常微分方程式の初期値問題の解の延長

桂田 祐史

2022 年 3 月 19 日, 2022 年 5 月 7 日

こけつまろびつ　… もう一息かな (まだあまり整理できていません)

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/continuation_of_solution.pdf

目 次

1 はじめに

1.1 この文書の目指すところ

D を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ の領域または閉領域とする[1]。$f\colon D\to\mathbb{R}^n$ は連続で、微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{1a}$$

[1]領域とは連結開集合のこと。また閉領域とは、ある領域の閉包になっている集合のこと (D が閉領域とは、ある領域 Ω が存在して、$D=\overline{\Omega}$ が成り立つこと)。

に初期条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{1b}$$

を課した初期値問題について、解の延長性定理を考える。

初期時刻 (初期条件に現れる t の値, ここでは t_0 のこと) の十分近く (ある正の数 δ に対して、$t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ を満たす範囲) では解 (いわゆる局所解) が存在する、という定理があるわけだが、それだけでは満足できない。出来る限り広い範囲での解の存在を保証してほしい。

そのため解の延長性定理と呼ばれる定理がある。延長性定理は、微分方程式の問題にまじめに取り組むと、頻繁に必要になるにもかかわらず、きちんと書いてあるテキストが意外と少ない[2]。

ここではまず素朴な検討をしてみる。新たな初期条件

$$x(t) = x(t_0 + \delta)$$

を課した初期値問題を考えることで、もう少し先まで ($[t_0, t_0 + \delta + \delta']$ まで) 解を延ばすことができる。素朴に考えると、これを続けることで、どこまでも解を延ばすことが出来そうだが、$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$ のようなことが起こって、有限の限界 T があるかもしれない ($t_0 + \delta + \delta' + \delta'' + \cdots = T < +\infty$ — 正の数を足し続けても、限りなく増えるわけではない)。

解の延長不能性については、次の例がよく知られている。

例 1.1 常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

は変数分離形なので容易に解ける。これに

$$x(0) = a \quad (a \text{ は正定数})$$

という初期条件をつけた初期値問題の解は

$$x(t) = \frac{1}{1/a - t} \quad (t \in (-\infty, 1/a)).$$

$\lim_{t \to 1/a - 0} x(t) = +\infty$ となっている。このように解の大きさが無限大に発散することを**解の爆発**、そのときの変数の値 (ここでは $1/a$) のことを**爆発時刻**とよぶ。$t \geq 1/a$ の範囲まで解を延長することは不可能であることに注意しよう。■

解の延長性定理は、しばしば次のように説明される。

> 初期値問題 (3a), (3b) の解は、解が f の定義域 D の境界に近づくまで延長できる。ただし、$[t_0, +\infty)$ まで解が延ばせる場合や、$\lim_{t \to T} \|x(t)\| = +\infty$ (爆発) となる場合も、解が境界に近づいたとみなす。

この説明はやや曖昧で、初学者を混乱させかねない (特に「ただし」の後)。きちんと書く必要があるだろう。

(復習) $D \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、D の**境界**とは

$$\partial D := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \wedge B(x; \varepsilon) \cap (D^{\complement}) \neq \emptyset \right\}$$

のことを言う[3]。また ∂D の要素のことを D の**境界点**と呼ぶ。例えば $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ のとき、$\partial D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$.

[2] 局所解の存在や一意性については、どういう定理を提示するかについて相場があるが、解の延長については文献によりまちまちである。今回、コディントン・レヴィンソン [1], 高野 [2], 竹之内 [3] を参考にした。

[3] 式は一見複雑そうだが、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B(x; \varepsilon)$ が D と $D^{\complement}$ の両方と交わる、ということである。

1.2 楽屋裏の諸事情

常微分方程式の初期値問題の話をしていて、解の存在と一意性の話は有名であるが、「そういうのばかりやるのはおかしい」という意見もあって、意外と正面から説明されないことが多い。

私自身も、最初は例をたくさん見ることが大事だから、入門講義では解ける方程式の話をたくさんするのが良いと考えている。ところでそこから前進しようとすると、解の存在と一意性の話は避けて通れない。それを怠ると途端に論理性なしの “お話” に落ちてしまう。

