半線形熱方程式に対する精度保証付き数値計算

明治大学大学院
基礎理工学専攻数学系
石川 邦臣
指導教員 桂田 祐史 助教授

目 次

1 はじめに **2**

1.1 記号 . . . 3

2 区間演算 **3**

2.1 プログラムライブラリ . . . 4

2.2 実験環境 . . . 4

3 半線形熱方程式と不動点形式 **4**

3.1 問題 . . . 4

3.2 仮定 . . . 4

3.3 弱解の存在定理 . . . 4

3.4 不動点形式 . . . 5

3.5 a priori 評価 . . . 6

3.6 不動点定理 . . . 8

4 離散化と検証条件 **9**

4.1 半離散化 . . . 9

4.2 全離散化 . . . 13

5 計算機による解の検証アルゴリズム **16**

5.1 反復法 . . . 16

5.2 反復手順 . . . 16

5.3 ϵ-拡大について . . . 18

6 実際の計算 **18**

6.1 基底関数 . . . 19

6.2 反復式 (31) の構成 . . . 19

6.3 係数行列 A, D の作成 . . . 20

6.3.1 直接剛性法 . . . 20

6.4 反復式 (31) の計算 . . . 22

6.5 境界条件の考慮 . . . 23

6.6 反復式 (32) の計算 . . . 24

6.7 反復式 (33) の計算 . . . 25

7 数値実験 **26**

7.1 事前の計算 . . . 26

7.2 実験結果 . . . 27

7.2.1 解の存在証明 . . . 27

7.2.2 分割数による解の存在範囲の変化 . . . 30

7.3 実験の考察 . . . 31

7.4 その他の実験 . . . 31

7.4.1 ϵ-拡大 . . . 31

7.4.2 違う $q(x)$ での実験 . . . 32

8 プログラムについて **32**
8.1 プログラムの流れ 33
8.1.1 初期データの作成 33
8.1.2 各行列の作成 33
8.1.3 解の検証 34
8.1.4 その他の変数 34
8.2 PROFIL の関数 35

1 はじめに

近年、微分方程式の解の存在と一意性の定理の証明に計算機を用いるいくつかのテクニックが発達してきた。そのひとつが精度保証付き数値計算法と呼ばれるもので、問題の解の存在と近似解の誤差限界を数学的に厳密に保証するような数値計算法である。

常微分方程式の解に対する精度保証法は、いろいろな方法が提案されていて、実際に適用されている (詳しくは 中尾 · 山本 [16] の文献案内を参照)。しかし、偏微分方程式の解に対する精度保証法はまだ発展途上中ある。[16] では不動点定式化した方程式の近似解に対して、シャウダーの不動点定理を用い、解の検証条件を導くことによって 2 階半線形楕円型偏微分方程式の解の精度保証をする方法を示している。この論文では、その方法を半線形熱方程式に応用した論文 (Nakao [14],[15]) を元に、実際に区間演算という方法を用いて解の存在を計算機上で証明する方法を示した。

考える半線形熱方程式は次のようなものである。

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t,u)\,, & (x,t) \in \Omega \times J\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & x \in \Omega\,, \\ u(x,t) &= 0\,, & (x,t) \in \partial\Omega \times J\,. \end{cases} \tag{1}$$

ここで、Ω は $\mathbf{R}$ 上有界な解区間、$J = (0,T)\,, T > 0$ とする。$Q = \Omega \times J$ とする。

解の検証を行うための一連の手順は、

1. 方程式を不動点形式化し、不動点定理を導く (3 章)。
2. 方程式を離散化し、対応する不動点定理を導く (4 章)。
3. 離散化により得られた不動点形式に対応する反復法を導く (5 章)。
4. 計算機上で反復に必要な評価などを導く (6 章)。
5. 反復法を実行するプログラムを作成する (8 章)。
6. 適当な初期値のもとで反復法を行い、解の検証を行う (7 章)。

のようになる。精度保証付き数値計算を行うために必要な区間演算については、2 章で述べる。

このような手順を踏む中で、

i. 区間係数を持つ近似関数のノルム評価
ii. 精度保証のためのプログラムの構成

を詳細に述べたことにより、具体的な検証プログラムの作成を可能にした。

1.1 記号

この論文で用いる記号を挙げる。m を整数とし、L^2, H^m, H_0^m で Ω 上標準的なルベーグ、ヒルベルト空間を表し、$(\cdot,\cdot)_\Omega$, $\|\cdot\|_\Omega$, $\|\cdot\|_m$ を、付随する L^2, H^m ノルムとする。ただし、$m=1$ の場合、H_0^1 上で、$\|u\|_1^2=(\nabla u,\nabla u)_\Omega$ がノルムとなる。また、$(\cdot,\cdot)$ で Q 上の L^2 内積、$\|\cdot\|$ で Q 上の L^2 ノルムを表す。

正定数 r,s に対して、$H^r(J;H^s)$ を $C^\infty(J;H^s)$ をノルム

$$\left(\|u\|_{H^r(J;H^s)}\right)^2=\sum_{j=0}^{r}\int_J\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(\cdot,t)\right\|_s^2 dt$$

で完備化したものとする。ここで $C^\infty(J;H^s)$ は、全ての微分係数が $\overline{J}$ 上に連続的に拡張される、H^s の中の J 上無限回微分可能な関数の集合をあらわす。$H_0\equiv L^2(J;H_0^1)$, $H\equiv H_0\cap H^1(J;L^2)$ とする。このとき、H は次の内積でヒルベルト空間をなす。

$$\langle u,v\rangle_Q=\int_J(\nabla u,\nabla v)_\Omega dt+\int_J(u_t,v_t)_\Omega dt\,.$$

2 区間演算

計算機における「ほとんど全ての」数値計算には誤差が発生する。後に述べる IEEE754 の規格に準じた計算機システムでの倍精度浮動小数点数の有効桁数は 10 進 15 桁程度であり。それらの数の演算結果もまたその値に近い有効桁数 15 桁程度の浮動小数点数に近似される。以後、$\mathbf{F}$ をそのようなひとつの計算機システムで表される浮動小数点数全体を表すことにする。これらのことは、大石 [19] に詳しい。

