Fourier 級数の収束の様子

桂田 祐史

2009 年 12 月 27 日

公開版http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/fourier-series-convergence-p.pdf, 内輪向け版http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/members/pdf/Katsurada/fourier-series-convergence.pdf

1　3 つの関数の Fourier 級数展開

f, g, h は周期 2π の関数で、$(-\pi,\pi]$ で次のように与えられているとする。

$$f(x)=|x| \quad (x\in(-\pi,\pi]),$$
$$g(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1 & (x\in(0,\pi]) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x\in(-\pi,0)),\end{cases}$$
$$h(x)=\delta(x)-\delta(x-\pi).$$

つまり

$$h(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n\delta(x-n) \quad (x\in\mathbf{R})$$

ということである。

この関数 f, g, h の選択は、藤田 [**?**] による。

$$f'=g,\quad g'=h$$

になっていることに注意しよう。

Fourier 級数展開はそれぞれ

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right),$$

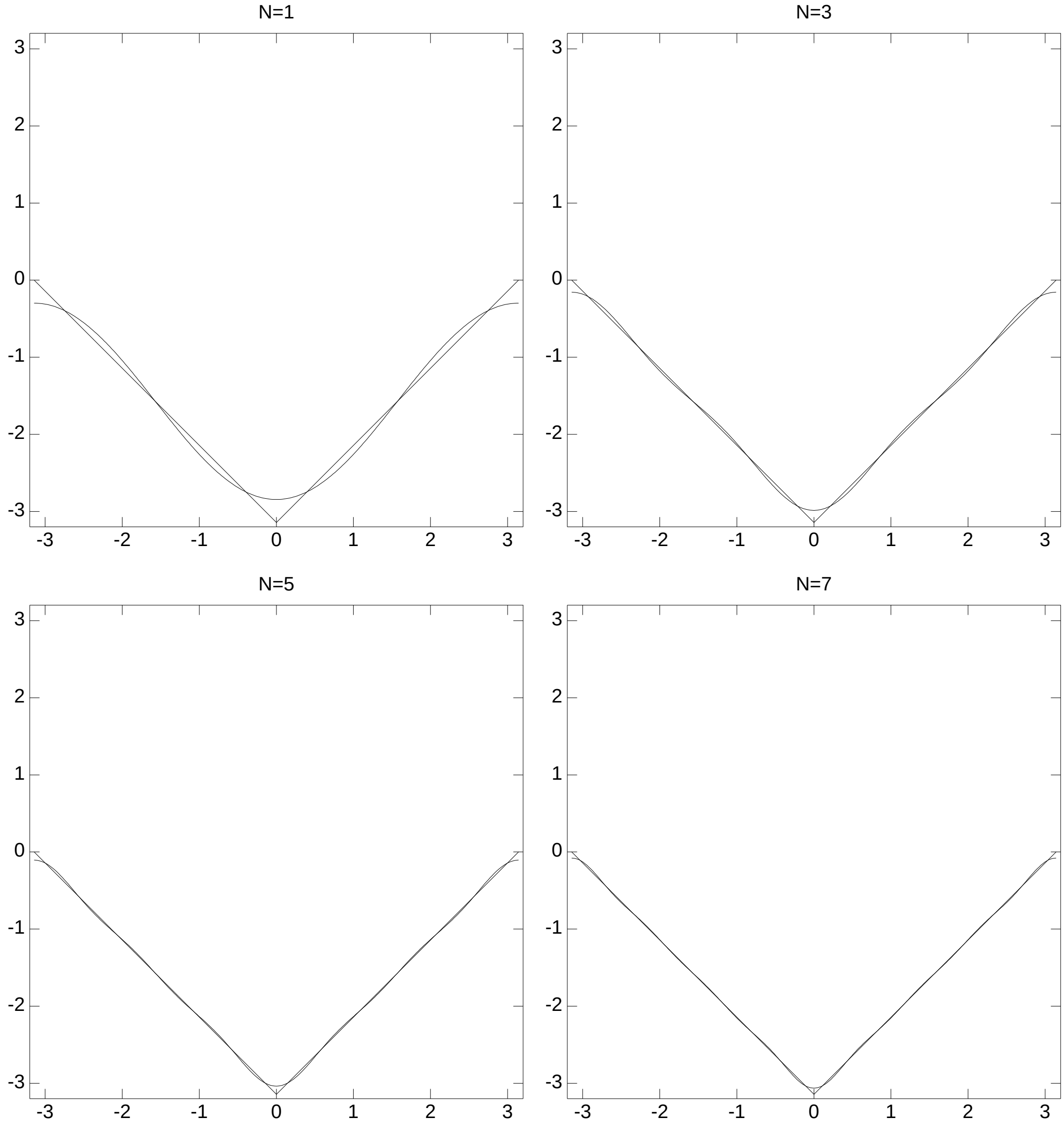
$$g(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right),$$

