関数解析入門 I
内積空間ノート[1]

桂田 祐史

2004 年 8 月 16 日, 2017 年 4 月 30 日

[1]自分のための注: `~/math/functional-analysis/functional-analysis-1.tex`

目 次

この文書の PDF ファイルを

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/functional-analysis-1.pdf`

に置く。

第1章　内積空間概説

よくある話であるが、最後にもう一度読み返すのが分りやすいかも知れない…

1.1　筆者と内積空間

内積については何度も学ぶ機会があった。線形代数、Fourier 解析、関数解析、微分方程式に対する弱解の方法とそれと関係の深い有限要素法、連立 1 次方程式に対する CG 法、直交関数系…数だけ見ても重要さが分かる。掛け値無しに重要だ。

…しかしその割に整った説明が少ないように感じられた。数学書にある定理の証明は無駄がないが、何をやっているのか分かりにくいものが多かった。しかし自分でゆっくりと考えてみると、事実や証明に鮮明な幾何学的イメージを持つことができるものばかりだった。もったいないと思う。後から振り返ると、勉強の初期に藤田・黒田・伊藤 [10] を手に取ることが出来たのは幸運だったと思う (この本の説明は素敵だ)。

というわけで、このノートでは幾何学的イメージを大切にした説明を心掛ける。

1.2　不等式と正射影

内積空間において不等式がしばしば登場する。一度でも Hilbert 空間を学んだ者は、以下の事項に覚えがあるであろう。

1. Schwarz の不等式
2. Bessel の不等式
3. 正射影 (直交射影) が最も近い (距離の小さい) 点を与えること

ところで、これらの事実はいずれも

直角三角形では斜辺が一番長い

というただ一つの原理の現われであり、その証明は「ピタゴラスの定理」という等式によるもので、非常に単純である。

あっけなさすぎる？

正射影とは何か？

正射影というのは、要するに「垂線の足」のことである。

「垂線の足」はどこにいった？…垂線の足という言葉がある。2 次元, 3 次元の Euclid 幾何で、与えられた点から与えられた直線または平面に下ろした垂線の足、というように使われる[1]。前節で「不等式は直角三角形では斜辺が一番長い」と言ったが、問題に適した直角三角形を思い描くためにこの「垂線の足」が必要なのである。

[1]実は、この言葉は高等学校の教科書から消えつつあるようである。これも流行りの「ゆとり教育」なのかもしれないが、重要な概念を表わす言葉を教えない方がよほど理解に支障を与えると思うのは私だけなのだろうか。

1.3　正規直交系

内積空間において、正規直交系は簡単で非常に強力な道具である。理論的にも重宝するが、計算の面、特に数値計算においても欠かせないものである。

その正規直交系は、いつでも Gram-Schmidt の直交化法で作り出すことができる。しかも応用上重要な場合に、その計算について「Lanczos の原理」が成立し、計算が著しく効率的になる。話が出来過ぎのようにも感じられるくらいである。

1.4　Fourier 展開

あらく言えば、正規直交系による展開が Fourier 展開である。

そう言い切ってしまうと、大事なことが一つ欠落してしまう。しばしば、考えている問題によく合った正規直交系が存在するという事実が重要である。対称な作用素の固有値問題の解として得られる固有ベクトル (固有関数) で正規直交系を作ることができるというのが、Fourier の偉大な発見の重要なところである。

第2章　$\mathbf{R}^n$ の内積と親しもう

2.1　この章のねらい

高校で平面や空間のベクトルの内積について学んだ。例えば、空間のベクトル x, y の内積は、成分を用いれば

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

と表わされ、図形的には

$$(x, y) = (x \text{ の長さ}) \times (y \text{ の長さ}) \times \cos\theta \quad (\theta \text{ は } x \text{ と } y \text{ のなす角})$$

という意味を持つのであった。

この内積を一般の次元の数ベクトル空間に拡張して、その性質を調べよう。

記号

$\mathbf{R}$ を実数体とする。
$\mathbf{R}^n$ を成分が実数である n 次元のベクトルの全体とする。
$\mathbf{R}^{n\times n}$ を n 次実正方行列全体とする。
x をベクトルまたは行列とするとき、x の転置を x^T または ${}^t x$ と書く[a]。
$v_1, \cdots, v_m \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\mathrm{Span}(v_1, \cdots, v_m) := \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j; (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m \right\}$$

[a]転置は古くは x' と書かれたそうである。それが紛らわしくなってきたので、A^T と書かれるようになった。数学の文献では—しゅば—

2.2　$\mathbf{R}^n$ の標準内積の定義と Schwarz の不等式

n を自然数とするとき、$x = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $y = (y_1, \cdots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.1}$$

とおき、この (x, y) を x と y の内積と呼ぶのであった。次の命題の証明は明らかである。

命題 2.2.1 (内積の公理) $\mathbf{R}^n$ における内積について以下が成り立つ。

(1) $\forall x \in \mathbf{R}^n$ に対して $(x, x) \geq 0$. また $x = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0$.

(2) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.

(3) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して $(x, y) = (y, x)$.

我々は後で上の (1), (2), (3) を満たす $(\cdot,\cdot)$ を一般に内積と呼ぶことになる。つまり内積の概念を一般化するので、(2.1) で定義される (x,y) のことを $\mathbf{R}^n$ の**標準内積**または **Euclid 内積**と呼ぶことにする。

$$(x,y)=y^Tx$$

が成り立つことに注意しておくと便利である。例えば行列の積に関する結合則と、公式 $(AB)^T=B^TA^T$ から

$$(Ax,y)=y^T(Ax)=(y^TA)x=(A^Ty)^Tx=(x,A^Ty)$$

が分かる。ゆえに A が実対称行列のとき $(Ax,y)=(x,Ay)$ が成り立つことが分かるが、実は逆も成り立つ。

命題 2.2.2 (対称性の内積による特徴付け) $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ について次の (i), (ii) は互いに同値である。

(i) A は対称である。

(ii) $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$ に対して $(Ax,y)=(x,Ay)$.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) は済んでいる。(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す。仮定から $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$ に対して $(Ax,y)=(x,Ay)$ であるが、上で見たように $(Ax,y)=(x,A^Ty)$ であるから、

$$(x,Ay)=(x,A^Ty).$$

これが任意の x について成り立つことから $Ay=A^Ty$ が導かれる (実際 $(x,Ay-A^Ty)$ であるから、$x=Ay-A^Ty$ と選べば $Ay-A^Ty=0$)。これが任意の y について成り立つことから $A=A^T$. ■

