = -(2\pi)^{-1/2} i \,\mathrm{sign}\,\xi \tag{6.13}$$

定理 6.3.1 $1 < p < \infty$ とすると Hilbert 変換は $L^p(\mathbf{R})$ からそれ自身への有界線形写像である。特に $p=2$ の時は Hilbert 変換は $L^2(\mathbf{R})$ のユニタリ変換であり、g を f の Hilbert 変換とすると、

$$(\mathcal{F}g)(\xi) = i(\mathcal{F}g)(\xi)\mathrm{sign}\,\xi \tag{6.14}$$

6.4　有限部分、主値

$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ とすると、$\varepsilon \to +0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \tag{6.15}$$

は有限な値に収束するが、これを積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{6.16}$$

の**有限部分**または**主値**と呼び、

$$\left(\mathrm{Pf.}\frac{1}{x}\right)(\varphi) \quad \text{または} \quad \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{6.17}$$

で表す。$\mathrm{Pf.}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ である。

第7章　双対空間についてのメモ

— $H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$ を理解するために —

7.1　埋め込み写像

集合 X から集合 Y への 1 対 1 写像 (単射) $\iota\colon X \to Y$ があるとき、$\iota(X) \subset Y$ であるが、$\iota(X)$ と X を同一視することで、$X \subset Y$ とみなすことがよくある。

例: 普通の関数を超関数であるとみなす場合など。

このような場合、ι を**埋め込み写像**あるいは**標準単射**と呼び、$X \subset Y$ とみなすことを、X を Y に**埋め込む**という。

X と Y に構造 (位相空間であるとか、線型空間であるとか) が入っている場合は、ι の性質がそれと整合することをしばしば要求する。

例えば X, Y が位相空間の場合、ι が連続であるとしておくと、X で収束する列 (一般にフィルター) は Y でも収束するし、X への連続写像を Y への連続写像とみなすことが出来たり、Y 上の連続関数を X 上の連続関数とみなすことが出来たりする。

7.2　Riesz の表現定理

(この節は読みやすさは別にして十分整理できている。)

$K = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とし、X を K 上の内積空間 (pre-Hilbert 空間)、$(\cdot,\cdot)_X$ をその内積とする。

X の双対空間 X' は (位相線形空間の一般論に従って)

$$X' = \{T; T\colon X \to K \quad \text{連続線形}\}$$

として定義されるが、今の場合 X は

$$\|x\|_X = \sqrt{(x,x)_X}$$

をノルムに持つノルム空間であるから、X' 自身

$$\|T\|_{X'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|_X}$$

というノルムにより Banach 空間になる。

$u \in X$ に対して、

$$T_u\colon X \ni x \mapsto (x,u) \in K$$

で定義される T_u は X 上の連続線型形式である。実際、線形性は明らかで、連続性も Schwarz の不等式から

$$|T_u(x)| = |(x,u)| \le \|u\|\|x\| \quad (x \in X)$$

という有界性の条件が得られて証明できる。これから $\|T_u\|_{X'} \le \|u\|_X$ が分かるが、実は等号が成り立つ:

$$\|T_u\|_{X'} = \|u\|_X. \tag{7.1}$$

(実際 $\|T_u(u)\|_X/\|u\|_X = \|u\|_X$ であるから $\|T_u\|_{X'} \ge \|u\|_X$ という逆向きの不等式が得られる。)

$X \ni u \mapsto T_u \in X'$ という写像を J で表す。つまり

$$J(u) = T_u \quad (u \in X).$$

J は $K = \mathbf{R}$ のとき線型、$K = \mathbf{C}$ のとき共役線型となる。すなわち、

$$J(u+v) = J(u) + J(v) \quad (u, v \in X),$$
$$J(\lambda u) = \overline{\lambda} J(u) \quad (u \in X,\ \lambda \in K).$$