解の一意性については、「**連続かつ (x についての) 局所 Lipschitz 条件を満たせば一意性が成立**」という定理と系「**C^1 級ならば一意性が成立**」が有名である。それ以外の一意性定理もいくつかあるが、そういうものに手を出すよりも、一意性から導かれることがたくさんあるのを理解することが重要である。代入して解であることを証明すれば (他に解はないのだから) 十分とか、解曲線 (解のグラフ) や解軌道は “交わらない[4]” とか、解軌道で囲まれた領域からは飛び出せないとか。

解の存在については「**連続であれば解が存在する**」という定理があるわけであるが、これも注意が必要である。誤解しない・させないために「**連続であれば局所解が存在する**」というべきだと信じる[5]。大抵の人は「解」という言葉を聞いたとき・見たとき、むしろ後述する「**最大延長解**」のように考えるのではないだろうか。そういう訳で最大延長解の説明は必須であろう。(局所解と最大延長解の違いを理解することが重要である。)

すると、最大延長解が最初に考えた時間の範囲で存在することの判定法が重要である。そのためには、その**解のグラフの上で f が有界であるか**チェックするのが本質的なようだ。それを私に教えてくれたのは、コディントン・レヴィンソン [1] であった。

この文書では、以下の 3 つの定理を述べる。

(a) (解の一意性が成り立つ場合に) 最大延長解が存在する。

(b) 解が $[t_0,t_1)$ $(t_1<+\infty)$ で存在して、$\{(t,x(t)) \mid t\in[t_0,t_1)\}$ で f が有界ならば $x_1:=\lim_{t\to t_1}x(t)$ が存在する。$[t_0,t_1]$ まで

(c) (b) で (t_1,x_1) が D の内点ならば、解は t_1 を超えて延長できる。

1.3 少し考えて整理

まず、かなり一般的な状況下で、最大延長解が存在することが証明できる (解の一意性があるならば、証明は簡単である)。それは抽象的ではあるが、頭の中が整理されてスッキリする。解の一意性がなくても成立しそうに思うが、私には証明は思いつかない[6](高橋陽一郎先生の本 [4] に書いてあった「Zorn の補題を使う」というのはこの辺のことを言っているのだろうか??)。

応用を考えると、最大延長解の存在以外に何が分かれば良いだろう？私自身は $D=I\times\Omega$ (I は区間) のとき、解が I 全体で存在するか、特に力学系で $I=[t_0,+\infty)$ の時 $t=+\infty$ まで解があるかに興味がある。

---

[4] 共有点が 1 つでもあれば、ぴたーっと一致してしまう。

[5] 定理の書き方によっては、そのように感じられないことがあるかもしれない。学び始めた頃の私自身がそうであった。$\|f\|\le M$ という条件が出て来たりするわけであるが、実際上は大域的に f が有界であることは少ないので、まず範囲を制限して (連続性を活用して) M を求め、必要ならばさらに時間の範囲を絞って、ということになるだろう。それは局所的に考えていることに他ならない。

[6] というか、考えることをサボっている。

$I = [t_0, +\infty)$ のとき、解が I 全体で存在する場合があるのは自明である、というよりも、むしろそれが "普通" で、それ以外の場合の例をあげなさいと言われて詰まる人が多そうだ。(このとき $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ がどうなるかについては、色々な場合がある)。

有限の T $(t_0 < T < +\infty)$ が存在して、解 $x(t)$ が $[t_0, T)$ で存在するが、T を超えて延長できないことがある。どういう場合があるか考えよう。$\lim_{t\to T-0} x(t)$ を考えることが役に立つ。

$x_\infty := \lim_{t\to T-0} x(t)$ が存在することがある。その場合は、$x_\infty \in \partial\Omega$ である。なぜなら、もしも $x_\infty \in \Omega^\circ$ (内部)　であれば、最大延長解は $[t_0, T]$ における解になり (細かい話のようであるが、コディントン・レヴィンソン [1] にていねいな証明が載っている — 重要とみなしているのであろう)、$x(T) = x_\infty$ という初期条件で初期値問題を解いた解と合わせることで、最大延長解 $x(t)$ が $t > T$ まで延長できてしまい、最大延長解であることに矛盾するからである。