有名な Schwarz の不等式は、何と言っても基本的である。

命題 2.2.3 (Schwarz の不等式) 任意の x, $y\in\mathbf{R}^n$ に対して、

$$(x,y)^2\le(x,x)(y,y).$$

等号は x と y が 1 次従属のときのみ成立する。

証明 (印象的ではあるが、幾何学的イメージの湧きにくい証明) x と y が 1 次独立ならば、任意の実数 t に対して $tx+y\ne 0$. ゆえに

$$(tx+y,tx+y)>0.$$

左辺を展開して

$$(x,x)t^2+2(x,y)t+(y,t)>0.$$

t についての 2 次式の符号が一定であることから

$$\frac{\text{判別式}}{4}=(x,y)^2-(x,x)(y,y)<0.$$

ゆえに

$$(x,y)^2<(x,x)(y,y).$$

一方、x と y が一従属であるとき、$(x,y)^2=(x,x)(y,y)$ が成り立つことを確かめるのは容易である。■

2.3　$\mathbf{R}^n$ の Euclid ノルム

一般に内積からノルムが誘導されるが、Euclid 内積から誘導されるノルムを Euclid ノルムと呼ぶ。

定義 2.3.1 (Euclid ノルム) $x \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\|x\| \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

とおき、これを x の **Euclid ノルム**と呼ぶ。

次の命題もよく知られている。

命題 2.3.2 (ノルムの公理) $\mathbf{R}^n$ における Euclid ノルムについて以下の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) $\forall x \in \mathbf{R}^n$ に対して $\|x\| \geq 0$. 等号は $x = 0$ のとき、そのときのみ成立。

(2) $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(3) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

(等号は x と y が同じ方向・向きを持つとき、そのときに限り成り立つ。)

証明　略 ■

2.4 直交性

定義 2.4.1 (直交) $(\cdot,\cdot)$ を $\mathbf{R}^n$ の Euclid 内積とする。

(1) $x, y \in \mathbf{R}^n$ について、

$$x \perp y \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (x,y)=0.$$

このとき x と y は互いに**直交する**と言う。

(2) $x \in \mathbf{R}^n$, $M \subset \mathbf{R}^n$ について、

$$x \perp M \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall y \in M \quad x \perp y$$

と定義し、このとき x と M は**直交する**という。

(3) $M \subset \mathbf{R}^n$, $N \subset \mathbf{R}^n$ に対して

$$M \perp N \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in M)\ (\forall y \in N)\ x \perp y$$

と定義し、このとき M と N は**直交する**という。

(4) $M \subset \mathbf{R}^n$ について、

$$M^\perp \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbf{R}^n; x \perp M\}$$

とおき、これを M の**直交**と呼ぶ。

以下、定義から簡単にチェックできる性質をあげる。

命題 2.4.2 $(\cdot,\cdot)$ を $\mathbf{R}^n$ の Euclid 内積、また $\|\cdot\|$ を Euclid ノルムとするとき、次の (1)〜(9) が成り立つ。

(1) $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$, $M \perp N \Leftrightarrow N \perp M$.

(2) (**ピタゴラスの定理**) $x \perp y \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$.

(3) (**中線定理** (parallelogram theorem)) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

(4) (**分極公式** (polarization identity)) $(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

(5) $\{0\}^\perp = \mathbf{R}^n$, $(\mathbf{R}^n)^\perp = \{0\}$.

(6) $M \subset \mathbf{R}^n$ ならば $M^\perp$ は $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間である。

(7) $M_1 \subset M_2 \subset \mathbf{R}^n$ ならば $(M_1)^\perp \supset (M_2)^\perp$.

(8) 任意の $M \subset \mathbf{R}^n$ に対して $M \subset (M^\perp)^\perp$.

(9) 任意の $M \subset \mathbf{R}^n$ に対して $M \cap M^\perp = \{0\}$.

証明

(1) 内積の対称性 $(x,y)=(y,x)$ から明らか。

(2) 一般に

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y,x+y)=(x,x+y)+(y,x+y)\\ &= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\ &= \|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$(x,y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

(3) 単なる計算である。

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\ &= [(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)]+[(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)]\\ &= 2\,[(x,x)+(y,y)]=2(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

(4) これも単なる計算である。

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) &= \frac{1}{4}\{[(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)]-[(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)]\}\\ &= \frac{1}{2}\,[(x,y)+(y,x)]=(x,y).\end{aligned}$$

(5) $\forall x\in\mathbf{R}^n$ に対して $(x,0)=0$, すなわち $x\perp 0$ であるから $x\in\{0\}^\perp$. ゆえに $\mathbf{R}^n\subset\{0\}^\perp$. 逆向きの包含関係は明らかだから $\{0\}^\perp=\mathbf{R}^n$. 一方、$x\in(\mathbf{R}^n)^\perp$ とすると、x は自分自身とも直交する: $(x,x)=0$. ゆえに $x=0$. よって $(\mathbf{R}^n)^\perp=\{0\}$.

(6) $x,y\in M^\perp$ とすると、$\forall z\in M$ に対して、

$$(x,z)=(y,z)=0.$$

このとき $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ に対して、

$$(\lambda x+\mu y,z)=\lambda(x,z)+\mu(y,z)=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0.$$

すなわち $\lambda x+\mu y\in M^\perp$. ゆえに $M^\perp$ は線型部分空間である。

(7) 明らか。

(8) $x\in M$ とすると、$\forall y\in M^\perp$ に対して $(x,y)=0$. これから $x\in(M^\perp)^\perp$. ゆえに $M\subset(M^\perp)^\perp$.

(9) $x\in M\cap M^\perp$ とすると、x は自分自身とも直交する: $(x,x)=0$. ゆえに $x=0$. よって $M\cap M^\perp\subset\{0\}$. 逆向きの包含関係は明らかだから $M\cap M^\perp=\{0\}$. ■

$M\subset\mathbf{R}^n$ の直交については、M が $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間 V であるときが特に重要である。このときは $V^\perp$ を V の**直交補空間**と呼ぶことが多い。これは後で証明するように $V\oplus V^\perp=\mathbf{R}^n$ が成り立つからであろう。

例えば $\mathbf{R}^3$ で考えるとき、V が直線 (1 次元部分空間) のとき $V^\perp$ は平面で、V が平面 (2 次元部分空間) のとき $V^\perp$ は直線になる。V が大きいほど $V^\perp$ が小さいことは既に証明したので、次の命題が成り立つことは容易に想像できるであろう。