実数やその演算も厳密に計算機上で表現できないのなら、ある程度の幅を持った区間として扱おう、という考えがある。つまり、実数 x を $a\le x\le b$ となるような $a,b\in\mathbf{F}$ を用いて、x の計算機上での表現 X として、

$$X=[a,b]$$

という「その値を含んだ区間」で表現しようというのである。このような区間により計算をする方法が区間演算である。ある区間 $I=[a,b]$, $J=[c,d]$ に対して、区間の四則演算は、以下のように、右辺の a, b, c, d の演算によって、

$$\begin{aligned}
I+J &= [a+c,b+d]\,,\\
I-J &= [a-d,b-c]\,,\\
I\times J &= [\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}]\,,\\
I\div J &= [a,b]\times\left[\frac{1}{d},\frac{1}{c}\right]
\end{aligned}$$

のように定義できる。ただし、「$\div$」の場合、$0\notin J$ でなければならない。また、$\mathbf{F}$ 上でこのような演算を考えると、たとえ $a,b,c,d\in\mathbf{F}$ であったとしても、区間演算結果の右辺の区間の両端の値が $\mathbf{F}$ 上にあるとは限らない。その場合、その区間の両端を含む最小の $\mathbf{F}$ の区間をその演算結果とするようにする。

このような計算機上での浮動小数点数の演算に関する規格 IEEE754 がある。たとえば、Intel の x86 ファミリ (Pentium,II,III, Celeron) や、IBM PowerPC, Motorola 68000, 88000 シリーズ、

Compaq/DEC Alpha, Sun SPARC など、身の回りにあるほとんどの計算機システムにこの規格が採用されている。

この規格により、簡単な手順で上のような **F** 上での区間演算を実装することができるようになっている。

2.1 プログラムライブラリ

プログラム上から、容易に区間演算をさせることのできるライブラリが多く開発されている。この論文の実験に関しては、PROFIL [20] という区間演算ライブラリを用いた。このライブラリは、C++ による多重定義を用い、**F** 上の区間を用いた演算や、区間を成分に持つベクトル、行列の演算、sin や $\sqrt{}$ のような関数値を区間で求めてくれるようなものを提供してくれている。

2.2 実験環境

この論文での実験プログラムは、Panasonic CF-L1XR (Pentium III 600MHz) で、Windows98 Second Edition 上で Cygnus Solutions の Cygwin に付属の C,C++ コンパイラ GCC に PROFIL ライブラリ をリンクさせている。

3 半線形熱方程式と不動点形式

3.1 問題

この論文で考える問題は (1) で示したものである。

3.2 仮定

(1) の写像 f に対して、次の条件を仮定する。

(A1) $\forall u \in H \cap H^1(J;H^1)$ に対して、$f(\cdot,u) \in H^1(J;L^2)$.

(A2) H の任意の有界集合 U に対して、$f(\cdot,U) \equiv \{f(\cdot,u) | u \in U\}$ もまた、$L^2(J;L^2)$ で有界。

(A3) f の任意の H の有界集合から $L^2(J;L^2)$ への写像は、H_0 ノルムで連続。

3.3 弱解の存在定理

定理 1 $\forall g \in L^2(J;L^2)$ に対し、次の放物型問題は一意な弱解 ϕ を $H \cap L^2(J;H^2)$ に持つ。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \phi_t - \phi_{xx} & = & g\,, & (x,t) \in \Omega \times J\,, \\ \phi(x,0) & = & 0\,, & x \in \Omega\,, \\ \phi(x,t) & = & 0\,, & (x,t) \in \partial\Omega \times J\,. \end{array} \right. \tag{2}$$

ここで、弱解とは、次の弱形式問題をみたすものである。

問題

$$(\phi_t, v)_\Omega + (\nabla\phi, \nabla v)_\Omega = (g,v)_\Omega, \quad v \in H_0^1\,,\, t \in J \tag{3}$$

となる $\phi \in \tilde{H}$ を見出せ。

定理 1 の証明には、次の定理を用いる。

定理 2 $\forall f \in L^2(\Omega \times (0,T))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対し、次の方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \psi_t - \Delta\psi & = & f\,, & (x,t) \in \Omega \times J\,, \\ \psi(x,0) & = & \psi_0(x)\,, & x \in \Omega\,, \\ \psi(x,t) & = & 0\,, & (x,t) \in \partial\Omega \times J \end{array} \right.$$

の一意解が存在して、

$$\psi \in C([0,T]; H_0^1) \cap L^2(0,T; H^2 \cap H_0^1)\,,$$

かつ、

$$\psi_t \in L^2(0,T; L^2)\,.$$

定理 2 の証明に関しては H.Brezis [1], Lions-Magenes [8] を参照。■

定理 1 の証明 定理 2 において、$\psi_0 \equiv 0 \ \in H_0^1(\Omega)$ と取り、$\psi \in L^2(J; H^2 \cap H_0^1)$ より、

$$\psi \in L^2(J; H^2) \cap L^2(J; H_0^1)\,.$$

また、$H = H_0 \cap H^1(J; L^2) = L^2(J; H_0^1) \cap H^1(J; L^2)$ であり、

$$\begin{aligned} u \in H^1(J; L^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \|u\|^2_{H^1(J;L^2)} = \int_J \|u\|^2_\Omega dt + \int_J \|u_t\|^2_\Omega dt < +\infty \\ &\Leftrightarrow \quad u \in L^2(J; L^2)\,,\ u_t \in L^2(J; L^2) \end{aligned}$$

であるので、ψ, ψ_t に対して、$H^1(J; L^2)$, H_0, H という記号を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} \psi \quad &\in \quad H_0 \cap H^1(J; L^2) \cap L^2(J; H^2) \\ &= H \cap L^2(J; H^2)\,. \end{aligned}$$