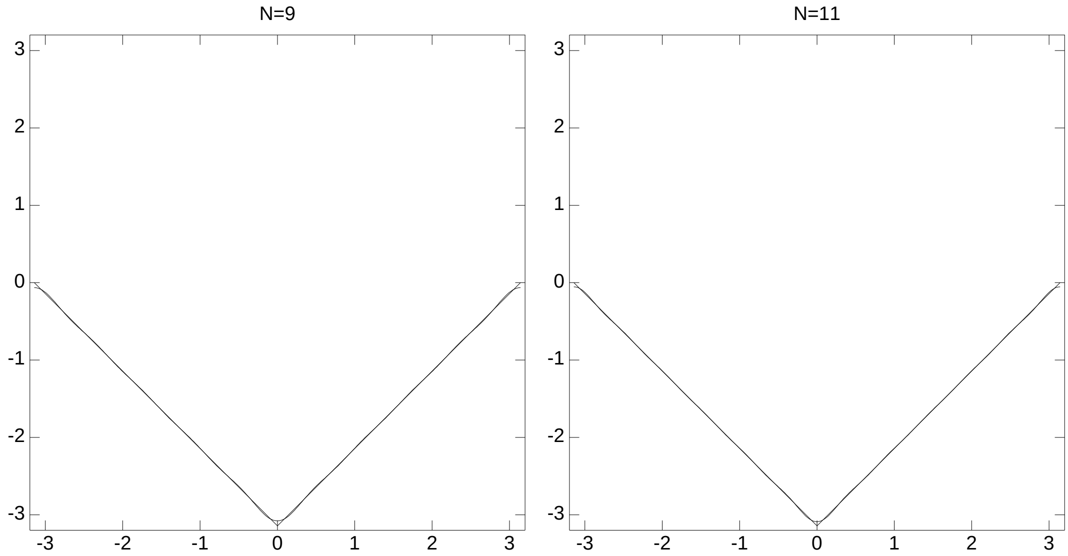
$$h(x) = \frac{4}{\pi}(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots)$$