命題 2.4.3 (直交補空間の次元) V を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とするとき

$$\dim V^\perp=n-\dim V.$$

証明には少し準備がいるので後に回す。

余談 2.4.1 (昔話) 「中線定理」は日本の中学高校では「Pappus(パップス) の中線定理」と呼ばれていることが多いようである (アレクサンドリアの Pappus (B.C.260–未詳) の定理ではない (パップス全集にない) とか、Perga の Apollonius (B.C.262–190) の名前がついているとか、それはさておき)。筆者がこの定理で思い出すのは、かつて一世を風靡したマンガ『愛と誠』の中の一節である。秀才岩清水弘が黒板の前で数学の問題を解いているのだけど、その内容がパップスの中線定理を証明しろというもの。それでその解答が、古めかしい初等幾何的な長々とした証明 (場合分けを含む)。これにはちょっとたまげた。当時の高校の教科書では、既に解析幾何的な証明やベクトルの内積を使った証明 (要するに上で示したもの) が普通だったので、「作者のトシが知れるなあ」と思ったのであった。一方で、昔は「秀才の証明」になるような難しい定理だったのだな、と思い至った。解析幾何の威力は大したものである。■

この命題から、例えば次の重要な性質が得られる。

系 2.4.4 (線型部分空間の直交の直交はもとの空間) V を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とするとき

$$(V^{\perp})^{\perp} = V.$$

証明 すでに見たように、一般に $V \subset (V^{\perp})^{\perp}$ であるが、この場合は V と $V^{\perp}$ はともに線型部分空間であり、次元を調べると

$$\dim\left((V^{\perp})^{\perp}\right) = n - \dim(V^{\perp}) = n - (n - \dim V) = \dim V$$

と一致することが分かるので、実は等号が成り立つ。■

命題 2.4.5 V_1, V_2 を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とするとき、

(1) $(V_1 + V_2)^{\perp} = (V_1^{\perp}) \cap (V_2^{\perp})$.

(2) $(V_1 \cap V_2)^{\perp} = (V_1^{\perp}) + (V_2^{\perp})$.

2.5 線型部分空間への正射影 (1)

筆者は内積空間で最も重要な概念は正射影であると信じている。高等学校レベルの数学で解ける一つの問題をやってみることから始めよう。簡単ではあるが、結果は非常に重要であり、しっかりと身につけて欲しい。

例題 1. 内積空間で原点と $v\ (\neq 0)$ を通る直線に、u から下ろした垂線の足 p を求めよ。

解答

p は直線 $\mathrm{Span}\,(v)$ 上の点であるから、

$$p = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbf{R} \tag{2.2}$$

と書ける。直交性の条件は $(p-u) \perp v$ すなわち

$$(p - u, v) = 0.$$

この式に (2.2) を代入すると

$$(\lambda v - u, v) = 0.$$

$v \neq 0$ であるから、これは

$$\lambda = \frac{(u,v)}{(v,v)} = \frac{(u,v)}{\|v\|^2}$$

と解くことができる。ゆえに

$$p = \lambda v = \frac{(u,v)}{(v,v)} v.$$

この p が確かに垂線の足であること、つまり

$$p \in \mathrm{Span}(v), \quad p - u \perp v$$

を満たすことは明らかである。■

解答の分析

最後の式は

$$p = \left(u, \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|}$$

と変形できる。

$$n = \frac{v}{\|v\|}$$

とおくと、これは v 方向の単位ベクトル (あるいは v を正規化したベクトル) であり、

$$p = (u,n)n$$

となる。(u,n) は u の v 方向の成分とも言うべき量である。u と v のなす角を θ とすると、

$$(u,n) = \|u\| \cos\theta$$

であるから、u の $\mathrm{Span}(v)$ への影の (符号付きの) 長さとも言えることが分かる (図を描こう！)。

p は直線上で最も u に近い点である、すなわち

$$\|p-u\| = \min_{x \in \mathrm{Span}\,(v)} \|x-u\|$$

が成り立つ。これは直角三角形では斜辺は垂辺より長い、という極めて当たり前の話である。このことの証明はピタゴラスの定理

$$\|x-u\|^2 = \|x-p\|^2 + \|p-u\|^2$$

から得られる不等式

$$\|x-u\|^2 \geq \|x-p\|^2$$

による。

調子に乗って、少し拡張した問題を考えてみよう。

例題 2. 内積空間で 1 次独立なベクトル v_1, v_2 があるとき、u から平面 $\mathrm{Span}\,(v_1, v_2)$ に下ろした垂線の足を求めよ。

解答への試み

平面 Span(v) 上の点 x は

$$x = \lambda v_1 + \mu v_2, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

と書けるので、直交性の条件

$$(x - u, v_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{i.e.} \quad (x, v_i) = (u, v_i) \quad (i = 1, 2)$$

から連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} \lambda(v_1, v_1) + \mu(v_2, v_1) &= (u, v_1) \\ \lambda(v_1, v_2) + \mu(v_2, v_2) &= (u, v_2) \end{aligned}$$

を得る。行列表現は

$$\begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_2, v_1) \\ (v_1, v_2) & (v_2, v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, v_1) \\ (u, v_2) \end{pmatrix}.$$

Schwarz の不等式の等号成立条件を吟味すると、この連立 1 次方程式の係数行列は正則であることが分かるが[1]、λ, μ は複雑な式になってしまう。しかし、実はうまい解決策がある。それは後のお楽しみ (Gram-Schmidt の正規直交化を導入してから)。 ■

定義 2.5.1 (線型部分空間への正射影) $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間 V と $x \in \mathbf{R}^n$ について、

$$y \in M, \quad (x - y) \perp V$$

を満たす y が存在するとき、y を x の V への**正射影** または **直交射影** (orthogonal projection) と呼ぶ。

実はより一般の部分集合 M への正射影も定義できるが、それについては後述する。

命題 2.5.2 (正射影の特徴付け 「正射影は最も近い点」) $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V と $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して、次の二条件は同値である。

(i) y は x の V への正射影である。

(ii) $\|x - y\| = \min_{v \in V} \|x - v\|$.

