不等式ノート

桂田 祐史

2004 年 7 月 21 日, 2017 年 4 月 30 日

1 初等的な不等式

1.1 凸性

定義 1.1 (凸関数, 狭義凸関数) $\mathbf{R}$ の区間 I で定義された関数 f が

$$\forall a,b \in I, \forall\theta \in (0,1) \quad f(\theta a+(1-\theta)b) \le \theta f(a)+(1-\theta)f(b)$$

を満たすとき、f は凸であるという。また

$$\forall a \in I, \forall b \in I \setminus \{a\}, \forall\theta \in (0,1) \quad f(\theta a+(1-\theta)b) < \theta f(a)+(1-\theta)f(b)$$

を満たすとき、f は狭義凸であるという。

命題 1.2 (2 階導関数の符号と凸性) $\mathbf{R}$ の区間で定義された 2 回微分可能な実数値関数に対して、f が凸であることと $f'' \ge 0$ であることは同値である。また $f'' > 0$ ならば f は狭義凸である。

証明 良く知られているので省略。例えば杉浦 [?] を見よ。■

命題 1.3 $\mathbf{R}$ の区間 I で定義された実数値関数 f が凸ならば、

$$\forall x_1,\cdots,x_n \in I \quad f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

特に f が狭義凸である場合、等号は

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

のとき、そのときに限り成立する。

証明 帰納法による。$n=1$ のときは明らか。n のとき成立すると仮定する。

$$\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\,\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{1}{n+1}\,x_{n+1}$$

であり、$\theta = n/(n+1)$ とおくと $1-\theta = 1/(n+1)$ となることに注意すると、凸性の仮定から、

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right) \le \frac{n}{n+1} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}). \tag{1}$$

帰納法の仮定

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

を使って

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right) &\leq \frac{n}{n+1}\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}+\frac{1}{n+1}f(x_{n+1}) \\ &= \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})}{n+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

特に f が狭義凸の場合は、(1) で等号が成り立つための必要十分条件として、

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=x_{n+1}. \tag{3}$$

また (2) で等号が成り立つための必要十分条件として、

$$x_1=x_2=\cdots=x_n. \tag{4}$$

結局 (2) で等号が成り立つには (3) と (4) が同時に成り立つこと、すなわち

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=x_{n+1}$$

であることが必要十分である。■

1.2 相加平均 $\geq$ 相乗平均

命題 1.4 (非負の数の相加平均は相乗平均より大きいか等しい) $x_1, \cdots, x_n \geq 0$ とするとき、

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

等号は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のとき、そのときに限る。

証明 $f=-\log$ とおくと $f''>0$ であることに注意すれば、前小節の命題より明らか。■

証明 $x_1=(y_1)^2, \cdots, x_n=(y_n)^2$ とおくことにより、

$$\frac{(y_1)^2+(y_2)^2+\cdots+(y_n)^2}{n} \geq \sqrt[n]{(y_1y_2\cdots y_n)^2}$$

を証明すればよいが、同次性から単位球面上で

$$\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{(y_1y_2\cdots y_n)^2}$$

を示せば十分である。そこで

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n) \overset{\text{def.}}{=} (y_1)^2(y_2)^2\cdots(y_n)^2,$$

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n) \overset{\text{def.}}{=} (y_1)^2+(y_2)^2+\cdots+(y_n)^2-1$$

とおき、条件 $g(y)=0$ のもとでの f の最大値を調べる。まず方程式 $g(y)=0$ は単位球面を表わし、これはコンパクトであるから、最大値が存在することが分かる。また

$$\nabla f(y)=2\begin{pmatrix} y_1(y_2)^2\cdots(y_n)^2 \\ (y_1)^2y_2\cdots(y_n)^2 \\ \vdots \\ (y_1)^2(y_2)^2\cdots y_n \end{pmatrix}, \quad \nabla g(y)=2y$$

であるから、条件 $g(y)=0$ のもとでは $\nabla g(y)\neq 0$. ゆえに最大値は必ず Lagrange の未定乗数法で求まる。つまり最大値点 y では $\exists\lambda\in\mathbf{R}$ s.t.

$$\nabla f(y)=\lambda g(y).$$

これを成分で書くと

$$\begin{array}{rcl}(y_1)^1(y_2)^2(y_3)^2\cdots(y_{n-1})^2(y_n)^2 & = & \lambda y_1,\\ (y_1)^2(y_2)^1(y_3)^2\cdots(y_{n-1})^2(y_n)^2 & = & \lambda y_2,\\ \vdots & & \vdots\\ (y_1)^2(y_2)^1(y_3)^2\cdots(y_{n-1})^2(y_n)^1 & = & \lambda y_n.\end{array}$$