(7.1) から J は等長写像 ($\|Ju\|_{X'} = \|u\|_X$) であるから、

$$\|J(u) - J(v)\| = \|J(u-v)\| = \|u - v\| \quad (u, v \in X)$$

となるので、J は連続かつ 1 対 1 写像である。

ここまでをまとめておこう。

補題 7.2.1 (内積空間からその双対空間への標準的な単射) $K = \mathbf{R}$ または $K = \mathbf{C}$ とし、X を K 上の内積空間 (pre-Hilbert 空間) に対して、X' を X の双対空間 (X から K への連続な線型写像全体に作用素ノルムを与えた Banach 空間) とするとき、

$$J\colon X \ni u \mapsto (X \ni x \mapsto (x, u) \in K) \in X'$$

は共役線型な等長写像 (ゆえに連続かつ単射) である。

X が Hilbert 空間である場合は、J は全射になる。すなわち次の定理が成り立つ。

定理 7.2.2 (Riesz の表現定理) $K = \mathbf{R}$ または $K = \mathbf{C}$ で、X を K 上の Hilbert 空間とするとき、任意の $T \in X'$ に対して、一意的に $u \in X$ が存在して、

$$T(x) = (x, u) \quad (x \in X)$$

が成り立つ。従って、

$$J\colon X \ni u \mapsto (X \ni x \mapsto (x, u) \in K) \in X'$$

は上への共役線型な等長写像 (ゆえに両連続な全単射) である。特に $K = \mathbf{R}$ の場合、J は Hilbert 空間の同型写像である。

(この定理の証明はとりあえず略。関数解析のテキストならば必ず載っている。あるいは

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/functional-analysis-1.pdf

を見よ。)

系 7.2.3 (Hilbert 空間の共役空間は Hilbert 空間) X を Hilbert 空間とするとき、X' は

$$(f, g)_{X'} := (J^{-1}f, J^{-1}g)_X \quad (f, g \in X')$$

を内積とする Hilbert 空間となる。

特に X が実 Hilbert 空間のとき、$J\colon X \to X'$ は Hilbert 空間の同型写像である。
Riesz の定理から Hilbert 空間は反射的であることも示せる (ここでは証明略)。
次の命題もよく使われる。

命題 7.2.4 (有界準双線型形式と有界線型作用素の対応) $K=\mathbf{R}$ または $K=\mathbf{C}$ で、X は K 上の Hilbert 空間とする。$a\colon X\times X\to K$ は有界準双線型形式、すなわち $a(u,v)$ は u について線型、v について共役線型 ($K=\mathbf{R}$ のときは単に線型) で、

$$\exists M\in\mathbf{R}\quad \forall u,v\in X\quad |a(u,v)|\le M\|u\|_X\|v\|_X$$

が成り立つとする。このとき、有界線型作用素 $A\colon X\to X$ で、

$$a(u,v)=(u,Av)\quad (u,v\in X)$$

を満たすものが一意的に存在する。そして

$$\|A\|=\|a\|:=\sup_{\|u\|=\|v\|=1}|a(u,v)|=\sup_{u,v\in X\setminus\{0\}}\frac{|a(u,v)|}{\|u\|_X\|v\|_X}.$$

この対応 $a\mapsto A$ により、X 上の有界準双線型形式全体と $L(X)$ 全体とが一対一に対応する。

証明
任意に $v\in X$ を固定するとき、$X\ni u\mapsto a(u,v)$ は X 上の連続線型形式である。これを Tv と書くと、$T\colon X\to X'$ という写像が定義できるが、T は明らかに共役線型である。また

$$\sup_{\|v\|_X=1}\|Tv\|_{X'}=\sup_{\|v\|_X=1}\sup_{\|u\|_X=1}|Tv(u)|=\sup_{\|v\|_X=1}\sup_{\|u\|_X=1}|a(u,v)|\equiv\|a\|<\infty$$

であるから、T は有界でもある。$A:=J^{-1}T$ とおくと、$A\colon X\to X$ は二つの有界共役線型作用素の積であるから有界線型作用素であり、

$$a(u,v)=(Tv)(u)=(u,J^{-1}Tv)=(u,Av)\quad (u,v\in X)$$

となる。■

系 7.2.5 (Hilbert 空間における有界線型作用素の Hilbert 共役作用素の存在) X が $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ 上の Hilbert 空間、$A\in L(X)$ とするとき、

$$(Au,v)=(u,A^*v)\quad (u,v\in X)$$

を満たす $A^*\in L(X)$ が一意的に存在する。

証明
$a(u,v):=(Au,v)$ とすると、a は有界準双線型形式になるので、上の命題を適用して、$a(u,v)=(u,A^*v)$ を満たす有界線型作用素 A^* が存在する。■