$\lim_{t\to T-0} x(t)$ が存在しないこともある。分かりやすい例として、いわゆる爆発がある。$\lim_{t\to T-0} \|x(t)\| = +\infty$ ということであるが、これは f が有界な関数ではおこらないことに注意しよう ($\because \|x(t) - x(t_0)\| \le \sup_{s\in[t_0,T]} \|f(t, x(t))\| \int_{t_0}^{t} ds$)。そうでなくて、いわゆる振動が起こって有限の値に収束しない、ということもある。実はこの場合も、f が有界な関数では起こらない (すぐ後で述べる)。以上の考察から、f **の有界性の重要性**が浮かんでくる。実は次の定理が成り立つ。

定理 1.2 最大延長解 (定義区間が $[t_0, T)$) について、次の (i), (ii) は同値である。

(i) T の近くの解曲線 ($\exists\delta > 0$ $\{(t, x(t)) \mid t \in (T-\delta, T)\}$) で f が有界である。

(ii) $\lim_{t\to T-0} x(t)$ が存在する。

(一般に「収束 $\Rightarrow$ 有界」、それと Weierstrass の最大値定理を結びつけると、(ii)$\Rightarrow$ (i) はすぐ証明できる (直観的にもやさしいと思われる)。(i)$\Rightarrow$(ii) の証明も難しくないが、言われないと気づきにくい。(i) と (ii) が同値と言い切っておくと見通しが良い。この定理から、$t \to T-0$ のとき $x(t)$ が振動して収束しならば f は非有界、が分かる。)

よって、最大延長解の像で f が有界であることが事前に分かり[7]、かつ $\partial\Omega$ に近づかなければ[8]、最大延長解の定義区間は $[t_0, +\infty)$ である。この手順は覚えやすく、比較的適用しやすそうだ。

私自身は、以上のように考えて、一応の納得ができた。納得してみると、必要な定理の多くは、実質的にコディントン・レヴィンソン [1] にほぼきちんと (証明込みで) 書かれているようで、今更ながら [1] の良さを認めることになった。

2　最大延長解

2.1　最大延長解の定義

以下、初期値問題 (3a), (3b) の解とは、その定義域が t_0 を左端とする区間 I で、初期条件 $x(t_0) = x_0$ と、I 全体で微分方程式を満たすような関数 $x(t)$ のことをいう。また、I のことを解 $x(t)$ の定義区間と呼ぶことにする。

[7]例えば f が定義域全体で有界であるとか、解軌道の方程式が得られて、その方程式の解集合 (解軌道を含む) が f の定義域内のコンパクト集合に含まれるので Weierstrass の最大値定理が適用できるとか。

[8]極端な場合、Ω が全空間のとき $\partial\Omega = \emptyset$ なので解軌道は $\partial\Omega$ に近づきようがない。また解軌道の方程式が得られている場合も、$\partial\Omega$ に近づくかどうか判定しやすい。

真に大きな定義区間が存在しないような (それ以上延ばせない) 解のことを**最大延長解**と呼ぶ。例 1.1 の $x(t)=\dfrac{1}{1/a-t}$ $(-\infty<t<1/a)$ は最大延長解である。

2.2　最大延長解の存在証明

高野 [2] §5.3 には、局所解の一意性を仮定した上で、最大延長解を "構成" するという方針による証明が載っている。自然で、おそらく正しいと思われる。その内容を紹介する。

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{3.3}$$

定義 3.2.　$x=x(t)$ が点 (a,b) を通る (3.3) の解であるとは、a を含むある区間 I で定義され

$$x(a)=b \tag{2}$$

を満たす (3.3) の解であるということである。

微分方程式 (3.3) の右辺の $f(t,x)$ が、開集合とは限らない連結集合 $E\subset\mathbb{R}^{n+1}$ において連続で、任意の $(a,b)\in E$ に対して、(a,b) を通る (3.3) の解が局所的にただ 1 つ存在する、と仮定する。(a,b) が E の境界上にあるときには、(a,b) を通る解は $t=a$ の右側あるいは左側にしかないこともありうる。