明らかに最大値は正であるから、$y_j\neq 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$. ゆえに

$$L\overset{\text{def.}}{=}\prod_{j=1}^{n}(y_j)^2$$

とおくと、

$$\frac{L}{(y_1)^2}=\frac{L}{(y_2)^2}=\cdots=\frac{L}{(y_n)^2}=\lambda$$

これから $(y_1)^2=(y_2)^2=\cdots=(y_n)^2$. 和が 1 である $(g(y)=0)$ から、

$$(y_1)^2=(y_2)^2=\cdots=(y_n)^2=\frac{1}{n}.$$

ゆえに条件 $g(y)=0$ の下での f の最大値は

$$f(y)=\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

これから $g(y)=0$ を満たす任意の y に対して、

$$f(y)\leq\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

ゆえに

$$\sqrt[n]{f(y)}\leq\frac{1}{n}.\blacksquare$$

1.3 Young の不等式

命題 1.5 (Young) $p,\ q\in(1,\infty)$ を互いに共役な指数 (i.e. $1/p+1/q=1$) とするとき、任意の $a,\ b\geq 0$ に対して、

$$ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

等号は $a=b$ のとき、そのときに限り成り立つ。

注意 1.6 この不等式は有名な Hölder の不等式の証明に使われるが、今一つ分かりにくい。$p=2$ の場合は

$$ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

という、分りやすく、高校生でも容易に証明できる不等式になる。ちなみに $p=3,\ q=3/2$ のような場合も簡単に (因数分解で) 証明できる。やってみることを勧める。

証明　二階導関数を調べることにより、$-\log$ は狭義凸であることがわかるから、

$$-\log\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)\le-\left(\frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q\right)=-\log ab.$$

すなわち

$$\log ab\le\log\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right).$$

ゆえに

$$ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.\blacksquare$$

1.4　良く出てくるが名前を知らない不等式

命題 1.7 $a,b\ge 0$, $p\ge 1$ のとき、

$$a^p+b^p\le(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

(多くの本で $a^p+b^p\le(a+b)^p\le 2^p(a^p+b^p)$ という (緩い) 不等式が使われている。確かにその方が証明は簡単で、それで十分の場合がほとんどである。)

証明　$p=1$ のときは

$$a+b\le a+b\le a+b$$

という自明な式なので、以下 $p>1$ とする。$b=0$ ならば、やはり

$$a^p\le a^p\le 2^{p-1}a^p$$

という自明な式になるので、以下 $b>0$ とする。関数 $f\colon[0,\infty)\to\mathbf{R}$ を

$$f(x)=\frac{x^p+b^p}{(x+b)^p}$$

で定義する。

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x+b)^p\cdot px^{p-1}-p(x+b)^{p-1}\cdot(x^p+b^p)}{(x+b)^{2p}}\\&=\frac{p(x+b)^{p-1}}{(x+b)^{2p}}\left[(x+b)x^{p-1}-(x^p+b^p)\right]\\&=\frac{pb(x+b)^{p-1}}{(x+b)^{2p}}\left(x^{p-1}-b^{p-1}\right)\end{aligned}$$

であるから、f は b で最小値を取ることが分かる。

$$f(0)=\frac{b^p}{b^p}=1,\quad f(b)=\frac{b^p+b^p}{(b+b)^p}=\frac{2b^p}{2^pb^p}=2^{1-p},$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\left(\frac{x}{b}\right)^p}{\left(1+\frac{b}{x}\right)^p}=1$$

であるから、

$$2^{1-p}\le f(x)\le 1.$$

ゆえに

$$2^{1-p}\le\frac{x^p+b^p}{(x+b)^p}\le 1.$$

分母を払って

$$x^p+b^p\le(x+b)^p\le 2^{p-1}(x^p+b^p).\blacksquare$$

蛇足　(別証) 右側の不等式は、$x \mapsto x^{1/p}$ が「上に凸」であるから、

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \le \frac{a^p+b^p}{2}$$

となるので、両辺に 2^p をかけて得られる。

左側の不等式は簡単な証明があるのかな。地道にやるには、

$$f(x) := (x+b)^p - x^p - b^p \quad (x \in [0,\infty))$$

が単調増加であり、$f(0)=0$ であるから、$f(x) \ge 0$ とする。

右側の緩い方の不等式は

$$(a+b)^p \le (2\max\{a,b\})^p = 2^p \max\{a^p,b^p\} \le 2^p\left(a^p+b^p\right)$$