よって、定理 1 の結論が示された。■

3.4 不動点形式

問題 (2) の g に対して、解 ϕ を決める対応を $\phi = Ag$ と書くことにする。$\widetilde{H} = \{\phi \in H | \phi(\cdot, 0) = 0\}$ とする。ここで、$\phi(\cdot, 0) = 0$ とは、

$$\lim_{t \to 0} \phi(\cdot, t) = 0 \quad \text{in } L^\infty(\Omega)\,.$$

これより、問題 (1) の弱解 $u \in H$ を、$u \in \tilde{H}$ が、

$$(u_t, v)_\Omega + (\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f(\cdot, u), v)_\Omega\,, \quad v \in H_0^1\,, t \in J \tag{4}$$

を満たすものとして定義する。そのとき、(4) は、次の形の不動点形式に書き直せる。

$$u = Af(\cdot, u)\,. \tag{5}$$

3.5 a priori 評価

補題 1 弱形式化された問題 (3) において、$g \in L^2(J;L^2)$ に対する解 $\phi \in \widetilde{H}$ に対して、次のような a priori 評価を得る。

(i) $\|\phi_t\| \le \|g\|, \|\nabla\phi(t)\|_\Omega \le \|g\|$.

(ii) $\|\phi(t)\|_\Omega \le \|g\|$.

(iii) $|\phi|_{H^2(Q)} \le 2\|g\|$. ただし、

$$\begin{aligned} |\phi|_{H^2(Q)} &\equiv \int_0^T |\phi|^2_{H^2} dt\,, \\ |\phi|^2_{H^2} &= \|\phi_{xx}\|^2_\Omega\,. \end{aligned}$$

(i) の証明 (3) で $v = \phi_t$ と取ると、

$$(\phi_t, \phi_t)_\Omega + (\nabla\phi, \nabla\phi_t)_\Omega = (g, \phi_t)_\Omega\,.$$

これより、

$$\begin{aligned} \|\phi_t\|^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi\|^2_\Omega &\le \|g\|_\Omega\|\phi_t\|_\Omega \\ &\le \frac{1}{2}\left(\|g\|^2_\Omega + \|\phi_t\|^2_\Omega\right)\,. \end{aligned}$$

よって、両辺を 2 倍して整理すると、

$$\|\phi_t\|^2_\Omega + \frac{d}{dt}\|\nabla\phi\|^2_\Omega \le \|g\|^2_\Omega\,.$$

0 から T まで積分すると、

$$\int_0^T \|\phi_t\|^2_\Omega dt + \|\nabla\phi(T)\|^2_\Omega \le \|\nabla\phi(0)\|^2_\Omega + \int_0^T \|g\|^2_\Omega dt\,. \tag{6}$$

ϕ の仮定から、$\nabla\phi(\cdot,0) = 0$. よって、

$$\|\phi_t\| \le \|g\|\,. \tag{7}$$

また、(6) を 0 から t まで積分すると、

$$\int_0^t \|\phi_t\|^2_\Omega dt + \|\nabla\phi(t)\|^2_\Omega \le \|\nabla\phi(0)\|^2_\Omega + \int_0^t \|g\|^2_\Omega dt\,.$$

ϕ の仮定から、$\nabla\phi(\cdot,0) = 0$. よって、

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi(t)\|^2_\Omega &\le \int_0^t \|g\|^2_\Omega dt \\ &\le \int_0^T \|g\|^2_\Omega dt\,. \end{aligned}$$

こうして、

$$\|\nabla\phi(t)\|_\Omega \le \|g\|\,. \tag{8}$$

(ii) の証明 $v = \phi$ を代入して、

$$(\phi_t, \phi)_\Omega + (\nabla\phi, \nabla\phi)_\Omega = (g, \phi)_\Omega \,.$$

これより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|_\Omega^2 + \|\nabla\phi\|_\Omega^2 &\leq \|g\|_\Omega\|\phi\|_\Omega \\ &\leq \frac{1}{2}(\|g\|_\Omega^2 + \|\phi\|_\Omega^2) \,. \end{aligned}$$

ここで、$\forall t \in J$ に対し $\phi(\cdot, t) \in H_0^1$ より、ポアンカレの不等式、

$$\|\phi\|_\Omega^2 \leq \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|_\Omega^2$$

を用いると、

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|_\Omega^2 + \|\nabla\phi\|_\Omega^2 \leq \frac{1}{2}\|g\|_\Omega^2 + \frac{1}{4}\|\nabla\phi\|_\Omega^2 \,.$$

ゆえに、$\|\nabla\phi(\cdot, t)\|_\Omega^2 \geq 0$ に注意して、0 から t まで積分すると、

$$\|\phi(t)\|_\Omega^2 - \|\phi(0)\|_\Omega^2 \leq \|g\|^2 \,,$$

よって $\phi(\cdot, 0) = 0$ より、

$$\|\phi(t)\|_\Omega \leq \|g\| \,. \tag{9}$$

(iii) の証明

$$\begin{aligned} |\phi|_{H^2(Q)}^2 = \int_0^T |\phi|_{H^2}^2 dt &= \int_0^T \|\phi_{xx}\|_\Omega^2 dt \\ &= \|\phi_{xx}\|^2 \,. \end{aligned}$$

よって、

$$|\phi|_{H^2(Q)} = \|\phi_{xx}\| \,.$$

$\phi_{xx} = \phi_t - g$ に注意すると、

$$\|\phi_{xx}\| \leq \|\phi_t\| + \|g\| \,.$$

ゆえに、先ほどの $\|\phi_t\| \leq \|g\|$ を使うと、

$$|\phi|_{H^2(Q)} \leq 2\|g\| \tag{10}$$

を得る。■

この a priori 評価を用いて、次の補題を得る。

補題 2 A は、$L^2(J; L^2) \to H \cap L^2(J; H^2)$ で連続。

証明 まず、$H \cap L^2(J; H^2)$ のノルムとして、

$$\begin{aligned} |v|_{H\cap L^2(J;H^2)}^2 &= \|v\|_H^2 + \|v\|_{L^2(J;H^2)}^2 \\ &= \int_J \|v\|_1^2 dt + \int_J \|v\|_\Omega^2 dt + \int_J \|v_t\|_\Omega^2 dt + \int_J |v|_{H^2}^2 dt \end{aligned}$$