である。

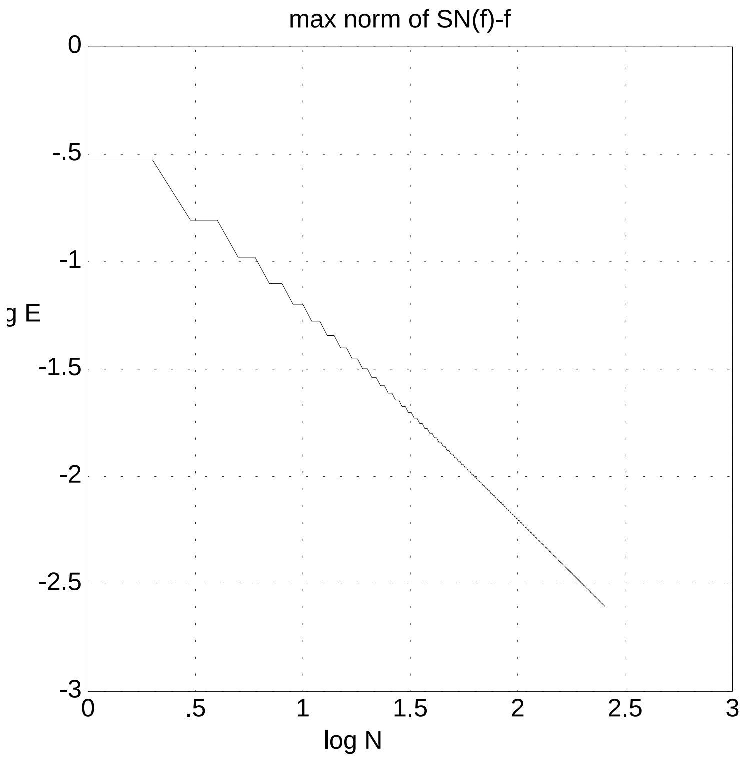
1.1 f の Fourier 級数の収束の様子

f は連続で区分的に C^1 級 (というか C^∞ 級である) なので、f の Fourier 級数は一様に絶対収束して f に等しい。

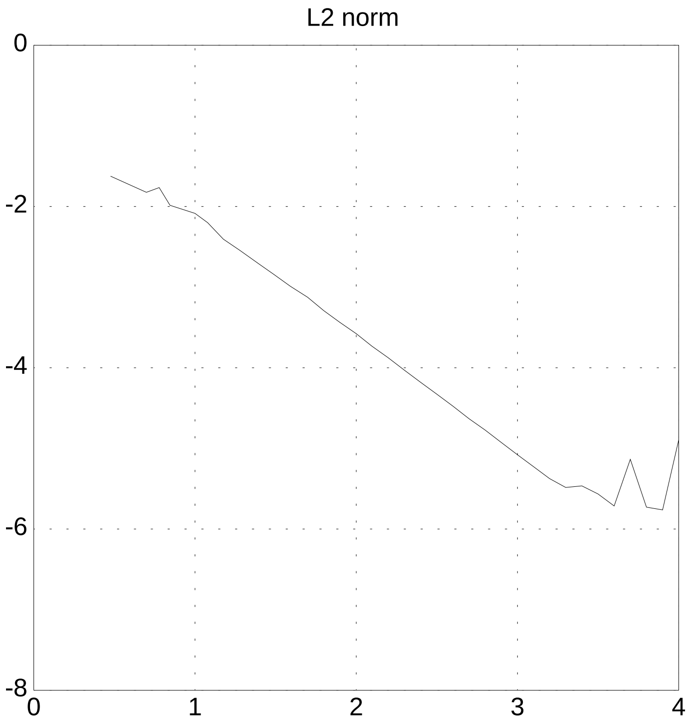




一様収束を確かめるために、最大値ノルムでの距離を測ってみると次のようになる。