証明 [(i)$\Longrightarrow$(ii)] y は x の V への正射影であるとする。任意の $z \in V$ に対して、3 点 x, y, z を頂点とする三角形を考える。これは y が直角をはさむ頂点となる直角三角形になる。実際、$y - z \in V$ であるから、直交性の仮定から $(x - y, y - z) = 0$. ピタゴラスの定理から

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\| = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2.$$

ゆえに

$$\|x - z\|^2 \geq \|x - y\|^2, \quad \text{等号は } \|y - z\| = 0 \text{ すなわち } z = y \text{ のとき}.$$

これから

$$\|x - y\| = \min_{z \in V} \|x - z\|.$$

[1] 一般には Gram の行列式の議論でよい？

[(ii) $\Longrightarrow$ (i)] $h \in V$ を任意にとり、$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f(t) = \|x - (y - th)\|^2 = \|x - y + th\|^2 \quad (t \in \mathbf{R})$$

で定める。$(y - th) \in V$ であるから、仮定より f は 0 で最小になる。ゆえに $f'(0) = 0$ であるが、

$$f(t) = \|x - y\|^2 + 2t(x - y, h) + t^2\|h\|^2$$

であるから、

$$(x - y, h) = 0.$$

これが任意の $h \in V$ に対して成り立つと言うことは $x - y \perp V$ を意味している。■

例題 1 の内容を命題としてまとめておこう。

命題 2.5.3 (1 次元部分空間への正射影) $v \neq 0$ とするとき、$V = \mathrm{Span}(v) = \{\lambda v; \lambda \in \mathbf{R}\}$ とおくと、任意の $u \in \mathbf{R}^n$ の V への正射影は (ただ一つ存在し)

$$w = \frac{(u, v)}{(v, v)} v$$

である。

この 1 次元部分空間への正射影を用いると、Schwarz の不等式の別証明を得る。個人的には Schwarz の不等式の意味がよく分かる証明だと思っている。

Schwarz の不等式の別証明

$y = 0$ のときは明らかであるから、$y \neq 0$ とする。x の $V = \mathrm{Span}(v)$ への正射影は $w = \lambda y$, $\lambda = \dfrac{(x, y)}{(y, y)}$ である。3 点 0, w, x は直角三角形をなすので、

$$(x, x) = \|x^2\| = \|x - w\|^2 + \|w\|^2 \geq \|w\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 = \left(\frac{(x, y)}{(y, y)}\right)^2 \|y\|^2 = \frac{(x, y)^2}{(y, y)}.$$

(つまり直角三角形で斜辺よりも垂辺の方が短いということである。) これから

$$(x, x)(y, y) \geq (x, y)^2.$$

また等号は $(x - w, x - w) = 0$ つまり $w = x$ のときである。このとき x と y は 1 次従属になる。■

2.6 Gram-Schmidt の正規直交化、正規直交基底の存在

一般の次元の線型部分空間への正射影を求めるために、Schmidt の直交化と呼ばれるアルゴリズムを紹介 (復習になる？) しよう。

命題 2.6.1 (Schmidt の直交化) $u_1, \cdots, u_m$ を $\mathbf{R}^n$ の線形独立なベクトルとするとき、

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, \\ v_i &= u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(u_i, v_j)}{(v_j, v_j)} v_j \end{aligned}$$

で $v_1, \cdots, v_m$ を定めることができ、

$$(v_i, v_j) = 0 \quad (1 \le j < i \le m),$$

$$\mathrm{Span}(u_1, \cdots, u_i) = \mathrm{Span}(v_1, \cdots, v_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

証明 (CG 法の解説に書いてある。持って来よう。) ■

命題 2.6.2 (Gram-Shimidt の正規直交化) $u_1, \cdots, u_m$ を $\mathbf{R}^n$ の線形独立なベクトルとするとき、

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, \quad w_1 = \frac{1}{\sqrt{(v_1, v_1)}} v_1, \\ v_i &= u_i - \sum_{j=1}^{i-1} (u_i, w_j) w_j, \quad w_i = \frac{1}{\sqrt{(v_i, v_i)}} v_i \quad (i = 2, 3, \cdots, m) \end{aligned}$$

で $w_1, \cdots, w_m$ を定めることができ、

$$(w_i, w_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le j, i \le m),$$

$$\mathrm{Span}(u_1, \cdots, u_i) = \mathrm{Span}(w_1, \cdots, w_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

系 2.6.3 (正規直交基底の存在) $\mathbf{R}^n$ の任意の線型部分空間 V に対して、V の正規直交基底が存在する。すなわち

$$\exists v_1, \cdots, v_m \in V \quad \text{s.t.} \quad V = \mathrm{Span}(v_1, \cdots, v_m) \quad \text{and} \quad (v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i \le j \le m).$$

2.7 QR 分解

系 2.7.1 (QR 分解) (準備中)

証明 (準備中) ■

注意 2.7.2 (QR 分解のアルゴリズム) 上の定理の証明は構成的であり、QR 分解のアルゴリズムを与えているが、浮動小数点演算のような丸め誤差を伴う計算で遂行する場合には、誤差が大きくなり過ぎて実用的なアルゴリズムではないと言われている。実用的なアルゴリズムについては、例えば杉原・室田・森 [7] などを参照せよ。

2.8 正規直交基底の応用 (1) — 線型部分空間への直交射影 (2)

正規直交基底を用いて正射影の存在を証明しよう。つまり解きかけだった例題 2 を解決することになる。

命題 2.8.1 (正射影の存在, 射影定理 (projection theorem)) V を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とするとき、任意の $x \in \mathbf{R}^n$ の V への正射影 y が存在する。V の任意の正規直交基底 $v_1, \cdots, v_m$ に対して

$$y = \sum_{j=1}^{m} (x, v_j) v_j$$

と書ける。

証明 V の任意の正規直交基底 $v_1, \cdots, v_m$ を一つ取る。$x \in \mathbf{R}^n$ の V への正射影 y が存在したとすると、それは v_i の線型結合で書けるはずである:

$$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j. \tag{2.3}$$

一方、直交性の条件 $(x - y) \perp V$ も、$\{v_i\}$ を用いて

$$(x - y, v_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

と表わせる。これは

$$(x, v_i) = (y, v_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

ということだが、(2.3) から

$$(y, v_i) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j, v_i \right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (v_j, v_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \delta_{ji} = \lambda_i$$

であるから

$$\lambda_i = (x, v_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

と同値である。よって、

$$y = \sum_{j=1}^{m} (x, v_j) v_j$$

が求める直交射影である。■

x の V への正射影を y とするとき、$z = x - y$ とおくと、

$$x = y + z, \quad y \in V, \quad z \in V^{\perp}$$

が成り立つ。このような分解は一意的である。すなわち

$$x = y' + z', \quad y' \in V, \quad z' \in V^{\perp}$$

とすると

$$y = y' \quad \text{and} \quad z = z'.$$

実際 $y + z = y' + z'$ より

$$y - y' = z' - z$$

でこれは $V \cap V^{\perp} = \{0\}$ に属するので 0 だから。この事実を

$$\mathbf{R}^n = V \oplus V^{\perp}$$

と表わす (もう少していねいに！)。

2.9 直交直和

V_1, V_2 を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間で、互いに直交する ($V_1 \perp V_2$) ものとする。このとき