を採用する。$f,\, g \in L^2(J;L^2)$ を $\|f-g\|^2 < \epsilon$ をみたすように取っておく。$f,\, g$ に対して、それぞれ $u = Af,\, v = Ag$ であるとする。このとき、

$$|Af - Ag|^2_{H\cap L^2(J;H^2)} = \int_J \|u-v\|_1^2 dt + \int_J \|u-v\|_\Omega^2 dt + \int_J \|(u-v)_t\|_\Omega^2 dt + \int_J |u-v|^2_{H^2} dt\,.$$

ここで、a priori 評価 (7), (8), (9), (10) より、

$$\begin{aligned} |Af - Ag|^2_{H\cap L^2(J;H^2)} &\leq \int_J \|f-g\|^2 dt + \int_J \|f-g\|^2 dt + \|f-g\|^2 + 2\|f-g\|^2 \\ &\leq C\|f-g\|^2 \\ &\leq C\epsilon\,. \end{aligned}$$

ゆえに、補題 2 は証明された。■

3.6 不動点定理

次の定理が、解の精度保証をすることの基本となる。

定理 3 (シャウダーの不動点定理) バナッハ空間 X の有界凸閉集合 S に対して、作用素 F が、

$$F : S \to S\,, \text{コンパクト}$$

ならば、F は S に不動点を持つ。

この定理の証明については、増田 [11] を参照。■

本論文の写像 Af に関する不動点定理を示す。

定理 4 $\widetilde{H}$ の空でない、有界凸集合 U に対して、

$$Af(\cdot, U) \subset U \tag{11}$$

ならば、(5) の解 $u \in \overline{U}$ が存在する。ここで、$\overline{U}$ は、H の中での U の閉包を表す。

証明 まず、$\overline{U}$ が、H_0 で閉集合であることを示す。$\overline{U}^0$ を H_0 の中での $\overline{U}$ の閉包とする。このとき、$u \in \overline{U}^0$ に対し、

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad H_0$$

となる列 $\{u_n\}$ が取れる。ヒルベルト空間 H における $\overline{U}$ の有界性より、$\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{nj}\}$ で、

$$u_{nj} \rightharpoonup \hat{u} \quad (\text{弱}) \text{ in } H$$

となるような $\hat{u}$ が存在する。単射 $H \to L^2(J;L^2)$ のコンパクト性より、

$$u_{nj} \to \hat{u} \quad (\text{強}) \text{ in } L^2(J;L^2)\,.$$

さらに、u_n の仮定より、

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad L^2(J;L^2)\,.$$

よって、$\hat{u} = u.$ ゆえに、$\overline{U}$ の弱閉性により、

$$|(u_{nj} - \hat{u}, v)| \to 0$$

ならば、

$$\hat{u} \in \overline{U}\,.$$

よって、

$$u \in \bar{U}.$$

ゆえに $\overline{U}$ は H_0 で閉集合。

つぎに、写像 Af が $\overline{U}$ でコンパクトであることを示す。Af の H 上の連続性により、

$$Af(\cdot, \overline{U}) \subset \overline{Af(\cdot, U)} \subset \overline{U}\,.$$

さらに、補題 2 より、写像 $A : L^2(J; L^2) \to H \cap L^2(J; H^2)$ は連続である。これより、仮定 (A2) と、単射 $H \cap L^2(J; H^2) \hookrightarrow H_0$ がコンパクトであることにより、合成写像 Af は、$\overline{U}$ 上 H_0 ノルムの意味でコンパクトになる。これより、シャウダーの不動点定理により、定理 4 の結論を得る。■

4 離散化と検証条件

与えられた $U \subset \widetilde{H}$ に対し、(11) の左辺は厳密には計算できない。そこで有限要素空間を用い、$\widetilde{H}$ から有限要素空間への離散近似と、離散化誤差の評価を定義していく。

4.1 半離散化

ここでは、空間方向のみの離散化を考える。

S_h を $0 < h < 1$ である h をパラメータに持つ H_0^1 の有限要素部分空間の集合とする。また、S_h は、次の近似性質を持ったものとする：$\forall u \in H^2 \cap H_0^1$ に対して、

$$\inf_{\chi \in S_h} \|u - \chi\|_1 \leq C_1 h |u|_{H^2}\,. \tag{12}$$

ここで、$|u|_{H^2}^2 \equiv \|u_{xx}\|_\Omega$ で、C_1 は正定数。

$\widetilde{H}$ の部分空間として、$H(J; S_h) \equiv \{\phi \in \widetilde{H} | \phi(t) \in S_h\,, \forall t \in J\}$ を定義する。そのとき、$\forall g \in L^2(J; L^2)$ に対して、Ag を S_h の中に写す 半離散化 $u_h = R_x(Ag)$ を、$u_h \in H(J; S_h)$ が、

$$((u_h)_t, v)_\Omega + (\nabla u_h, \nabla v)_\Omega = (g, v)_\Omega\,, \quad v \in S_h\,, t \in J\,, \tag{13}$$

を満たすものとして定義する。次の補題は $R_x(Ag)$ の離散化誤差を与える。

補題 3 $g \in L^2(J; L^2)$ に対し、$u = Ag$, u_h を (13) の解とする。このとき、次の誤差評価が成り立つ。

$$\left(\int_0^t \|u(s) - u_h(s)\|_1^2 ds \right)^{1/2} \leq 2\sqrt{3} C_1 h \|g\|\,, \quad t \in J.$$

まず、補題 3 を証明するのに必要な、Aubin-Nitsche の技巧により得られる不等式を証明する。

補題 4 $g \in L^2(J; L^2)$ に対し、(3), (13) で定義される解をそれぞれ u, u_h とする。また、u, u_h は、

$$(\nabla u, \nabla v_h) = (\nabla u_h, \nabla v_h)\,, \quad v_h \in S_h$$

をみたすものとする。このとき、次が成り立つ。

$$\|u - u_h\|_\Omega \leq C_1 h \|u - u_h\|_1\,.$$

証明 $w \in H^2$ を、

$$(\nabla v, \nabla w)_\Omega = (u - u_h, v)_\Omega \,, \quad v \in H_0^1$$

をみたすものとする。これより、

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_\Omega^2 &= (u - u_h, u - u_h)_\Omega \\ &= (\nabla(u - u_h), \nabla w)_\Omega \,. \end{aligned}$$