ちなみに $L^2(-\pi,\pi)$ ノルムでは次のようになる。



1.2 g の Fourier 級数の収束の様子

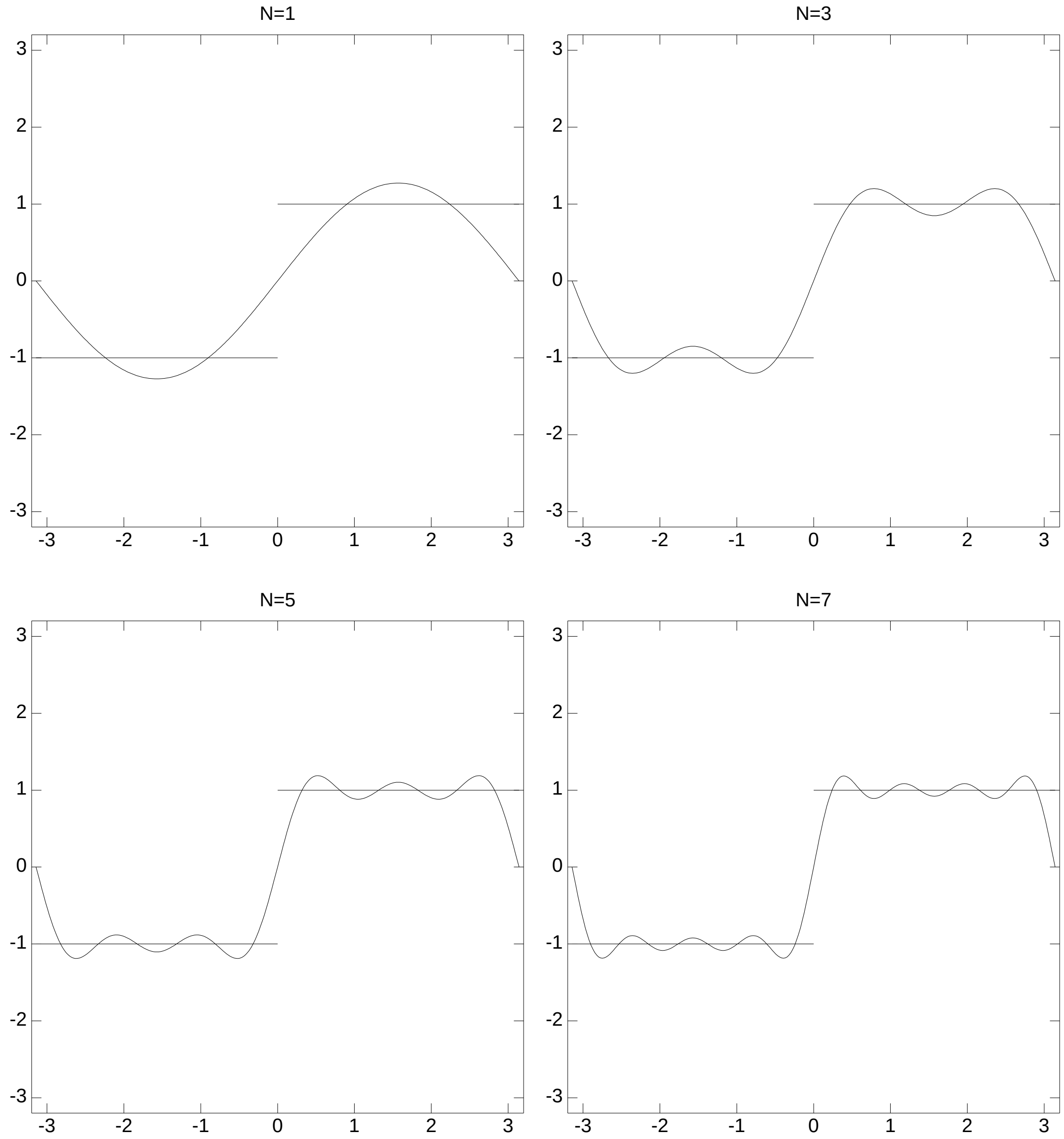
g は区分的に C^1 級なので、g の Fourier 級数は至るところ収束して、g の連続点 x では $g(x)$ に等しく、不連続点 x では $\dfrac{g(x-0)+g(x+0)}{2}$ に等しい。$x=0$ では