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2; v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

のことを $V_1 \oplus V_2$ と書き、V_1 と V_2 の **(直交) 直和**と呼ぶ。

$V_1 \oplus V_2$ はいわゆる直和になっている。すなわち、$\forall x \in V_1 \oplus V_2$ は

$$x = v_1 + v_2 \quad (v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2)$$

と書けるが、この v_1, v_2 は一意的に定まる。

証明

$$x = v_1' + v_2' \quad (v_1' \in V_1,\ v_2' \in V_2)$$

と書けたとすると、

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2$$

であるが、左辺は V_1, 右辺は V_2 に属するので、結局は $V_1 \cap V_2$ に属することになり、V_1 と V_2 の直交性よりそれは 0 に他ならない:

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2 = 0.$$

ゆえに $v_1 = v_1'$, $v_2 = v_2'$. ■

注意 2.9.1 有名な斎藤先生の本 [5] では、普通の直和を $V_1 \dot{+} V_2$ と書き、直交直和を $V_1 \oplus V_2$ と書いていたが、後に出た演習書 [6] では両方とも $V_1 \oplus V_2$ と書いていた。

2.10 正規直交基底の応用 (2) — 線型部分空間の直交

懸案の問題を片付けよう。

命題 2.10.1 (直交補空間の次元) V を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とするとき、

$$\dim(V^\perp) = n - \dim V.$$

証明 $\mathbf{R}^n$ の基底 $u_1, \cdots, u_n$ を、最初の m 個 $u_1, \cdots, u_m$ が V の基底になるように取る。これに Gram-Schmidt の正規直交化を施して、正規直交基底 $v_1, \cdots, v_n$ を作ると、$\mathrm{Span}(v_1, \cdots, v_m) = \mathrm{Span}(u_1, \cdots, u_m) = V$ であるから、$v_1, \cdots, v_m$ は V の正規直交基底になる。このとき実は

$$V^\perp = \mathrm{Span}(v_{m+1}, \cdots, v_n)$$

となることはほぼ明らかである。実際、任意の $x \in \mathbf{R}^n$ は

$$x = \sum_{j=1}^n (x, v_j) v_j$$

と展開できるが、

$$x \in V^\perp \quad \Leftrightarrow \quad (x, v_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

であるので、$x \in V^\perp$ ならば $x \in \mathrm{Span}(v_{m+1}, \cdots, v_n)$. つまり $V^\perp \subset \mathrm{Span}(v_{m+1}, \cdots, v_n)$. 逆の $V^\perp \supset \mathrm{Span}(v_{m+1}, \cdots, v_n)$ も簡単。■

これで懸案だった

$$V \text{ が線型部分空間} \quad \Leftrightarrow \quad (V^\perp)^\perp = V \tag{2.4}$$

の証明が完結する。妙にてこずったように思われるかもしれないが、実は無限次元の内積空間の場合には、(2.4) は一般には成り立たない事実なのである。

2.11 直交射影作用素

(この節の内容はまだ練られていない。)

定義 2.11.1 (直交射影作用素) V を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とするとき、

$$Px = x \text{ の } V \text{ への直交射影}$$

で定まる作用素 $P\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を V への**直交射影作用素**と呼ぶ。

命題 2.11.2 (直交射影作用素は巾等な対称線形作用素) $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間 V への直交射影作用素 P は、以下の性質を持つ。

(1) P は線形作用素である。

(2) P は巾等である: $P^2 = P$.

(3) P は対称である: $P^T = P$.

証明

(1) $x_1 \in \mathbf{R}^n$, $x_2 \in \mathbf{R}^n$ $\lambda_1 \in \mathbf{R}$, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ とする。$Px_1 = y_1$, $Px_2 = y_2$ と置こう。仮定から $y_1, y_2 \in V$ かつ $x_1 - y_1 \in V^\perp$, $x_2 - y_2 \in V^\perp$. このとき、$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in V$ かつ

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(x_1 - y_1) + \lambda_2(x_2 - y_2) \in V^\perp.$$

ゆえに

$$P(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 P x_1 + \lambda_2 P x_2.$$

(2) $x \in \mathbf{R}^n$ とするとき、$Px = y$ と置こう。$y \in V$, $x - y \in V^\perp$ である。明らかに $y \in V$, $y - y = 0 \in V^\perp$ であるから、$Py = y$. すなわち $P^2 x = Px$. ゆえに $P^2 = P$.

(3) V の正規直交基底 $v_1, \cdots, v_m$ を取ると

$$(Px, y) = \left(\sum_{j=1}^m (x, v_j) v_j, y \right) = \sum_{j=1}^m (x, v_j)(v_j, y),$$

$$(x, Py) = \left(x, \sum_{j=1}^m (y, v_j) v_j \right) = \sum_{j=1}^m (y, v_j)(x, v_j).$$

ゆえに $(Px, y) = (x, Py)$. これは $P^T = P$ を意味する。 ■

実は $P^2 = P$, $P^T = P$ という条件を満たす P は適当な線型部分空間 V への直交射影作用素になる。

命題 2.11.3 () $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ が $P^2 = P$, $P^T = P$ を満たすとき、

$$V = \{x \in \mathbf{R}^n; Px = x\} = \ker(I - P)$$

で $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間 V を定めると、V への直交射影作用素は P になる。

証明　$V = \ker(I-P)$ は明らかに $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間である。$x \in \mathbf{R}^n$ に対して $Px = y$ とおく。仮定 $P^2 = P$ より、$Py = P(Px) = (PP)x = P^2x = Px = y$ であるから、V の定義によって $y \in V$. また $\forall v \in V$ に対して $Pv = v$ に注意すると

$$(x-y, v) = (x,v) - (y,v) = (x,v) - (Px, v) = (x,v) - (x, Pv) = (x,v) - (x,v) = 0.$$

すなわち $x - y \in V^\perp$. ゆえに y は x の V への直交射影である。■

これから単に $P^2 = P$, $P^T = P$ を満たす $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ のことを直交射影作用素と言っても良いであろう。対応する線型部分空間 V は $\ker(I-P)$ と書けることが分かったが、後のためにもう少し調べておこう。