仮定より、$(\nabla(u - u_h), \nabla v_h)_\Omega = 0$ で、

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_\Omega^2 &= (\nabla(u - u_h), \nabla(w - v_h))_\Omega \\ &\leq \|u - u_h\|_1 \|w - v_h\|_1 \\ &\leq \|u - u_h\|_1 \inf_{v_h \in S_h} \|w - v_h\|_1 \\ &\leq \|u - u_h\|_1 C_1 h |w|_{H^2} \\ &\leq C_1 h \|u - u_h\|_1 \|u - u_h\|_\Omega \,. \end{aligned} \tag{14}$$

ここで、次を用いた。

補題 **5** $\psi \in L^2$ に対し、次の楕円型方程式

$$\begin{cases} -\phi_{xx} = \psi \,, & x \in \Omega \,, \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

の解 ϕ は H^2 に属し、

$$|\phi|_{H^2} \leq \|\psi\|_\Omega$$

をみたす。

補題 **5** の証明 第 1 式から

$$|\phi_{xx}(x)| = |\psi(x)| \,, \quad x \in \Omega \,.$$

これより、明らか。■

ゆえに、

$$|w|_{H^2} \leq \|u - u_h\|_\Omega \,.$$

したがって、(14) は、

$$\|u - u_h\|_\Omega \leq C_1 h \|u - u_h\|_1 \,.$$

よって補題 4 は証明された。■

補題 **3** の証明 $e = u - u_h$ とする。(3) から (13) を引いて、

$$(e_t, v)_\Omega + (\nabla e, \nabla v)_\Omega = 0 \,, \quad v \in S_h \,, t \in J.$$

特に、$u_h \in S_h$ より、

$$(e_t, u_h)_\Omega + (\nabla e, \nabla u_h)_\Omega = 0.$$

ゆえに、

$$(e_t, u_h - v)_\Omega + (\nabla e, \nabla(u_h - v))_\Omega = 0.$$

よって、$\forall v \in S_h$ で、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|e\|_\Omega^2 + (\nabla e, \nabla e)_\Omega &= (e_t, u-u_h)_\Omega + (\nabla e, \nabla(u-u_h))_\Omega \\ &= (e_t, u-v)_\Omega + (\nabla e, \nabla(u-v))_\Omega.\end{aligned}$$

そして、0 から t まで積分すると、

$$\frac{1}{2}\left(\|e(t))\|_\Omega^2 - \|e(0)\|_\Omega^2\right) + \int_o^t \|e\|_1^2 ds \le \|e_t\|\|u-v\| + \int_0^t (\|e\|_1^2\|u-v\|_1^2) ds.$$

ここで、$\|e(t)\|_\Omega^2 \ge 0$, $\|e(0)\|_\Omega^2 = 0$ より、

$$\int_0^t \|e\|_1^2 ds \le \|e_t\|\|u-v\| + \frac{1}{2}\left(\int_0^t \|e\|_1^2 ds + \int_0^t \|u-v\|_1^2 ds\right).$$

(12) と、補題 4 の仮定を満たす u_h を v に用いれば、

$$\begin{aligned}\|u-v\|_\Omega &= \|u-u_h\|_\Omega \\ &\le C_1 h\|u-u_h\|_1 \\ &\le C_1^2 h^2 |u|_{H^2}\end{aligned}$$

より、J 上で積分して、

$$\|u-v\| \le C_1^2 h^2 |u|_{H^2(Q)}.$$

ここで、

$$|u|_{H^2(Q)}^2 = \int_0^T |u|_{H^2}^2 dt.$$

よって、

$$\begin{aligned}\int_0^t \|e\|_1^2 ds &\le 2\|e_t\| C_1^2 h^2 |u|_{H^2(Q)} + C_1^2 h^2 |u|_{H^2(Q)}^2 \\ &\le 2C_1^2 h^2 \left\{(\|u_t\| + \|(u_h)_t\|)|u|_{H^2(Q)} + \frac{1}{2}|u|_{H^2(Q)}^2\right\}. \qquad (15)\end{aligned}$$

また、a priori 評価 (7) の証明と同様な考えで、$v = (u_h)_t$ として (13) に代入すると、

$$((u_h)_t, (u_h)_t)_\Omega + (\nabla u_h, \nabla(u_h)_t)_\Omega = (g, (u_h)_t)_\Omega$$

より、

$$\|(u_h)_t\| \le \|g\|. \qquad (16)$$

よって、a priori 評価 (7), (10), と、(15), (16) より、

$$\begin{aligned}\int_0^t \|e\|_1 &\le 2C_1^2 h^2 \{(\|u_t\| + \|(u_h)_t\|)|u|_{H^2(Q)} + \frac{1}{2}|u|_{H^2(Q)}^2\} \\ &\le 2C_1^2 h^2 \{(\|g\| + \|g\|)\cdot 2\|g\| + \frac{1}{2}\cdot 4\|g\|^2\}.\end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^t \|u-u_h\|_1^2 ds \le 12 C_1^2 h^2 \|g\|^2,$$

つまり、

$$\left(\int_0^t \|u-u_h\|_1^2 ds\right)^{1/2} \leq 2\sqrt{3}C_1 h\|g\|\,.$$

よって補題 3 は証明された。■

以上の補題に基づいて、半離散化誤差 $RE_x(Ag)\subset H$ を、

$$RE_x(Ag)=\{\phi\in\widetilde{H}|\|\phi\|_{H_0}\leq 2\sqrt{3}C_1 h\|g\|\}$$

と定義する。そのとき、補題 3 により、$g\in L^2(J;L^2)$ で、

$$Ag\in R_x(Ag)+RE_x(Ag) \tag{17}$$

を得る。さらに、関数の集合 $G\subset L^2(J;L^2)$ に対し、同じように離散化 $R_x(AG)\subset S_h$, 離散化誤差 $RE_x(AG)\subset H$ を定義する。つまり、

$$R_x(AG) = \{R_x(Ag)|\ g\in G\}\,, \tag{18}$$

$$RE_x(AG) = \{\phi\in\widetilde{H}|\|\phi\|_{H_0}\leq 2\sqrt{3}C_1 h\|g\|\}\,. \tag{19}$$