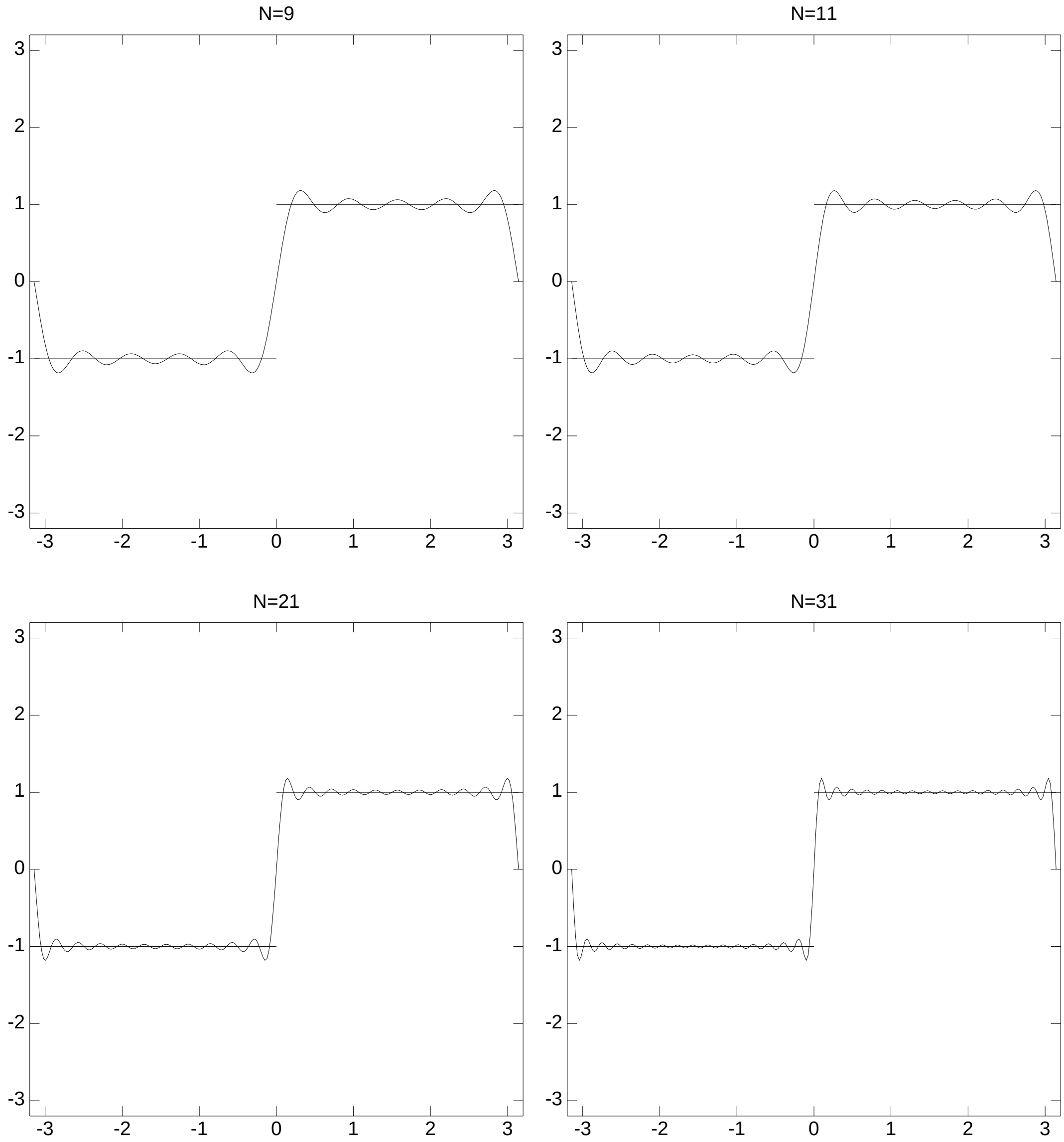
$$\frac{g(x-0)+g(x+0)}{2} = \frac{g(0-0)+g(0+0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 = g(0),$$

