

卒業研究の要旨

石川 邦臣 指導教員 桂田祐史 先生

1999年2月18日

1 目標

空間2次元熱方程式の初期値境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad ((x, y) \in \Omega, t \in (0, T)) \quad (1)$$

$$u = g_1 \quad ((x, y) \in \Gamma_1, t \in (0, T)) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad ((x, y) \in \Gamma_2, t \in (0, T)) \quad (3)$$

$$u = a \quad ((x, y) \in \Omega, t = 0) \quad (4)$$

Ω は平面上の有界領域、その境界 $\Gamma (= \partial\Omega)$ は区分的に滑らかであるとする。境界 Γ は Γ_1 と Γ_2 とに分かれている。 T は正定数であり、 $\Omega \times (0, T)$ で定義された関数 $u = u(x, y, t)$ を考える。ここに、 Δ は Laplace 作用素 ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) であり、 n は境界 Γ での外向き単位法線ベクトルである。

$$f = f(t, x, y), \quad g_1 = g_1(x, y), \quad g_2 = g_2(x, y), \quad a = a(x, y)$$

は与えられたデータである。

卒業研究には、この問題を考えていくのだが、

- ・ 熱方程式の弱形式を導き、空間方向に有限要素近似、時間方向に差分近似を使い近似解による近似方程式を導き、数値実験を行なう
- ・ 差分近似の θ 法の安定性を調べる

ことを目標とする。

2 弱形式

弱形式を導く。 $v \in H^1(\Omega)$ を

$$v(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma_1) \quad (5)$$

を満たす任意の関数とする。(1) の両辺に v をかけ Ω で積分し、Gauss - Green の定理を使うと、

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma + \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} f v \, dx dy.$$

ここで、(3) に v をかけ、 Γ で積分したものを合わせると、

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx dy + \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} f v \, dx dy + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\gamma \quad (6)$$

となる。ここに、

$$(u, v) = \iint_{\Omega} uv \, dx dy, \quad (7)$$

$$\langle u, v \rangle = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \quad (8)$$

$$[g, v] = \int_{\Gamma_2} gv \, d\gamma, \quad (9)$$

という記号を導入すると、(6) は、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (10)$$

と書ける。(6) または (10) が考える弱形式である。

(5) を満たす任意の $v \in H^1(\Omega)$ に対しこの弱形式を成立させ、(2), (4) を満たす u は、熱方程式 (1) ~ (4) の弱解である。

この弱解を考えていく。

3 離散化

上で求めた弱形式を、空間方向に有限要素近似、時間方向の近似に差分近似を行ない離散化する。

まず、 $\frac{\partial u}{\partial t}$ に θ 法による差分近似をする。 $u^n = u(n\tau, x, y)$, $f^n = f(n\tau, x, y)$ とすると、パラメータ $\theta \in [0, 1]$ を用いて、次のように書ける。

$$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, v \right) + \theta \langle u^{n+1}, v \rangle + (1 - \theta) \langle u^n, v \rangle = \theta (f^{n+1}, v) + (1 - \theta) (f^n, v) + [g_2, v].$$

これを整理して、左辺に u^{n+1} のあるものを持ってくると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & (u^{n+1}, v) + \tau \theta \langle u^{n+1}, v \rangle \\ &= (u^n, v) - \tau(1 - \theta) \langle u^n, v \rangle + \tau \{ \theta (f^{n+1}, v) + (1 - \theta) (f^n, v) \} + \tau [g_2, v]. \end{aligned} \quad (11)$$

次に、 u^n の領域 Ω での近似に、三角形 1 次要素を使う有限要素近似を考える。まず、領域 Ω を N_e 個の要素 e_j の和集合に分割する。この三角形分割は、要素間に重なりやすきまのないように、また、要素の辺上に他の要素の頂点が来ないようにする。そのため、 Ω は多角形領域か、分割を工夫することにより境界 Γ とのすきまが小さくなるようにした領域を考えることになる。

$\bar{\Omega}$ にある三角形の頂点を P_i ($i = 1, \dots, N_p$) と書く。関数 ϕ_i ($i = 1, \dots, N_p$) を頂点 P_j で、 $\phi_i(P_j) = \delta_{ij}$ ($j = 1, \dots, N_p$) であり、要素 e_k 上では 1 次多項式である関数として定義する。 $\Omega \cup \Gamma_2$ 上にある頂点を P_i ($i = 1, \dots, N$) とする。任意の整数 i ($1 \leq i \leq N$) に対し、 Γ_1 上の頂点 P_k ($N < k \leq N_p$) で、 $\phi_i(P_k) = 0$ なので、 $\phi_i(x, y) = 0$ ($(x, y) \in \Gamma_1$) となっている。関数 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ は一次独立である。 v の近似関数 v_h の全体を、

$$V_h = \left\{ v_h = \sum_{j=1}^N v_j \phi_j; v_j \in \mathbf{R}, \forall j \right\}$$