$\mathbf{R}^+$ を非負実数全体とする。$\forall\alpha\in\mathbf{R}^+$ に対して、

$$[\alpha]\equiv\{\phi\in\widetilde{H}|\|\phi\|_{H_0}\leq\alpha\} \tag{20}$$

とする。$H(J;S_h)$ 上の有界、凸閉部分集合 $U_h,\ \alpha\,,\beta\,in\mathbf{R}^+$ に対し、記号 (U_h,α,β) を、

$$(U_h,\alpha,\beta)\equiv\{\phi\in\widetilde{H}|\phi\in U_h+[\alpha],\ \|\phi_t\|\leq\beta\}$$

と定義する。このとき、定理 4 と補題 3 から次の検証条件を得る。

定理 5 $U=(U_h,\alpha,\beta)$ に対し、$G=f(\cdot,U)$ とする。このとき、

$$\begin{array}{rcl} R_x(AG) & \subset & U_h\,, \\ \|RE_x(AG)\|_{H_0} & \leq & \alpha\,, \\ \|G\| & \leq & \beta \end{array} \tag{21}$$

ならば、(5) の解 $u\in\overline{U}$ が存在する。ここで、各関数の集合に対するノルムは、それらに含まれる関数のノルムの上限、つまり、

$$\|RE_x(AG)\|_{H_0}=\sup_{g\in G}\|RE_x(Ag)\|$$

とする。

上の定理の (21) は、(7) の評価より、$\|(Ag)_t\|\leq\beta$ であることを示している ($\|(Ag)_t\|=\|u_t\|\leq\|g\|\leq\beta$)。

証明 (17) と、$R_x(AG)$, $RE_x(AG)$ の定義 (18), (19) より、

$$AG\subset R_x(AG)+RE_x(AG)\,.$$

また、$\|RE_x(AG)\|_{H_0}\leq\alpha$ より、

$$RE_x(AG)\subset[\alpha]\,.$$

よって、

$$AG=Af(\cdot,U)\subset U_h+[\alpha]=U\,.$$

ゆえに、定理 4 より (5) の解 $u\in\overline{U}$ が存在する。■

4.2 全離散化

この節では、時間と空間方向への同時の離散化を用いた検証を考える。この節では、(1) の f に、次の仮定を加える。

(A4) $\forall u \in \widetilde{H}$ に対し、$f(\cdot, u)|_{t=0} \in H_0^1$.

J 上の有限次元空間 $S^k \subset \widetilde{H}^1 \equiv \{\phi \in H^1(J) | \phi(0) = 0\}, 0 < k < 1$ として、次の性質を持つものを導入する：$\forall u \in \widetilde{H}^1 \cap H^2(J)$ に対し、正定数 C_2, C_3 が存在して、

$$\inf_{\eta \in S^k} \|u - \eta\|_{L^2(J)} \leq \begin{cases} C_2 k^2 \|u''\|_{L^2(J)}, \\ C_3 k \|u'\|_{L^2(J)}. \end{cases} \tag{22}$$

$Q = \Omega \times J$ 上の近似空間に $S_{hk} = S_h \otimes S^k$ を採用する。簡単のため、固定した h に対し、$k = h$ とし、$S_x \equiv S_h$, $S_t \equiv S^h$, そして、$S_{xt} \equiv S_{hh}$ とする。

$g \in L^2(J; L^2)$ に対し、全離散化 $u^h = R(Ag) \in S_{xt}$ を、

$$\int_0^T \{(u_t^h, v)_\Omega + (\nabla u^h, \nabla v)_\Omega\} dt = \int_0^T (g, v)_\Omega dt, \quad v \in S_{xt} \tag{23}$$

を満たすものとする。このような u^h は一意に存在する。

$$\begin{aligned} &x \text{ 方向の projection} \quad P_x : H_0^1(\Omega) \to S_x, \\ &t \text{ 方向の projection} \quad P_t : L^2(J) \to S_t \end{aligned}$$

をそれぞれ、

$$\begin{aligned} &(\nabla(\phi - P_x\phi), \nabla v)_\Omega = 0, \quad v \in S_x, \\ &(\psi - P_t\psi, w)_J = 0, \quad w \in S_t \end{aligned}$$

で定義する。ここで、$(\cdot, \cdot)_J$ は、J 上の L^2 内積。

このとき、補題 3 に対応する次の補題を得る。

補題 6 $g \in H^1(J; L^2)$, $g(x, 0) \in H_0^1$ に対する (3), (23) の解をそれぞれ u, u^h とする。このとき、正定数 C が存在して、

$$\|\nabla(u - u^h)\| \leq Ch$$

を満たす。ここで、$C = C(g, \|u_t^h\|)$.