$(a,b)\in E$ を通る (3.3) の 2 つの解の単独性の仮定から $I_1\cap I_2$ においては $x_1(t)=x_2(t)$ である。したがって

$$x(t)=\begin{cases} x_1(t), & t\in I_1,\\ x_2(t), & t\in I_2,\end{cases}$$

が定義できて、$x(t)$ は区間 $I_1\cup I_2$ における (a,b) を通る (3.3) の解となる。

$S(a,b)$ を (a,b) を通る (3.3) の解 $x=\varphi(t)$ の全体とする。解 φ の定義区間を I_φ と表し

$$I_{ab}=\bigcup_{\varphi\in S(a,b)} I_\varphi$$

とすると、上と同じ理由により区間 I_{ab} における関数

$$x(t)=\varphi(t),\quad t\in I_\varphi,\ \varphi\in S(a,b) \tag{♠}$$

が定義できて、$x(t)$ は (a,b) を通る (3.3) の解である。I_{ab} の定義から I_{ab} を真に含む区間で定義される (a,b) を通る (3.3) の解は存在しない。したがって、このように定義される解を (a,b) を通る (3.3) の**最大延長解**といい、区間 I_{ab} を (a,b) を通る (3.3) の解の**最大存在区間**ということにする。E が開集合の時は最大存在区間は開区間である。

I_{ab} が区間であることの確認。「$I\subset\mathbb{R}$, $I\neq\emptyset$ とするとき、I が区間 $\Leftrightarrow$ $(\forall t_1,t_2\in I\colon t_1<t_2)$ $[t_1,t_2]\subset I$ 」に注意する。$t_0\in I_{ab}$ とする。ある $\varphi\in S(a,b)$ が存在して、$t_0\in I_\varphi$. I_φ は a と t_0 を含む区間であるから、$t_0\geq a$ の場合は $[a,t_0]\subset I_\varphi\subset I_{ab}$, $t_0<a$ の場合は $[t_0,a]\subset I_\varphi\subset I_{ab}$. これから $t_1,t_2\in I_{ab}$, $t_1<t_2$ であれば $[t_1,t_2]\subset I_{ab}$ が分かる。

念のため、(♠) の意味を検討する。これは「任意の $t\in I_{ab}$ に対して、ある $\varphi\in S(a,b)$ が存在して、$t\in I_\varphi$. この φ を用いて $x(t)$ を $\varphi(t)$ であると定める」ということであろう。ところで

φ の取り方は一通りとは限らない。$x(t)$ を $x(t)=\varphi(t)$ で定義するわけだが、φ はどれを選ぶのか？どれを選んでも同じだから気にしないで良い、ということである。実際、$\varphi_1, \varphi_2 \in S(a,b)$ が $t \in I_{\varphi_1}$, $t \in I_{\varphi_2}$ を満たすならば、解の単独性の仮定から $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$ が成り立つ。

こうして最大延長解が "構成" された。やや抽象的なため、詳しい情報が直接引き出せることは期待できない。

3　コディントン・レヴィンソンからのいくつかの定理

3.1　まず読んでみる

古典とも言えるコディントン・レヴィンソン [1] の §1.4 を読んでみよう。

f が D で有界 $(|f| \le M < \infty)$ 連続ならば、解 φ (in (a,b)) について

$$\varphi(a+0)=\lim_{t\to a+0}\varphi(t),\quad \varphi(b-0)=\lim_{t\to b-0}\varphi(t)$$

が存在する。実際

$$\varphi(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s))\,ds \quad (t\in(a,b))$$

より $a<t_1<t_2<b$ に対して

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} |f(s,\varphi(s))|\,ds \le M\,|t_2-t_1|\,.$$

これから $t_1, t_2 \to a+0$ とすると、$\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\to 0$ となるので、Cauchy の判定条件から極限 $\varphi(a+0)$ の存在が示せる。この極限 $\varphi(b-0)$ についても同様である。

$(b,\varphi(b-0))$ が領域の内部にあるならば、$\widetilde{\varphi}\colon (a,b]\to\mathbb{R}^n$ を

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(t)&=\varphi(t)\quad (t\in(a,b)),\\ \widetilde{\varphi}(b)&=\varphi(b-0)\end{aligned}$$

で定義すると ($\widetilde{\varphi}$ は $(a,b]$ で連続な関数であることはすぐ分かるが、それだけでなく)、$\widetilde{\varphi}$ は $(a,b]$ で C^1 級の解となる。実際

$$\widetilde{\varphi}(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\widetilde{\varphi}(s))ds \quad (t\in(a,b])$$