7.3 埋め込まれた空間の双対

定理 7.3.1 X, Y は Banach 空間で、$\iota\colon X \to Y$ は 1 対 1 の連続線形作用素、$\iota(X)$ は Y で稠密とする。このとき $T \in Y'$ に対して $\widetilde{T}\colon X \to \mathbf{R}$ を

$$\widetilde{T}(x) = T(\iota(x)) \quad (x \in X)$$

で定義すると (つまり $\widetilde{T} = T \circ \iota$)、$\widetilde{T} \in X'$ であり、

$$\varphi\colon Y' \ni T \mapsto \widetilde{T} \in X'$$

は 1 対 1 の連続線形作用素である。

証明

まず $\widetilde{T} = T \circ \iota\colon X \to \mathbf{R}$ は連続線形作用素の合成写像であるから、連続線形作用素である。ゆえに $\widetilde{T} \in X'$.

φ の線形性は明らかである。例えば

$$\varphi(T+S)(x) = (T+S)(\iota(x)) = T(\iota(x)) + S(\iota(x)) = \varphi(T)(x) + \varphi(S)(x) = (\varphi(T)+\varphi(S))(x)$$

が $\forall x \in X$ に対して成り立つことから $\varphi(T+S) = \varphi(T)+\varphi(S)$. $\lambda \in R$ に対して $\varphi(\lambda T) = \lambda\varphi(T)$ となることも同様に示せる。

$\varphi\colon Y' \to X'$ が連続であること。$\forall T \in Y'$ に対して

$$|\varphi(T)(x)| = |T(\iota(x))| \le \|T\|_{Y'}\|\iota(x)\|_Y \le \|T\|_{Y'}\|\iota\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X \quad (x \in X)$$

より

$$\|\varphi(T)\|_{X'} \le \|\iota\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|T\|_{Y'}.$$

これは $\varphi\colon Y' \to X'$ が連続であることを示す。

$\varphi\colon Y' \to X'$ が 1 対 1 であること。$T_1, T_2 \in Y'$ に対して

$$\varphi(T_1) = \varphi(T_2)$$

としよう。これは

$$\varphi(T_1)(x) = \varphi(T_2)(x) \quad (x \in X)$$

ということだが、φ の定義より

$$T_1(\iota(x)) = T_2(\iota(x)) \quad (x \in X).$$

$\iota(X)$ が Y において稠密で、T_1, T_2 がともに Y 上の連続写像であることから、

$$T_1 = T_2.$$

ゆえに φ は 1 対 1 である。■

定理 7.3.2 上の定理の状況で、X が反射的 (回帰的) であれば像は稠密である。

証明

$h \in X''$ が $\varphi(Y')$ 上で 0 になっているとする:

$${}_{X''}\langle h, \varphi(T)\rangle_{X'} = 0 \quad (T \in Y').$$

X'' が回帰的であることから、$\tilde{h} \in X$ が存在して

$$ {}_{X''}\langle h, S\rangle_{X'} = {}_{X'}\langle S, \tilde{h}\rangle_X \quad (S \in X'). $$

ゆえに

$$ {}_{X'}\langle \varphi(T), \tilde{h}\rangle_X = 0 \quad (T \in Y'). $$

これは

$$ {}_{Y'}\langle T, \iota\tilde{h}\rangle_Y = 0 \quad (T \in Y') $$

ということ。これから $\iota\tilde{h} = 0$, ゆえに $\tilde{h} = 0$. ゆえに

$$ h = 0. $$

これは $\varphi(Y')$ が稠密であることを示している。■

上の定理の記号は大げさ過ぎるので、覚え易い形に翻訳すると、

$X \subset Y$ が連続で稠密な Banach 空間の埋め込みで、X が反射的ならば、$Y' \subset X'$ は連続で稠密な埋め込みとなる。

そして、この応用として

$$ L^2 = (L^2)' \subset (H_0^1)' = H^{-1} $$

は連続で稠密な埋め込みとなることが分かる。

7.4 Lebesgue 空間の双対空間

$\mathbf{R}^n$ 内の可測集合 Ω, $p \in [1, \infty]$ に対して Lebesgue 空間 $L^p(\Omega)$ を考える。以下 Ω は固定するので、$L^p(\Omega)$ のことを単に L^p と書く。