命題 2.11.4 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ が直交射影作用素であるとき、

$$\ker(I-P) = \{x \in \mathbf{R}^n; Px = x\} = \mathrm{image}\, P.$$

証明　まず

$$\ker(I-P) = \{x \in \mathbf{R}^n; (I-P)x = 0\} = \{x \in \mathbf{R}^n; Px = x\}.$$

明らかに

$$\{x \in \mathbf{R}^n; Px = x\} \subset \mathrm{image}\, P$$

であるが、$P^2 = P$ より $\{x \in \mathbf{R}^n; Px = x\} \supset \mathrm{image}\, P$ も分かる。実際 $y \in \mathrm{image}\, P$ とすると、$\exists x \in \mathbf{R}^n$ s.t. $Px = y$ となるが、$Py = P(Px) = P^2x = Px = y$ であるから $y \in \{x \in \mathbf{R}^n; Px = x\}$. ■

命題 2.11.5 () $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ が直交射影作用素であるとき、$Q \overset{\text{def.}}{=} I - P$ (ただし I は恒等作用素) とおくと、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) Q も直交射影作用素である。

(2) $\mathbf{R}^n = \mathrm{image}\, P + \mathrm{image}\, Q$.

(3) $\mathrm{image}\, P \perp \mathrm{image}\, Q$.

(4) 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して、$x = y + z$, $y \in \mathrm{image}\, P$, $z \in \mathrm{image}\, Q$ となったとすると、実は $y = Px$, $z = Qx$.

証明

(1) Q が巾等かつ対称であることは簡単な計算で分かる。

$$Q^2 = (I-P)^2 = I^2 - IP - PI + P^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q,$$

$$Q^T = (I-P)^T = I^T - P^T = I - P = Q.$$

(2) $I = P + (I-P) = P + Q$ であるから、任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$x = Px + Qx \in \mathrm{image}\, P + \mathrm{image}\, Q.$$

ゆえに $\mathbf{R}^n \subset \mathrm{image}\, P + \mathrm{image}\, Q$. もちろんこれは等号になる。

(3) $x, y \in \mathbf{R}^n$ とするとき、

$$(Px, Qy) = (x, PQy) = (x, P(I-P)y) = (x, Py - P^2y) = (x, Py - Py) = (x, 0) = 0$$

であるから、

$$\mathrm{image}\, P \perp \mathrm{image}\, Q.$$

(4) $x = y + z$, $y \in \operatorname{image} P$, $z \in \operatorname{image} Q$ としよう。$y \in \operatorname{image} P$ より $Py = y$. $z \in \operatorname{image} Q = \ker(I - Q) = \ker P$ より $Pz = 0$. ゆえに $Px = Py + Pz = y + 0 = y$. 同様にして $Qx = Qy + Qz = 0 + z = z$. ■

2.12 Riesz の表現定理

定理 2.12.1 (Riesz の表現定理 (Riesz representation theorem)) f を $\mathbf{R}^n$ 上の線型形式とする。つまり $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は線型写像ということである。このとき適当な $a \in \mathbf{R}^n$ を取ると

$$f(x) = (x, a) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

が成り立つ。

以上が Riesz の表現定理 (の $\mathbf{R}^n$ 版) だが、率直に言って、この定理は $\mathbf{R}^n$ で考えると明らかすぎてアホらしい。実際、$a = (a_1, \cdots, a_n)^T$ とすると、

$$f(x) = (x, a) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

ということだから、

$$a_j = f(e_j), \quad e_j = (\delta_{ij}) \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

と、a の成分は簡単に求まる。しかし、一般の場合にはこの証明は成立せず、逆に一般の場合に成立する証明は以下に見るように大変明快であるので、ここで見ておくことは無駄ではないと思う。

a は平面 $V = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = 0\}$ の法線ベクトルであることに注意しよう。射影定理を使えば V の法線ベクトル u を作ることができる。直感的に a と u が平行であることがわかるので、$a = \lambda u$ となる λ が存在するはずだが、この λ は簡単に求まる。実際、$f(x) = (x, a) = (x, \lambda u)$ に $x = u$ を代入すると

$$f(u) = (u, \lambda u) = \lambda (u, u)$$

であるから

$$\lambda = \frac{f(u)}{(u, u)}.$$

それゆえ、後は

$$f(x) = (x, a), \quad a \overset{\text{def.}}{=} \frac{f(u)}{(u, u)} u$$

が成り立つことをチェックするだけである。

証明 $f = 0$ の場合は明らか ($a = 0$ でよい)。$f \neq 0$ とする。

$$V \overset{\text{def.}}{=} \ker f = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = 0\}$$

とおくと、これは $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間であり、$V \neq \mathbf{R}^n$. 任意の $y \in \mathbf{R}^n \setminus V$ を取って固定し、y の V への直交射影を z として、

$$u = y - z$$

とおく。$u \in V^\perp$ かつ $u \neq 0$ である。$x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$y = x - \frac{f(x)}{f(u)} u$$

とおくと、

$$f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(u)} f(u) = f(x) - f(x) = 0$$

であるから $y \in \ker f = V$. ゆえに $(y, u) = 0$ となるが、

$$(y, u) = \left(x - \frac{f(x)}{f(u)} u, u \right) = (x, u) - \frac{f(x)}{f(u)} (u, u)$$

であるから、

$$\frac{f(x)}{f(u)} (u, u) = (x, u).$$

すなわち

$$f(x) = \frac{(x, u) f(u)}{(u, u)} = \left(x, \frac{f(u)}{(u, u)} u \right).$$

ゆえに

$$a = \frac{f(u)}{(u, u)} u$$

と置けばよい。 ■

第3章　$\mathbf{C}^n$ の内積

Hermite 内積とも呼ぶ。

記号

$\mathbf{C}$ を複素数体とする。
複素数 z に対して、z の複素共役を $\overline{z}$ と表わす。
$\mathbf{C}^n$ を成分が複素数である n 次元のベクトルの全体とする。
$\mathbf{C}^{n\times n}$ を n 次複素正方行列全体とする。
x をベクトルまたは行列とするとき、x の転置を x^T または ${}^t x$ と書く。

第4章　内積空間、Hilbert 空間

4.1　無限次元の線型空間

線型空間が無限次元であるとは。
例。
1 次独立の定義。
基底の定義と存在。
Span$L$ の定義。

4.2　定義

定義 4.2.1 (内積) X を $\mathbf{C}$ 上の線型空間とするとき、写像

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbf{C}$$

が内積であるとは、次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすことである。

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$. 等号は $x = 0$ のとき、そのときに限る。

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

定義 4.2.2 (内積空間) 線型空間とその上で定義された内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の組を内積空間 (inner product space, pre-Hilbert space) と呼ぶ。内積から導かれるノルムに関して Banach 空間であるとき、Hilbert 空間 (Hilbert space) であると言う。