証明 $e = u - u^h$ とおく。補題 3 の証明のときのように考えていく。(3), (23) より、

$$\begin{aligned} \int_0^T \{(u_t, v)_\Omega + (\nabla u, \nabla v)_\Omega\} dt &= \int_0^T (g, v)_\Omega dt, \quad v \in S_{xt}, \\ \int_0^T \{(u_t^h, v)_\Omega + (\nabla u^h, \nabla v)_\Omega\} dt &= \int_0^T (g, v)_\Omega dt, \quad v \in S_{xt}. \end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^T \{(e_t, v)_\Omega + (\nabla e, \nabla v)_\Omega\} dt = 0.$$

補題 3 と同様にして、

$$\int_0^T \{(e_t, u^h - v)_\Omega + (\nabla e, \nabla(u^h - v))_\Omega\} dt = 0$$

がいえる。ゆえに、

$$\begin{aligned}\int_0^T \{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|e\|_\Omega^2 + (\nabla e, \nabla e)_\Omega\}dt &= \int_0^T \{(e_t, e)_\Omega + (\nabla e, \nabla e)_\Omega\}dt \\ &= \int_0^T \{(e_t, u-u^h)_\Omega + (\nabla e, \nabla(u-h^h))_\Omega\}ds \\ &= \int_0^T \{(e_t, u-v)_\Omega + (\nabla e, \nabla(u-v))_\Omega\}ds\,.\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{1}{2}\{\|e(T)\|_\Omega^2 - \|e(0)\|_\Omega^2\} + \|\nabla e\|^2 \le \|e_t\|\|u-v\| + \frac{1}{2}\|\nabla e\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla(u-v)\|^2\,.$$

ゆえに、

$$\|\nabla e\|^2 \le 2(\|e_t\|\|u-v\| + \frac{1}{2}\|\nabla(u-v)\|^2)\,. \tag{24}$$

特に、$v = P_tP_xu$ ととれば、(12), (22) を用いて、

$$\begin{aligned}\|u - P_tP_xu\| &= \|u - P_xu + u - P_tu - (u - P_xu - P_tu + P_tP_xu)\| \\ &\le \|u - P_xu\| + \|u - P_tu\| + \|u - P_xu - P_t(u - P_xu)\| \\ &\le 2\|u - P_xu\| + \|u - P_tu\| \\ &\le 2C_1^2h^2|u|_{H^2(Q)} + C_2h^2\|u_{tt}\|\,.\end{aligned} \tag{25}$$

また、

$$\begin{aligned}\|\nabla(u - P_tP_xu)\| &\le \|\nabla(u - P_xu)\| + \|\nabla(u - P_tu)\| + \|\nabla(u - P_xu - P_t(u - P_xu))\| \\ &\le 2\|\nabla(u - P_xu)\| + \|\nabla(u - P_tu)\| \\ &\le 2C_1h|u|_{H^2(Q)} + C_3h\|\nabla u_t\|\,.\end{aligned} \tag{26}$$

そこで、(25), (26) の右辺の評価をする。まず、(3) を t で偏微分して、

$$(u_{tt}, \phi)_\Omega + (\nabla u_t, \nabla\phi)_\Omega = (g_t, \phi)_\Omega\,, \quad \phi \in H_0^1\,. \tag{27}$$

$\phi = u_{tt}$ として、(27) を 0 から t まで積分すれば、

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u_{tt}\|_\Omega^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|_\Omega^2 ds &= \int_0^t (g_t, u_{tt})_\Omega ds \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^t (\|g_t\|_\Omega^2 + \|u_{tt}\|_\Omega^2)ds\,.\end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^t \|u_{tt}\|_\Omega^2 dt + \|\nabla u_t(t)\|_\Omega^2 - \|\nabla u_t(0)\|_\Omega^2 \le \int_0^t \|g_t\|_\Omega^2 dt\,. \tag{28}$$

g の t での滑らかさは、L^2 の意味で $\lim_{t\to 0} u_t = g(\cdot, 0) \in H_0^1$. よって、u_t は次の放物型方程式の解とする。

$$\begin{cases} \phi_t - \phi_{xx} = g_t, & (x,t) \in \Omega \times J\,, \\ \phi(x,0) = g(\cdot,0)\,, & x \in \Omega\,, \\ \phi(x,t) = 0\,, & (x,t) \in \partial\Omega \times J\,. \end{cases}$$

次を得る。

$$\|\nabla u_t(0)\|_\Omega \le \|\nabla g(\cdot,0)\|_\Omega \,.$$

これらより、(28) から、

$$\|u_{tt}\|^2 \le \|\nabla g(\cdot,0)\|_\Omega^2 + \|g_t\|^2 \,. \tag{29}$$

さらに、(27) で、$\phi = u_t$ にとり、0 から T まで積分し、$u_t(0) = g(\cdot,0)$ に注意すると、

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_\Omega^2 ds + \int_0^T \|\nabla u_t\|_\Omega^2 ds = \int_0^T (g_t, u_t)_\Omega ds \,,$$

$$\frac{1}{2}(\|u(T)\|_\Omega^2 - \|u_t(0)\|_\Omega^2) + \|\nabla u_t\|^2 \le \frac{1}{2}(\|g_t\|^2 + \|u_t\|^2) \,.$$

よって、a priori 評価 (7) を使うと、

$$\|\nabla u_t\|^2 \le \frac{1}{2}\|g_t\|^2 + \|g(\cdot,0)\|_\Omega^2 + \|g\|^2. \tag{30}$$

(7), (10) と、

$$\|e_t\| \le \|u_t^h\| + \|u_t\|$$

の評価と、(24) から (30) を用いれば、

$$\begin{aligned}
\|\nabla e\|^2 &\le 2(\|e_t\|\|u-v\| + \frac{1}{2}\|\nabla(u-v)\|^2) \\
&\le 2\left\{(\|u_t^h\| + \|u_t\|)(2C_1^2h^2|u|_{H^2(Q)} + C_2h^2\|u_t t\|) + \frac{1}{2}(2C_1h|u|_{H^2(Q)} + C_3h\|\nabla u_t\|)^2\right\} \\
&\le 2\left\{\left(\|u_t^h\| + \|g\|\right)\left(2C_1^2h^2\cdot 2\|g\| + C_2h^2\left(\|\nabla g(\cdot,0)\|_\Omega^2 + \|g_t\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}h^2\left(2C_1\cdot 2\|g\| + C_3\left(\frac{1}{2}\left(\|g(\cdot,0)\|_\Omega^2 + \|g\|^2 + \|g_t\|^2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\} .
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&K_1 = \|u_t^h\| + \|g\| \,, && K_2 = 4\|g\| \,, \\
&K_3 = \|\nabla g(\cdot,0)\|_\Omega^2 + \|g_t\|^2 \,, && K_4 = \tfrac{1}{2}(\|g(\cdot,0)\|_\Omega^2 + \|g\|^2 + \|g_t\|^2)
\end{aligned}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}
\|\nabla e\|^2 &\le 2\left\{K_1(C_1^2K_2 + C_3\sqrt{K_3}) + \frac{1}{2}(C_1K_2 + C_3\sqrt{K_4})^2\right\}h^2 \\
&= C^2h^2 \,.
\end{aligned}$$