よくある習慣にのっとり、$p \in [1, \infty]$ に対して、p' を共役指数とする。すなわち $1 < p < \infty$ ならば p' は $1/p + 1/p' = 1$ となる数、$p = 1$ ならば $p' = \infty$, $p = \infty$ ならば $p' = 1$.

任意の $p \in [1, \infty]$, $g \in L^{p'}$ に対して、

$$ J_g \colon L^p \ni f \mapsto \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx \in \mathbf{C} $$

とおくと、$J_g \in (L^p)'$ である。これは Hölder の不等式

$$ \|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}} \quad (f \in L^p,\, g \in L^{p'}) $$

から分かる。

こうして

$$ J \colon L^{p'} \ni g \mapsto J_g \in (L^p)' $$

という写像が定義されるが、これは等距離写像である。すなわち

$$ \|J(g)\|_{(L^p)'} = \|J_g\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^{p'}} \quad (g \in L^{p'}). $$

実は $p \in [1, \infty)$ の場合、この写像 $J \colon L^{p'} \to (L^p)'$ は全射 (従って Banach 空間の同型写像) であることが、次の Riesz の表現定理から保証される。

定理 7.4.1 ((Lebesgue 空間に関する) Riesz の表現定理) $p \in [1,\infty)$ とするとき、任意の $T \in (L^p(\Omega))'$ に対して、一意的に $g \in L^{p'}(\Omega)$ が存在して

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad (f \in L^p(\Omega)).$$

この事実を J を省略して単に $(L^p)' = L^{p'}$ $(1 \le p < \infty)$ と書くことが多い。
$p = \infty$ のときは J は全射にはならない。すなわち

$$J(L^1) \subsetneqq (L^\infty)', \quad J \text{ を省略して書くと} \quad L^1 \subsetneqq (L^\infty)'.$$

L^1 は Banach 空間であり、J は等長であるから、$J(L^1)$ は $(L^\infty)'$ の閉部分空間である (特に $J(L^1)$ は $(L^\infty)'$ で稠密ではない)。だから $(L^\infty)'$ は L^1 よりもかなり大きい (感覚的な話)。

付 録A　ごみ箱

A.1 用語

Hilbert 空間 X における稠密な定義域を持つ閉線型作用素 A が **accretive** (増大?) であるとは、

$$\forall u \in D(A) \quad \mathrm{Re}(Au, u) \geq 0$$

が成り立つことをいう。$-A$ が accretive であるとき、A は **dissipative** (消散) であるという。

A.2 数学者

Stefan Banach (1892–1945)

関連図書

[1] 岡本 久, 中村 修, 関数解析 1, 2, 岩波書店 (199?).

[2] 菊地 文雄, 有限要素法の数理, 培風館 (1994).

[3] 小松 彦三郎, 伊藤 清三 編, 解析学の基礎, 岩波書店 (1977).

[4] 溝畑(みぞはた) 茂, 偏微分方程式論, 岩波書店 (1965).

[5] 溝畑 茂, 解析学小景, 岩波書店 (1997).

[6] 田辺 広城(ひろき), 関数解析 上, 下, 実況出版 (1978, 1981).

[7] 藤田 宏, 黒田 成俊(しげとし), 伊藤 清三, 関数解析 (岩波講座基礎数学), 岩波書店 (1978).

[8] 宮寺 功, 関数解析, 理工学社 (1972, 第 2 版 2003).

[9] Kôsaku Yosida, Functional analysis, sixth edition, Springer (1980).

[10] H.Brezis (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 関数解析, 産業図書 (1988).

[11] トレーブ著, 松浦重武訳, 位相ベクトル空間・超関数・核 上, 下, 吉岡書店 (1986, 1986).