4.3　例

例 4.3.1 () $\mathbf{R}^n$ と Euclid 内積の組は実 Hilbert 空間である。

例 4.3.2 () $\mathbf{C}^n$ と Hermite 内積の組は複素 Hilbert 空間である。

例 4.3.3 (L^2 空間)

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

例 4.3.4 (ℓ^2 空間)

$$\ell^2 \overset{\text{def.}}{=} \{x = (x_1, x_2, \cdots); \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}.$$

4.4 完全正規直交系

定義 4.4.1 (正規直交系, 完全正規直交系) X を内積空間とする。

(1) X の可算部分集合 $\{u_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ が**正規直交系** (**orthonormal system**) であるとは

$$(u_j, u_k) = \delta_{jk}$$

を満たすこと定義する。

(2) X の可算部分集合 $\{u_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ が**完全正規直交系** (**complete orthonormal system**) または**正規直交基底** (**orthonaormal basis**) であるとは、$\{u_j\}$ が正規直交系かつ次の条件を満たすことである: 任意の $x \in X$ に対して、$\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ が存在して、

$$\left\| v - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j \right\| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

が成り立つ。

$\{u_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ が X の正規直交基底であるとき、任意の x に対して、

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\| = 0$$

であるが、もちろん $\alpha_n = (x, u_n)$ である。また

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, u_n)|^2.$$

4.5 Bessel の不等式

定義 4.5.1 (Bessel の不等式) 内積空間 X の正規直交系 $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ があるとき、

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, u_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in X).$$

証明 $x \in X$ とする。任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j$$

は x の $\mathrm{Span}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ への直交射影である。ゆえにピタゴラスの定理から、

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j \right\|^2 + \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j \right\|^2 = \|x\|^2.$$

ゆえに

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j \right\|^2 \leq \|x\|^2.$$

左辺はピタゴラスの定理より

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\langle x,u_j\rangle u_j\right\|^2=\sum_{j=1}^{n}\|\langle x,u_j\rangle u_j\|^2=\sum_{j=1}^{n}|\langle x,u_j\rangle|^2$$

であるから、

$$\sum_{j=1}^{n}|\langle x,u_j\rangle|^2\leq\|x\|^2.$$

これが任意の n について成り立つことから、

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\langle x,u_j\rangle|^2\leq\|x\|^2.\blacksquare$$

内積空間 X において、正規直交系 $\{u_j\}$ と $x\in X$ が与えられたとき、級数

$$\sum_{j}\langle x,u_j\rangle u_j$$

は収束するだろうか？Cauchy 列になることは明らかなので、X が完備ならば収束する。

補題 4.5.2 Hilbert 空間 X の正規直交系 $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ があるとき、任意の $x\in X$ に対して、

$$p=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,u_j\rangle u_j$$

は収束し、これは x の $M:=\overline{\mathrm{Span}\{u_j\}}$ への正射影である。つまり $p\in M$, $(x-p)\perp M$.

4.6 Parseval の等式

4.7 完全正規直交系の存在

定義 4.7.1 (可分) 位相空間 X が**可分** (separable) であるとは、X の可算部分集合 D が存在して、$\overline{D}=X$ が成り立つことである。

命題 4.7.2 () 可分な Hilbert 空間には完全正規直交系が存在する。

証明 X は可分だから稠密な部分集合 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が存在する。これから元を抜いていくことによって、一次独立な部分集合 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が作れる。Schmidt の直交化法によって正規直交系 $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を作ると、

$$(u_i,u_j)=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots),$$

$$\forall n\in\mathbf{N}\quad\mathrm{Span}(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{Span}(u_1,\cdots,u_n).$$

(以下続き) ■

命題 4.7.3 (完全性の条件) Hilbert 空間 X の正規直交系 $\{\varphi_n\}$ について、次の 5 条件 (i) 〜 (v) は互いに同値である。

(i) $V := \mathrm{Span}\{\varphi_n\}$, $M := \overline{V}$ とおくとき、$M = X$.

(ii) $\forall u \in X$ に対して $u = \displaystyle\sum_n \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n$.

(iii) $\forall u \in X$ に対して $\|u\|^2 = \displaystyle\sum_n |\langle u, \varphi_n \rangle|^2$.

(iv) $\forall u, v \in X$ に対して $\langle u, v \rangle = \displaystyle\sum_n \langle u, \varphi_n \rangle \overline{\langle v, \varphi_n \rangle}$.

(v) $\forall u \in X$ について

$$\forall n \quad \langle u, \varphi_n \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0.$$

4.8 射影定理

命題 4.8.1 (射影定理) X を Hilbert 空間、V をその閉部分空間とするとき、任意の $x \in X$ の V の上への直交射影 y が一意的に存在する。

証明 一意性は簡単なので存在だけ示す。

$$\delta = \inf_{z \in V} \|x - z\|$$

とおくと、点列 $(y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in V^{\mathbf{N}}$ で

$$\|x - y_n\| \to \delta \quad (n \to \infty)$$

を満たすものが存在する。中線定理より

$$2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) = \|(x - y_n) + (x - y_m)\|^2 + \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \|y_m - y_n\|^2.$$

$$0 \le \|y_m - y_n\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \le 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\delta^2.$$

$n, m \to \infty$ のとき、右辺 $\to 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0$ に収束するので、$\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は Cauchy 列である。ゆえに

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y$$

が存在する。V が閉であることから $y \in V$. またもちろん

$$\|x - y\| = \min_{z \in V} \|x - z\|.$$

最後に $x - y \perp V$ を確かめよう。任意の $h \in V$ に対して、

$$f(\theta) = \|x - y - \theta h\|^2$$

は $\theta = 0$ で最小値 δ を取る。ゆえに $f'(0) = 0$. ところが

$$f(\theta) = \|x - y\|^2 - 2\theta \mathrm{Re}\,(x - y, h) + \theta^2 \|h\|^2$$

より

$$f'(0) = -\mathrm{Re}\,(x-y, h)$$

であるから

$$\mathrm{Re}\,(x-y, h) = 0.$$

h の代りに ih を用いると

$$0 = \mathrm{Re}\,(x-y, ih) = \mathrm{Re}\,(-i(x-y), h) = \mathrm{Im}\,(x-y, h).$$