が成り立つので、$\widetilde{\varphi}$ の b における左導関数 $\widetilde{\varphi}'_-$ が存在して

$$\widetilde{\varphi}'_-(b)=\widetilde{\varphi}'(b-0)=f(b,\widetilde{\varphi}(b)).$$

この $\widetilde{\varphi}$ を φ の $(a,b]$ への延長と呼ぶ。

たとえば、方程式 $x'=x^2$ の解 $\varphi(t)=-\frac{1}{t}$ は、点 $(-1,1)$ を通り、区間 $(-1,0)$ 上で存在するが、区間 $(-1,0]$ へは延長できない。実際、区間 $(-1,0)$ 上の φ の値は、$f(t,x)=x^2$ が有界であるようなどんな領域 D にもおさまりきらない。

$(a,b]$ まで解が存在するならば、次は $x(b)=\widetilde{\varphi}(b)$ を初期条件として初期値問題を解いて、それを接続することで b を超えた解が得られる。(この辺は簡単と思われるので、詳しいことは省略する。)

定理 3.1 ([1] §1.4 (上巻 pp. 18–20) 定理 4.1) (t,x) 平面の領域 D で $f \in C$ とし、f は D で有界とする。このとき、開区間 (a,b) 上の (E) の解には極限値 $\varphi(a+0)$, $\varphi(b-0)$ が存在する。もしも点 $(a,\varphi(a+0))$ [または点 $(b,\varphi(b-0))$] が D の内部にあれば、解 φ は点 a をこえて左へ (または点 b をこえて右へ) 延長できる。

$$\text{(E)} \qquad x' = f(t,x) \quad \left({}' = \frac{d}{dt}\right)$$

以上は短いけれど、なかなか核心的だ。この定理の拡張は容易である。例えば解曲線があるコンパクト集合に含まれることが分かっているならば、f の連続性から f の有界性が出て (Weierstrass の最大値定理を用いる)、$\displaystyle\lim_{t\to a+0}\varphi(t)$ と $\displaystyle\lim_{t\to b-0}\varphi(t)$ の存在が分かる。

3.2 自分なりに書き直す

3.2.1 f が有界ならば境界点で極限がある

定理 3.2 $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ は連続、$\varphi\colon I = (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$ は連続, $\operatorname{graph}\varphi \subset D$,

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t,\varphi(t)) \quad (t \in I).$$

さらに f が $\operatorname{graph}\varphi$ 上で有界ならば、$\displaystyle\lim_{t\to\beta}\varphi(t)$ が存在する。

もちろん、f が D 全体で有界である場合も、同じ結論が成り立つ。

証明 $t_0 \in I$ を任意に取って固定する。

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))\,ds \quad (t \in I)$$

が成り立つ。これから

$$\|\varphi(t)-\varphi(t')\| \le M\,|t-t'| \quad (t,t' \in I), \quad M := \sup_{(t,x)\in\operatorname{graph}\varphi} \|f(t,x)\|.$$

β に収束する I 内の点列 $\{t_n\}$ を取ると、$\{\varphi(t_n)\}$ は Cauchy 列である。ゆえにある $A \in \mathbb{R}^n$ が存在して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n) = A.$ この A は点列の取り方によらない。実際、β に収束する任意の点列 $\{t'_n\}$ に対して、

$$t''_n := \begin{cases} t_{(n+1)/2} & (n \text{ が奇数}) \\ t'_{n/2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

とおくと、$\{t''_n\}$ はやはり β に収束し、$\{\varphi(t''_n)\}$ は Cauchy 列なので、極限 A'' が存在する。収束列の任意の部分列は共通の極限を持つので、$A'' = A$, また $\{\varphi(t'_n)\}$ も A に収束する。)。これから $\displaystyle\lim_{t\to\beta}\varphi(t) = A$ が成り立つことが分かる (もし成り立たなければ、$t'''_n \to \beta$, $\varphi(t'''_n) \not\to A$ を満たす点列 $\{t'''_n\}$ が存在することが導かれ、矛盾が生じる)。

系として、

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ は連続、$\varphi\colon I = (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ は連続, $\operatorname{graph}\varphi \subset D$,

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (t \in I).$$

さらに $\overline{\operatorname{graph}\varphi}$ がコンパクトで D に含まれるならば、$\lim_{t\to\beta}\varphi(t)$ が存在する。