のように定義する。また、 u_h^n はその基底関数 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ を使い、 $u_h^n(P_i) = a(P_i)$ ($N < i \leq N_p$) であることを考えて、 $\phi_0(P_i) = a(P_i)$ ($N < i \leq N_p$) を満たすように ϕ_0 を選び、

$$u_h^n = \phi_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j, \quad \alpha_j \in \mathbf{R}, \forall j$$

とすると、 θ 法の弱形式 (11) を有限次元で近似して、このような u_h^n で、 $\forall v_h \in V_h$ に対して、

$$\begin{aligned} & (u_h^{n+1}, v_h) + \tau \theta \langle u_h^{n+1}, v_h \rangle \\ &= (u_h^n, v_h) - \tau(1 - \theta) \langle u_h^n, v_h \rangle + \tau \{ \theta (f^{n+1}, v_h) + (1 - \theta) (f^n, v_h) \} + \tau [g_2, v_h] \end{aligned} \quad (12)$$

となるようなものを求める問題を考えることになる。

解 u_h^n を

$$u_h^n = \phi_0 + \sum_{j=1}^N u_j^n \phi_j$$

と表し、 $\mathbf{u}^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ とすると、(12) は、

$$\mathbf{v}^T (M + \tau \theta A) \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{v}^T \{ M - \tau(1 - \theta) A \} \mathbf{u}^n + \tau \mathbf{v}^T \mathbf{f} + \tau \mathbf{v}^T \mathbf{g} - \mathbf{v}^T \mathbf{d}$$

と書け、結局 v_h の任意性より、

$$(M + \tau \theta A) \mathbf{u}^{n+1} = \{ M - \tau(1 - \theta) A \} \mathbf{u}^n + \tau \mathbf{f} + \tau \mathbf{g} - \mathbf{d} \quad (13)$$

に帰着する。ここに、 $M = (m_{ij})$, $A = (a_{ij})$ は、

$$m_{ij} = (\phi_j, \phi_i), \quad a_{ij} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle$$

である $N \times N$ 行列、 \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{d} は第 i 成分が

$$\mathbf{f}_i = \theta (f^{n+1}, \phi_i) + (1 - \theta) (f^n, \phi_i), \quad \mathbf{g}_i = [g_2, \phi_i], \quad \mathbf{d}_i = (\phi_0, \phi_i) + \tau \theta (\phi_0, \phi_i)$$

である N ベクトルである。 $n = 0$ の時、 $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{a}$ は初期条件、 M , A , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{d} は与えられた条件から計算できるので、 P が正則行列ならば、それらを用いて \mathbf{u}_h^1 が計算できる。そしてその求めた \mathbf{u}_h^1 を新しく右辺の \mathbf{u}_h^n に用い、同じことを繰り返すことによって、新しい時刻 $n + 1$ における \mathbf{u}_h^{n+1} を得ることができる。

4 プログラム

以上のことを用いて、プログラムを組んでいくのだが、(7),(8),(9)が内積であることを利用すると、第3章に書いたことは、各要素 e_j ($j = 1, \dots, N_P$) ごとに考えて、後で合わせていけばいいのである。これを直接剛性法というが、そのような工夫をすることによって、有限要素法のプログラムはかなり任意の(多角形)領域を扱うことができる。

5 θ 法の安定性

さて、ここまで来ると、本当に θ 法によるこの方程式で近似解を求めることができるのか、という疑問が出てくる。そのような疑問の中で、

- ・左辺の行列 $M + \tau\theta A$ は正則なのか。
- ・ τ の取り方は任意なのか。そうでなければどのような規則でそれを選べばよいのかを考える。

5.1 $M + \tau\theta A$ は正則か

この証明は $(u, v), \langle u, v \rangle$ が内積であることを使う。ある N 次ベクトル v が $(M + \tau\theta A)v = 0$ を満たしているとする。 v_h を、

$$v_h = \sum_{j=1}^N v_j \phi_j$$

とおいて、 (v_h, v_h) を考えると、

$$(v_h, v_h) = \mathbf{v}^T M \mathbf{v} = |v_h|^2 \geq 0$$

であるが、仮定を考慮すると、逆に、

$$(v_h, v_h) = \mathbf{v}^T M \mathbf{v} = -\tau\theta \mathbf{v}^T A \mathbf{v} = -\tau\theta \|v_h\|^2 \leq 0$$