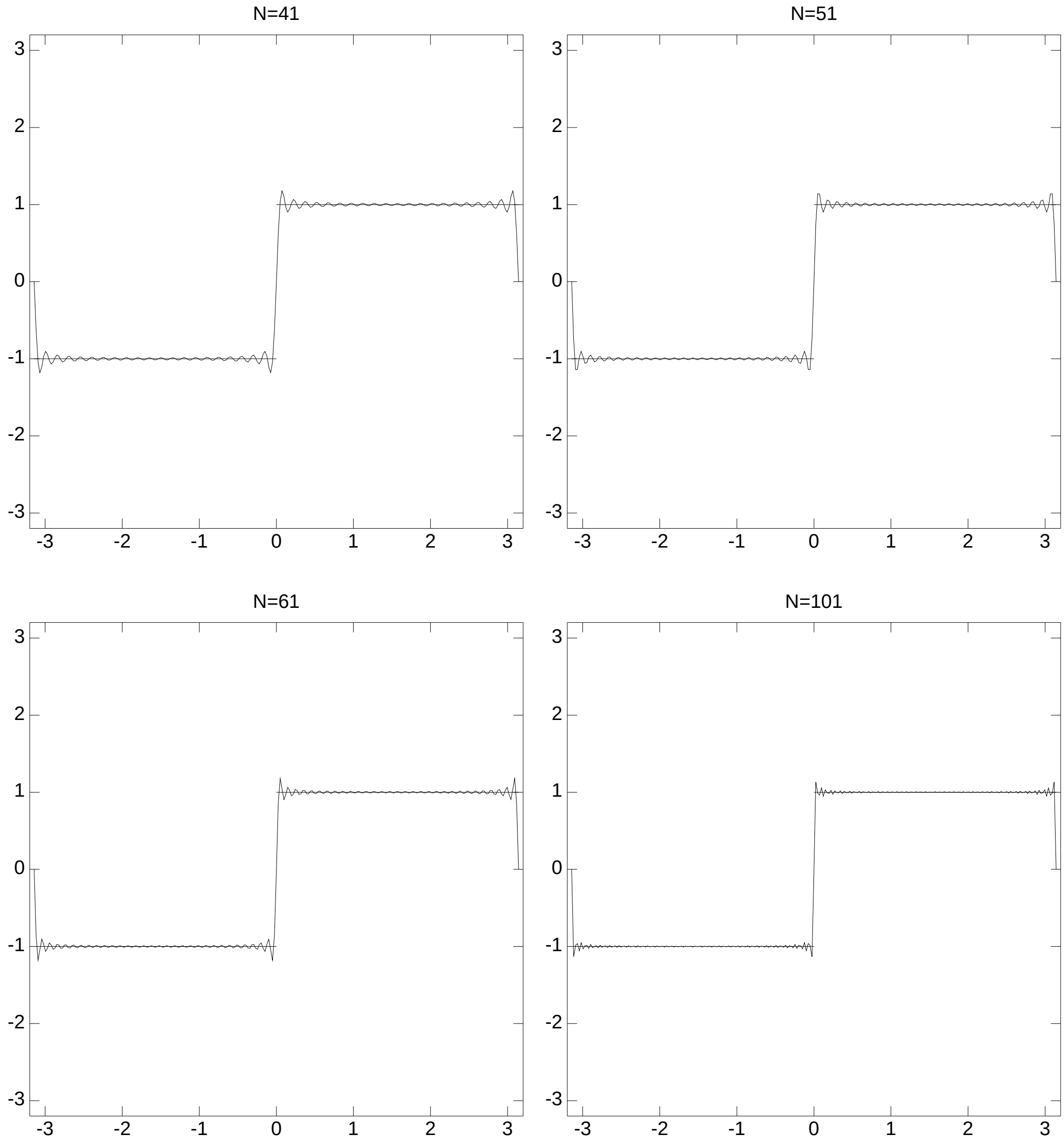
$x=\pi$ では、

$$\frac{g(x-0)+g(x+0)}{2} = \frac{g(\pi-0)+g(\pi+0)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0 = g(\pi)$$

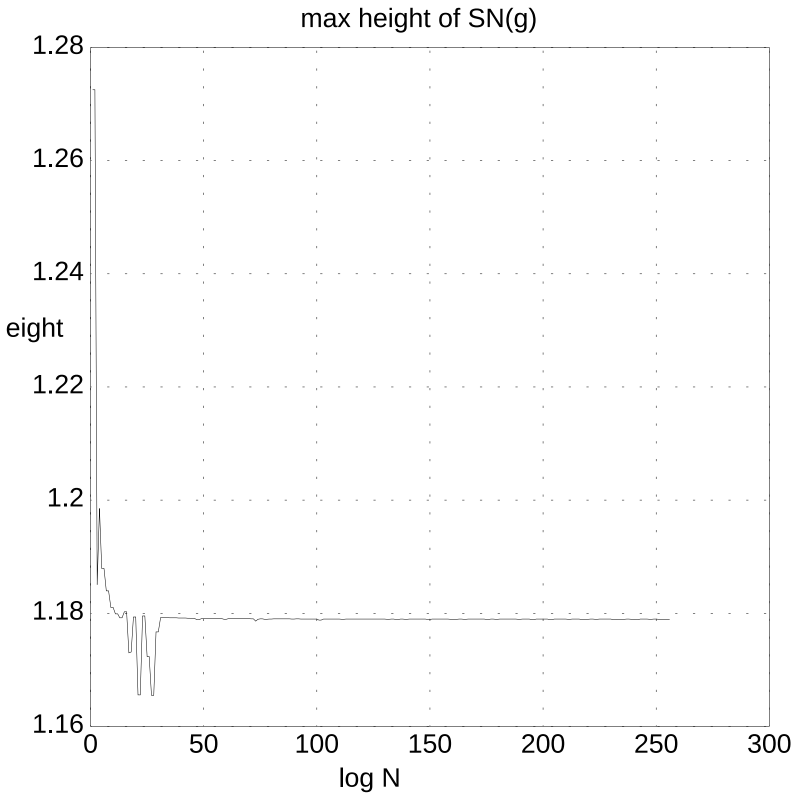
であるから、Fourier 級数は至るところ収束して g に等しい。しかし不連続であるので、**Gibbs** の現象 (後述) が生じて一様収束はしないはずである。