3.2.2 内点で微分方程式を満たし、境界点でも連続ならば、境界点でも微分方程式を満たす

常微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

と積分方程式

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

の同値性の議論を知っている人にとっては常識的なことを、定理として書いておく。

定理 3.3 x が $[t_0, t_1)$ で連続で、(t_0, t_1) で微分可能で、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= f(t, x(t)) \quad (t \in (t_0, t_1)), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

を満たすならば、x は $[t_0, t_1)$ で微分方程式を満たす。すなわち x は t_0 でも微分可能で

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = f(t_0, x(t_0))$$

を満たす。

証明

$$y(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad (t \in [t_0, t_1))$$

とおくと、y は $[t_0, t_1)$ で C^1 級で、$y'(t) = f(t, x(t))$ $(t \in [t_0, t_1))$. 任意の $t \in (t_0, t_1)$ に対して

$$\frac{d}{dt}(x(t) - y(t)) = f(t, x(t)) - f(t, x(t)) = 0$$

であるから、ある定数が存在して、任意の $t \in (t_0, t_1)$ に対して $x(t) - y(t) = C$. 連続性を使うと $[t_0, t_1)$ で $x(t) - y(t) = C$. $x(t_0) - y(t_0) = x_0 - x_0 = 0$ であるから $C = 0$. ゆえに $[t_0, t_1)$ で $x(t) = y(t)$. ■

全く同様に次の定理が証明できる。

定理 3.4 x が $(t_0, t_1]$ で連続で、(t_0, t_1) で微分可能で、$(t_1, x_1) \in D$,

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \quad (t \in (t_0, t_1)),$$
$$x(t_1) = x_1$$

を満たすならば、x は $(t_0, t_1]$ で微分方程式を満たす。すなわち x は t_1 でも微分可能で

$$\frac{dx}{dt}(t_1) = f(t_1, x(t_1))$$

を満たす。

余談 3.5 区間 I で定義された関数 $x(t)$ が

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

の解であるとは、普通は、全ての $t \in I$ に対して、$(t, x(t))$ が f の定義域 D に属し、x は t で微分可能で、上の微分方程式を満たす、と定義される (ようである — 何冊か本をめくってみた限りでは)。初期値問題の場合、初期条件 $x(t_0) = x_0$ に現れる t_0 は当然定義域 I に属するので、t_0 でも微分方程式を満たすことを要請していることになる。ところが偏微分方程式を考えるときは、微分方程式は内部のみで満たされることを要請するのが普通である。例えば

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (x \in (0, 1),\ t > 0).$$

実は常微分方程式についても、初期値問題を考える場合は、内部で微分方程式を満たすことから境界点でも満たすことが導かれることが、上の定理によって分かる。ゆえに、微分方程式は区間 I の内部でのみ満たされるとしても、同じことになる。 ■

3.2.3 定理 3.1 の証明

定理 3.2 により、$\varphi(b + 0)$ が存在する。

$$\psi(t) := \begin{cases} \varphi(t) & (t \in (a, b)) \\ \lim_{t \to b-0} \varphi(t) & (t = b)) \end{cases}$$

とおくと、ψ は $(a, b]$ で連続で、(a, b) で微分可能で、微分方程式を満たす。定理 3.4 によって、ψ は $(a, b]$ で微分可能で微分方程式を満たす。

初期値問題

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)),$$
$$x(b) = \psi(b)$$

の 1 つの局所解 $\xi(t)$ $(t \in [b - \delta, b + \delta])$ を取り、

$$\widetilde{\psi}(t) ;= \begin{cases} \psi(t) & (t \in (a, b]) \\ \xi(t) & (t \in (b, b + \delta)) \end{cases}$$

とおくと、$\widetilde{\psi}$ は $(a, b + \delta)$ における解となる。 ■

A　おもちゃ箱 (倉庫)

A.1　悩んでいたときの記録

(これは以前はイントロのところに置いてあったが)

どういう説明が良いのか。解の延長定理をうやうやしく奉るのがよいのか。よいお手本が見当たらないので困っている。私的には、大事なことは考えている解が大域的かどうか調べられること、という気がする。大域的でない場合はいろいろある。それは例をあげるか、あるいは判定をどうやるかでは？