となり、 $v_h = 0$ が導かれ、 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ の一次独立性から仮定を満たす v は $v = 0$ のみであることが導かれる。よって、行列 P が正則なので、 θ 法で作られた連立方程式は可解である。

5.2 θ 法の解は任意の τ で安定に求まるか

私が学んできた偏微分方程式を差分近似して作られた θ 法による方程式では、任意の τ では解が安定しないことがあった。それを考える。目標とする定理は、

定理 V_h は逆不等式を満たすとする。 $g_1 = 0$ 、時間刻み τ を、 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ のときは $\delta \in (0, 1)$ を任意に固定して、

$$\tau \leq \frac{2(1-\delta)}{(1-2\theta)c_0^2} h^2 \quad (14)$$

を満たすように、 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ のときは任意に定める。このとき、 θ 法の解 u_h^n ($n = 0, 1, \dots, N_T$) に対して、

$$|u_h^n|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \begin{cases} \frac{1}{\delta} \left\{ |u_h^0|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \sum_{k=0}^{n-1} \|F^{k+\theta}\|_{V_h'}^2 \right\} & \left(0 < \theta \leq \frac{1}{2} \right) \\ |u_h^0|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \sum_{k=0}^{n-1} \|F^{k+\theta}\|_{V_h'}^2 & \left(\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \right) \end{cases}$$

が成立する。

ここで、 $|u_h|_{L^2(\Omega)}$ 、 $\|F^{n+\theta}\|_{V_h'}$ は、それぞれ、

$$\begin{aligned} |u_h|_{L^2(\Omega)}^2 &= \iint u_h^2 dx dy = \mathbf{u}^T M \mathbf{u} \\ \|F^{n+\theta}\|_{V_h'}^2 &= |\theta f^{n+1} + (1-\theta)f^n|_{L^2(\Omega)}^2 + |g_2|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \end{aligned}$$

で表されるノルム、 c_0 は、逆不等式

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_0}{h} |u_h|_{L^2(\Omega)}$$

に表れる定数、 h は各要素の最大辺長の最大値、

$$h = \max_{j=1, \dots, N_e} (\{e_j \text{の最大辺長}\})$$

である。

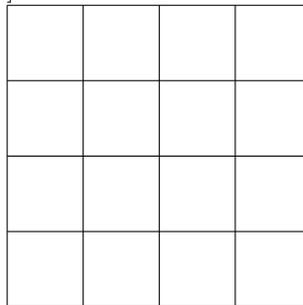
6 数値実験

4 辺とも基本境界条件のかかった、つまり $\Gamma_1 = \Gamma$ である状態で、

$$g_1 = 0, \quad \alpha(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

という条件のもとで、 $\theta = 0$ のとき、 u_h^n が安定である τ のとりうる最大値を数値実験で推測する。

要素分割は領域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ を N 等分して各格子を下図のように 2 つに分けたものを考える。



領域の分割 ($N = 4$)

$N = 10$ としたときの結果を書く。実験は $t = 0$ から τ 刻みで $t = 20$ までの解の様子を見て、不安定現象がおこるかどうかを見た。不安定かどうかは、 $|u_h^n|_{L^2(\Omega)}^2$ が、常に減少するかを見た。

机上で計算した値をまず考える。 h は要素の最大辺長であるので、今回は $h = \frac{\sqrt{2}}{10}$ である。そして、 c_0 は参考文献 (P83 脚注) によると、 $c_0 = 4\sqrt{6}$ ととることができる。よって、 τ のとりうる最大値 τ_δ は $\delta \in (0, 1)$ によって変わり、

$$0 < \tau_\delta < \frac{2}{(4\sqrt{6})^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \right)^2 (= 0.00041\dot{6})$$

の範囲にあるれば安定であることが定理により分かる。実際の数値実験では、

τ の値	安定、不安定
0.000818567431	不安定
0.00081856743096875	不安定
0.0008185674309375	安定
0.000818567430875	安定
0.00081856743075	安定
0.0008185674305	安定
0.00081856743	安定

より、 $\tau = 0.000818567430968$ 以下の値で安定であった。

7 参考文献

定理、実験の c_0 の内容などの参考文献に、田端正久「微分方程式の数値解法 II」岩波書店 を用いた。