N=1
N=3
N=5
N=7

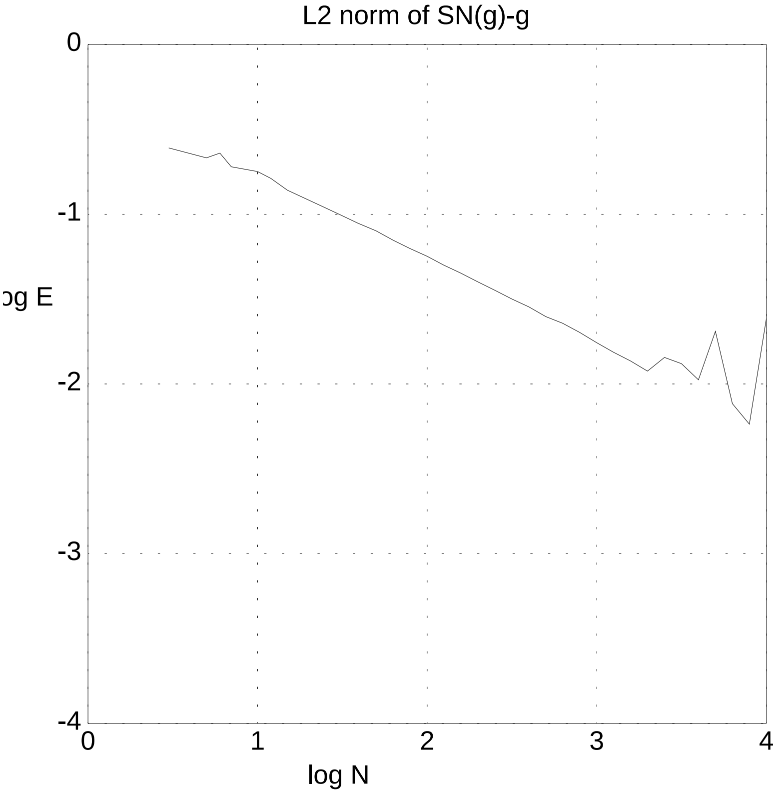

N=9
N=11
N=21
N=31
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3 -2 -1 0 1 2 3



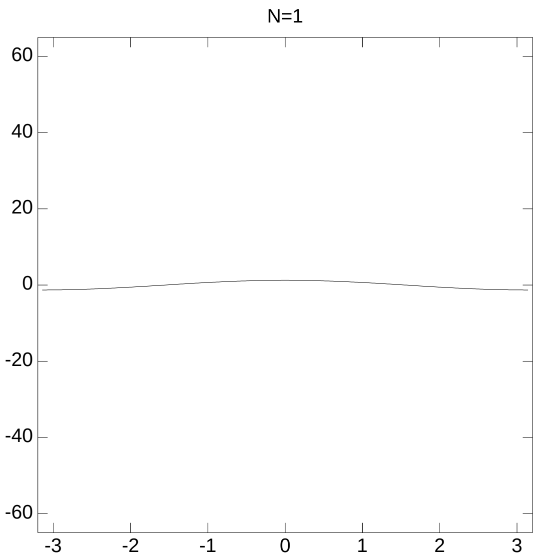
確かに Gibbs の現象が現れている。特に一様収束はしていない。Fourier 級数の部分和の最大値を調べると次のようになる。