常微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ の f の定義域を、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ の部分集合 D とする本が多いわけだけど、個人的には違和感がある。$D = I\times\Omega$ (I は $\mathbb{R}$ の区間) ではないか。特に力学系だと $I=\mathbb{R}$, $I=[0,\infty)$ とか。私が実際に扱っている微分方程式が力学系であるせいだろうか。

D の境界について注意しておく。$D=[t_0,T)\times\Omega$ であるとき、

$$\partial D = \{t_0\}\times\overline{\Omega}\cup(t_0,T)\times(\partial\Omega)\cup\{T\}\times\overline{\Omega}$$

であるように思える。

以下 $I=[0,\infty)$ とする。

大域解が存在しない場合、要するに最大延長解が有限の時刻 T までしか解が存在しない、ということだが、色々なケースがある。

以下 $t\to T$ と書いてあるところは、$t\to T-0$ と書くべきかもしれない。

1. $\displaystyle\lim_{t\to T}\|x(t)\| = +\infty.$
2. $\displaystyle\lim_{t\to T} x(t)$ が確定しない (振動— 典型的には $x(t)=\sin\frac{1}{t-T}$)。
3. $(\exists x_\infty\in\partial\Omega)\ \displaystyle\lim_{t\to T} x(t) = x_\infty$

2 があることは気づかなかった。1, 2 の場合、それ以上は確かに延ばせないが、3 の場合は $\partial\Omega$ にかすっただけで延ばせる可能性がなくもない。

f が有界な ($\sup_{(t,x)\in D}\|f(t,x)\| < +\infty$) 場合は分かりやすい。1 と 2 が起こり得ない。大域解 ($t\to\infty$ までの解) 存在以外の可能性は 3 だけ、ということだ。仮定が $\displaystyle\sup_{(t,x)\in D}\|f(t,x)\| < +\infty$ ほど強くなくても、解軌道にそって有界 ($\displaystyle\sup_{(t,x)\in\mathcal{O}(x_0)}\|f(t,x)\| < +\infty$) と分かるだけで良い。

x_∞ が領域内にあると最大性に反するので ($x(T)=x_\infty$ を初期条件として解いた結果をつないで、もっと解を延ばせることになるから)、それは境界 $\partial\Omega$ の点である。

何かの理由から、境界の点に収束するはずがないと分かれば (例えば $\Omega=\mathbb{R}^n$ なので $\partial\Omega=\emptyset$ とか、解軌道の情報が分かって、それが $\partial\Omega$ と共通部分がないとか)、解は大域的ということになる。それが一つのゴールだろうか。

https://ameblo.jp/toshitt60/entry-10154719094.html

Lecture notes on continuation of solution.[9]

[9] http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MMG511/V16/Extension_lecture_notes.pdf

A.2 ガラクタ 1

高橋 [4]

> 一般に局所解 $x(t)$ が与えられたとき、その定義域に、例えば $t_1 > t_0$ ($t_1 < t_0$ としても同様) が含まれていれば、時刻 $t = t_1$ で $x(t_1)$ を初期値とする局所解 $\widetilde{x}(t)$ が存在する。よって、t_1 を境として $\widetilde{x}(t)$ をつなぐことにより、局所解 $x(t)$ の定義域を (一般には) 広げることができる。このような操作を可能な限り繰り返した後に得られる解を延長不能解という。
>
> (A.1) の右辺 $f(t,x)$ が $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ の領域 D' で定義されているとすると、延長不能解 $x(t)$ ($t_1 < t < t_2$) に対しては、$t \to t_1$ または $t \to t_2$ のとき、次のいずれかが成り立つ。($t_1 = -\infty$, $t_2 = +\infty$ の場合もあり得る。)
>
> (a) $(t, x(t))$ は D' の境界 $\partial D'$ に近づく。
>
> (b) $|t| + \|x(t)\| \to \infty$.
>
> 実際、もし延長不能解 $x(t)$ に対して、$s_k \to t_1$ (または t_2) で $x(s_k) \to y$, y は D の内部の点、となれば、(t_1, y) を初期条件とする局所解が存在するから、さらにつなげることが可能となってしまい、矛盾が生じる。よって、(a) が成り立つか、あるいは (D が非有界領域で) (b) が成り立つ。(なお、延長不能解の存在は、ツォルンの補題を用いて証明される。)