のように証明出来る。■

1.5　Jensen の不等式

(作業中)

1.6　Schwarz の不等式

「内積空間ノート」に詳しく書くので、この小節の命題の証明は省略する。

$\mathbf{C}^n$ における Schwarz の不等式は、以下のようになる。

$$\left|\sum_{j=1}^n a_j b_j\right|^2 \le \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2$$

等号は $a=(a_j)$ と $\bar{b}=\left(\overline{b_j}\right)$ が 1 次従属であるとき。

この不等式の無限級数バージョンもある。

$$\left|\sum_{n=1}^\infty a_n b_n\right|^2 \le \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 \sum_{n=1}^\infty |b_n|^2$$

等号は $a=(a_n)$ と $\bar{b}=\left(\overline{b_n}\right)$ が 1 次従属であるとき。これはいわゆる ℓ^2 における Schwarz の不等式である。

2　Hölder の不等式

測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ があるとき、$f\colon X \to \mathbf{C}$, $p \in [1,\infty]$ に対して、

$$\|f\|_{L^p} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \operatorname{ess.sup}_{x\in X}|f(x)| = \inf\{U; |f(x)| \le U \quad \text{a.e. on } X\} & (p=\infty) \end{cases}$$

とおく。

与えられた p に対して

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

を満たす q を p の**共役指数**と呼ぶ。ただし $1/\infty = 0$ とみなし、1 の共役指数は ∞, ∞ の共役指数は 1 と考える。

Young の不等式から

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \frac{1}{p}\int_X |f(x)|^p d\mu(x) + \frac{1}{q}\int_X |g(x)|^q d\mu(x)$$

という評価が得られるので、L^p の元と L^q の元の積は可積分になることが分かる。

定理 2.1 (Hölder) $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, $g \in L^q(X, \mathcal{B}, \mu)$ に対して、

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}{}^{1/p}\|g\|_{L^q}{}^{1/q}.$$

証明 まず $p = 1$ または $p = \infty$ の場合は明らかであることに注意する。以下 $1 < p < \infty$ とする。また $\|f\|_{L^p} = 0$ または $\|g\|_{L^q} = 0$ の場合も明らかであるので、以下 $\|f\|_{L^p} \neq 0$ かつ $\|g\|_{L^q} \neq 0$ とする。Young の不等式から

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}{}^{1/p}}\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}{}^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}}$$

となるので、

$$\frac{\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x)}{\|f\|_{L^p}{}^{1/p}\|g\|_{L^q}{}^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{\int_X |f(x)|^p d\mu(x)}{\|f\|_{L^p}{}^{1/p}} + \frac{1}{q}\frac{\int_X |g(x)|^q d\mu(x)}{\|g\|_{L^q}{}^{1/q}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ゆえに

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}{}^{1/p}\|g\|_{L^q}{}^{1/q}. \blacksquare$$

系 2.2

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}$$

$$\sum_{i=1}^\infty |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^\infty |b_i|^q\right)^{1/q}$$

命題 2.3 $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ で、

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1$$

ならば $f := f_1 \cdots f_k$ は $L^p(\Omega)$ に属し、

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

3 Minkowski の不等式

f, g が $L^p(X)$ に属するならば $f + g$ もそうなることは、

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

という簡単な評価から分かるが、L^p ノルムが凸不等式

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

を満たすことの証明には、より精密な議論、すなわち Hölder の不等式を使う。

定理 3.1 (Minkowski の不等式) $1 \le p \le \infty,\ f,\ g \in L^p(X)$ とするとき、

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

証明 $p=1$ または $p=\infty$ のときは明らか。以下 $1<p<\infty$ とする。p の共役指数を q とするとき、$(p-1)q=p$ となることに注意すると[1]、

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu(x) &= \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|d\mu(x) \\
&\le \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|d\mu(x) \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|d\mu(x) \\
&\le \left(\int_X |f(x)+g(x)|^q\right)^{1/q} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\int_X |f(x)+g(x)|^q\right)^{1/q} \left(\int_X |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

割り算して

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1-1/q} \le \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

$1-1/q=1/p$ に注意すれば、

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \le \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}. \blacksquare$$

[1] $1/p+1/q=1$ より $1/q=1-1/p=(p-1)/p$ ゆえ $p=(p-1)q$.