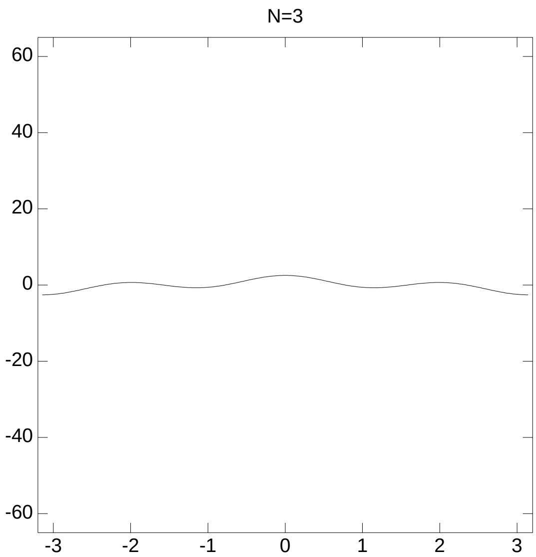


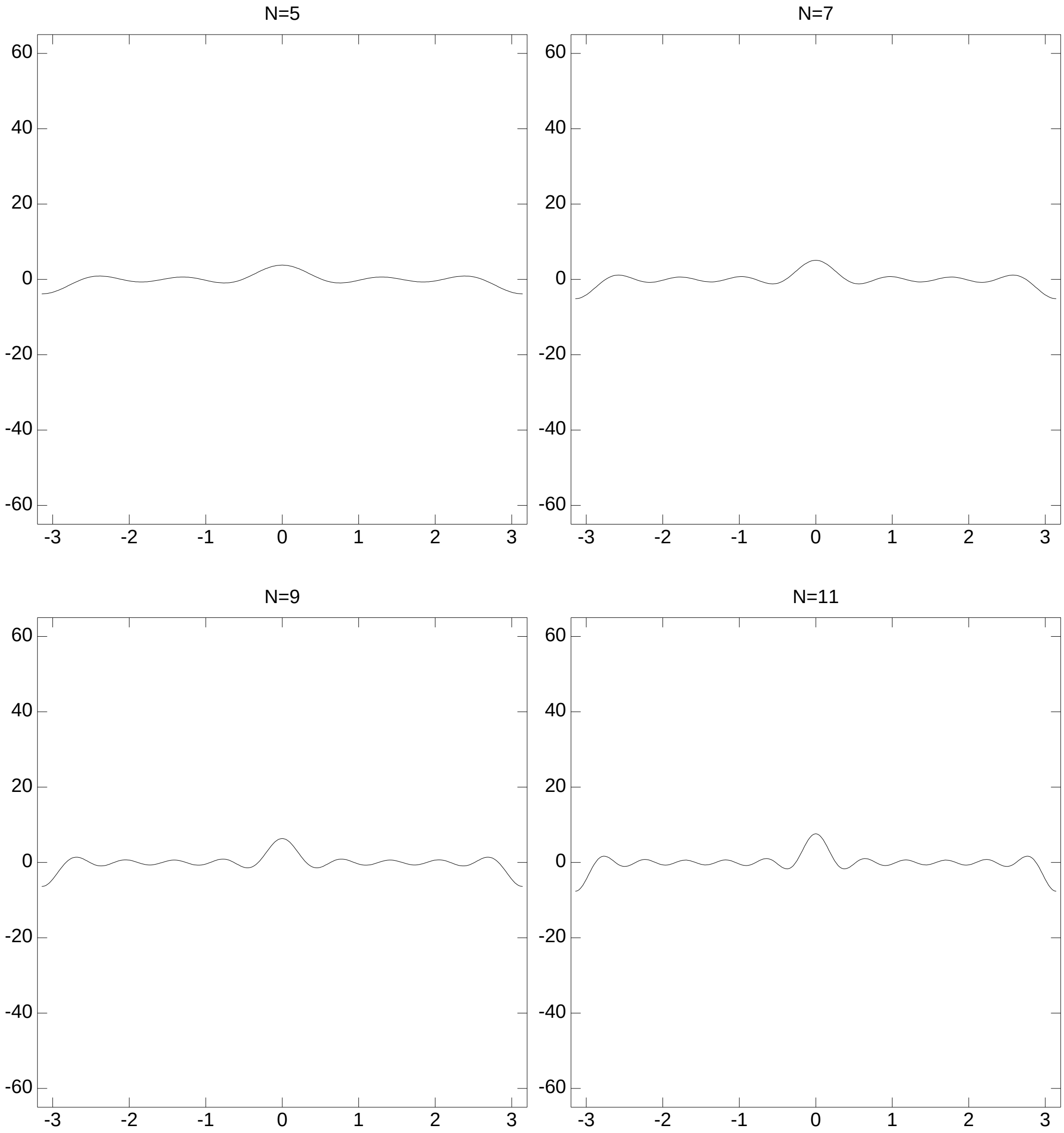
g は $L^2(-\pi, \pi)$ に属するので、L^2 では Fourier 級数は収束している。



1.3 h の Fourier 級数の収束の様子






N=5
N=7
N=9
N=11
60
40
20
0
-20
-40
-60
-3
-2
-1
0
1
2
3