なんか、ぼんやりしているね。私は例えばロトカヴォルテラで、解は $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ で存在する、となるべく簡単に言いたい。$D' = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ で、これは境界が空集合であるから、$|t| + \|x(t)\| \to +\infty$ が成り立つが、解軌道の方程式があり、ある点を通る解は有界であることが分かるので、$|t| \to +\infty$. こんな議論か？

A.3 ガラクタ 2

定理 A.1 (正の方向への最大延長解) D を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ の領域または閉領域、$f\colon D \to \mathbb{R}^n$ は連続とする。微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{3a}$$

に初期条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{3b}$$

を課した初期値問題について、解の一意性が成り立つと仮定する。このとき任意の x_0 に対して最大延長解が存在する。その定義区間を I, $T := \sup I$ とするとき、次のいずれかが成り立つ。

(a) $T = +\infty$. つまり $I = [t_0, +\infty)$ で解が存在する。

(b) $\displaystyle\lim_{t\to T-0}(t, x(t))$ が存在して、∂D に属する。つまり解曲線上の点 $(t, x(t))$ が境界上のある点に収束する。

(c) $\displaystyle\lim_{t\to T-0}\|x(t)\| = +\infty$.

(2022/3/23 追記) この定理は間違っている。竹之内 [3] を見て気づいた。赤面もの。■

証明が載っている本はあるが、定理自体がはっきり書かれていなかったり (証明自体も細部まで書かれていない)、定理の仮定にも細かな違いがあったりして (例えば初期値問題の解の一意性を仮定するかどうか)、すっきりしない。一応上のようにまとめてみたが、実は手探りでやっている。

注意 A.2 (細かな注意)

- 定理の仮定に初期値問題の解の一意性が成り立つこと (あるいはそれを導く仮定) を含めるかどうか。
- 素朴に最大延長解を構成する証明が書いてある一方、「Zorn の補題を用いて」と書いてあるものもある。もしかすると、解の一意性のあるなしと関わるのだろうか？
- D として、領域に限る場合と、それに限らない (閉領域を認める、単に「開集合とは限らない (本当に何でも良い ??)」等々) 場合でも、話が違ってきそう。
- 条件 (a), (c) が成り立つ場合、それより定義区間が真に大きくなることはありえないが、条件 (b) が成り立つ場合は、T を超えて解が延長できる場合がありうる。

証明については、局所解の一意性は要請することにして、最大延長解の存在は高野 [2] に従う。最大延長解が (a),(b),(c) のいずれかを満たすことは、自力で証明を書いてみる。コディントン・レヴィンソン [1] にある次の問題を参考にする。

> $(n+1)$ 次元 (t,x) 空間の区域 $0\le t\le a$ $(a>0)$, $|x|<\infty$ で $f\in C$ とし、$\varphi(t)$ は点 $(0,\xi)$ から出発し区間 $0\le t<\tilde{t}<a$ 上で存在する連立系 $x'=f(t,x)$ の解とする。このとき有限な極限値 $\varphi(\tilde{t}-0)$ が存在して φ は点 $\tilde{t}$ をこえて延長できるか、または、$t\to\tilde{t}-0$ とするとき $|\varphi(t)|\to\infty$ となるかの二つの場合だけが可能であることを示せ。
>
> **ヒント** $t\to\tilde{t}-0$ とするとき、$|\varphi(t)|$ が有界ならば $|\varphi'(t)|$ も有界となることを利用する。

参考文献

[1] コディントン・レヴィンソン：常微分方程式論 上, 下, 吉岡書店 (1968, 1969).

[2] 高野恭一：常微分方程式, 朝倉書店 (1994), 線形微分方程式のモノドロミー表現やフックス型微分方程式等、複素領域における微分方程式の話が載っているのが特徴.

[3] 竹之内脩：常微分方程式, ちくま学芸文庫, 筑摩書房 (2020/12/10), 1981 年に秀潤社から出版された書籍の文庫化。Kindle もある。

[4] 高橋陽一郎：力学と微分方程式, 岩波書店 (2020/1/10), 岩波講座 現代数学への入門「力学と微分方程式」(1996/05/29) の単行本化。 丸善 eBook にある。https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000007597.