ゆえに

$$(x-y, h) = 0.$$

これが任意の $h \in V$ について成り立つことから $x - y \in V^{\perp}$. ■

系 4.8.2 V を Hilbert 空間の閉線型部分空間とするとき、

$$(V^{\perp})^{\perp} = V.$$

証明　■

命題 4.8.3 (凸閉集合への正射影) K を Hilbert 空間 X の凸閉集合とするとき、任意の $x \in X$ に対して、

$$\|x - y\| = \min_{v \in K} \|x - v\|$$

となる $y \in K$ が一意的に存在する。この $y \in K$ は、

$$\mathrm{Re}\,(x-y, v-y) \leq 0 \quad (v \in K)$$

を満たす。

第5章　Lax-Milgram の定理, Stampacchia の定理

5.1　Lax-Milgram の定理

定理 5.1.1 (Lax–Milgram の定理) H を実 Hilbert 空間、$a\colon H \times H \to \mathbf{R}$ を H 上の双線形連続強圧的形式、$\varphi \in H'$ とするとき、以下の (1), (2) が成り立つ。

(1) 次の問題 (W) は一意な解を持つ。

(W) Find $u \in H$ s.t.

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad (v \in H). \tag{5.1}$$

(2) 特に a が対称ならば、(W) の解 u は次の問題 (V) の解としても、特徴づけられる。

(V) Find $u \in H$ s.t.

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \tag{5.2}$$

つまり $u \in H$ に対して (5.1) と (5.2) は同値である。当然、問題 (V) も一意に解ける。

注意 5.1.2

$$F(v) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle$$

とおくと $F'(u) = 0$ は (5.1) で表される。

5.2 Stampacchia の定理

定理 5.2.1 (Stampacchia の定理) H を Hilbert 空間、K を H の空でない凸閉集合、a を H 上の双線形連続強圧的形式、$\varphi \in H'$ とするとき、以下の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 次の問題 (W_S) は一意な解を持つ。

(W_S) Find $u \in K$ s.t.

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad (v \in K) \tag{5.3}$$

(ii) 特に a が対称ならば、(W_S) の解 u は次の問題 (V_S) の解としても、特徴づけられる。

(V_S) Find $u \in K$ s.t.

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \tag{5.4}$$

つまり $u \in K$ に対して (5.3) と (5.4) は同値である。当然、問題 (V_S) も一意に解ける。

注意 5.2.2

$$F(v) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle$$

とおくと $F'(u) = 0$ は (5.2) で表される。

系 5.2.3 $K = u_0 + V = \{u_0 + v; v \in V\}$ ($u_0 \in H$, V: H の閉部分空間) の場合

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad (v \in H) \quad \Longleftrightarrow \quad a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad (v \in H).$$

付 録A　歴史

付 録B　復習

B.1　直和

命題 B.1.1 V_1, V_2 が $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間であるとき、次の 3 条件は同値である。

(i) $V_1 + V_2$ の任意の元を V_1 の元と V_2 の元の和に書く仕方は一意的である。

(ii) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(iii) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

定義 B.1.2 (部分空間の直和) V_1, V_2 が $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ を満たす $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間であるとき、$V_1 + V_2$ は V_1 と V_2 の直和であると呼び、$V_1 \oplus V_2$ と書く。

特に $V_1 \perp V_2$ のとき、明らかに $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ であるから、$V_1 + V_2$ は直和になるが、この場合は直交直和と呼んで区別することがある。

付 録C　マイナーな結果

C.1 分極公式

命題 C.1.1 (von Neumann) ノルム空間 X が内積空間である (X のノルムが X のある内積から導出される) ための必要十分条件は、そのノルムについて中線定理

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (x,\, y \in X)$$

が成り立つことである。

証明　必要性は明らかである。十分性は例えば Yosida [11] を見よ。 ■

C.2 直交射影のちょっと変わった定義

定義 C.2.1 (直交射影, 正射影) X を内積空間、V をその線型部分空間とする。$x \in X$ が

$$x = y + z, \quad y \in V, \quad z \in V^\perp \tag{C.1}$$

と表わされるとき、y を x の V の上への直交射影あるいは正射影と呼ぶ。

結局 y が x の V の上への直交射影であるという条件は、

$$y \in V, x - y \in V^\perp$$

となる (本文と同じ)。

(C.1) を満たす y, z はもし存在するならば一意に決まる。実際

$$x = y + z = y' + z', \quad y, y' \in V, \quad z, z' \in V^\perp$$

とすると、

$$y - y' = z' - z$$

で左辺は V に、右辺は $V^\perp$ に属しているから、自分自身に直交するので、0 でしかありえない:

$$y - y' = z' - z = 0.$$

ゆえに

$$y = y', \quad z = z'.$$

C.3　点と平面の距離

点 x_0 と超平面 $(x - x_*, a) = 0$ との距離 ℓ は、$x_0 - x_*$ の a への正射影

$$\frac{(x_0 - x_*, a)}{\|a\|^2}a$$

の長さであるから、

$$\ell = \frac{|(x_0 - x_*, a)|}{\|a\|}.$$

あるいは超平面を $(x, a) = c$ と表わせば

$$\ell = \frac{|(x_0, a) - c|}{\|a\|}.$$

$\mathbf{R}^2$ では、点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by = c$ との距離は

$$\ell = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$\mathbf{R}^3$ では、点 (x_0, y_0, z_0) と直線 $ax + by + cz = d$ との距離は

$$\ell = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

付 録D　今後書くべきこと

- 完全正規直交系の存在
- 一般の場合の射影定理の証明

関連図書

[1] 入江 昭二, 線形数学 I, II, 共立出版 (1966, 1969).

[2] 岡本 久・中村 周, 関数解析 1, 2, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店 (1997, 199?).

[3] 菊地 文雄, 有限要素法概説, サイエンス社 (1980, 1999).

[4] 菊地 文雄, 有限要素法の数理, 培風館 (1994).

[5] 齋藤(さいとう) 正彦(まさひこ), 線型代数入門, 東京大学出版会 (1966).

[6] 齋藤 正彦, 線型代数演習, 東京大学出版会 (1985).

[7] 杉原 正顯, 室田 一雄, 森 正武(まさたけ), 線形計算, 岩波書店 (1994).

[8] ハイム・ブレジス著, 藤田 宏, 小西 芳雄 訳, 関数解析, 産業図書 (1988).

[9] 中村 周, Fourier 解析, 共立出版 (2003).

[10] 藤田 宏, 黒田 成俊(しげとし), 伊藤 清三, 関数解析 (岩波講座 基礎数学), 岩波書店 (1978).

[11] Kôsaku Yosida, Functional analysis, sixth edition, Springer (1980).