これより、補題 6 は証明された。■

以上の 補題 6 を用いて、全離散化誤差 $RE(Ag)$ を、上の C を使って、

$$RE(Ag) = \{\phi \in \widetilde{H} | \|\phi\|_{H_0} \le Ch\}$$

と定義する。さらに、$G \subset H^1(J;L^2)$, $G(\cdot,0) \subset H_0^1$ である関数の集合 G を用いて、$R(AG)$, $RE(AG)$ を (18), (19) と同じように各元 $g \in G$ に対する $R(Ag)$, $RE(Ag)$ の集合と定義する。

$\{\phi_j\}_{j=1,2,\ldots,M}$ を S_{xt} の基底、$\mathcal{S}_I$ を区間係数を持つ $\{\phi_j\}$ の一次結合全体とする。そのとき、定理 5 に対応した次の検証条件を得る。

定理 6 $U_h \in \mathcal{S}_I$, α, $\beta \in \mathbf{R}^+$ とする。$U = (U_h, \alpha, \beta)$ に対し、$G = f(\cdot, U)$ とする。もし、

$$\begin{aligned} R(AG) &\subset U_h\,, \\ \|RE(AG)\|_{H_0} &\leq \alpha\,, \\ \|G\| &\leq \beta\,, \end{aligned}$$

ならば、(5) の解 $u \in \overline{U}$ が存在する。

証明 $\forall g \in L^2(J; L^2)$ に対して、補題 6 より、

$$Ag \in R(Ag) + RE(Ag)\,.$$

よって、$R(AG)$, $RE(AG)$ の定義より、

$$AG \subset R(AG) + RE(AG)\,.$$

ここで、$\|RE(AG)\|_{H_0} \leq \alpha$ より、

$$RE(AG) \subset [\alpha]\,.$$

ゆえに、

$$AG = Af(\cdot, U) \subset U_h + [\alpha] = U\,.$$

定理 4 より、(5) の解が $u \in \overline{U}$ に存在する。■

5 計算機による解の検証アルゴリズム

以上のような事柄を踏まえ、反復法を用いた解の検証方法を述べる。

5.1 反復法

反復法は、適当な初期値を u_0^h, α_0, β_0 に持たせ、下で示されるような反復を繰り返し、定理 (6) の条件をみたすものを探していく方法である。なお、これらを計算機上で計算させる場合には、区間演算を用いるなどして、厳密 (な値が精度よく区間の中にあるように) に計算されなければならない。

5.2 反復手順

まず、$u_0^h \in S_{xt}$, $\alpha \in \mathbf{R}^+$ を近似的にとる。普通、u_0^h は (1) の S_{xt} 上の有限要素解に取られる。また、$\alpha_0 = 0$ とし、$\beta_0 = \|(u_0^h)_t\|$ とおく。$U_0 = (u_0^h, \alpha_0, \beta_0)$ とする。S_{xt} 上の有限要素解 u_0^h は、次のように表されていることとする。

$$u_0^h = \sum_{j=1}^{M} u_j^{(0)} \phi_j\,.$$

ここで、M は有限要素空間 S_{xt} の次元である。$u_j^{(0)}$ は、基底 $\{\phi_j\}$ に対する係数である。

ϵ_1, ϵ_2, $\epsilon_3 \geq 0$ を小さい正定数とし、$i \geq 1$ において、

$$u_{i-1}^h = \sum_{j=1}^{M} [\underline{u_j}^{(i-1)}, \overline{u_j}^{(i-1)}] \phi_j$$

を $(i-1)$ 回の反復をした後に得られる u^h とする。ここで、$[\cdot,\cdot]$ は、区間であり、それにより表される u^h_{i-1} は、

$$u^h_{i-1} = \left\{ \sum_{j=1}^{M} u_j^{(i-1)} \phi_j \middle| u_j^{(i-1)} \in [\underline{u_j}^{(i-1)}, \overline{u_j}^{(i-1)}], 1 \le j \le M \right\},$$

という関数の集合である。

そして、その u^h_{i-1}, α_{i-1}, β_{i-1} に対し、

$$\begin{aligned} \widetilde{u}^h_{i-1} &= \sum_{j-1}^{M} [\underline{u_j}^{(i-1)} - \epsilon_1, \overline{u_j}^{(i-1)} + \epsilon_1]\phi_j \,, \\ \widetilde{\alpha}_{i-1} &= \alpha_{i-1} + \epsilon_2 \,, \\ \widetilde{\beta}_{i-1} &= \beta_{i-1} + \epsilon_3 \,. \end{aligned}$$

そして、

$$\widetilde{U}_{i-1} = (\widetilde{u}^h_{i-1}, \widetilde{\alpha}_{i-1}, \widetilde{\beta}_{i-1})$$

というものを考える。このように ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, により、それぞれの変数の区間の幅を広げることを、ϵ-拡大という。そして、この $\widetilde{U}_{i-1}$, $\widetilde{\alpha}_{i-1}$, $\widetilde{\beta}_{i-1}$ に対して、$u^h_i \in \mathcal{S}_I$, α_i, β_i を、

$$\left((u^h_i)_t, \phi_j\right) + \left(\nabla u^h_i, \nabla \phi_j\right) \supset \left(f(\widetilde{U}_{i-1}), \phi_j\right), \quad 1 \le j \le M \,, \tag{31}$$

$$\alpha_i = h \cdot C\left(f(\widetilde{U}_{i-1}), \|(\widetilde{u}^h_i)_t\|\right), \tag{32}$$

$$\beta_i = \|f(\widetilde{U}_{i-1})\| \tag{33}$$

を満たすように決める。ここで、(31) の右辺は、区間係数を持つ $\widetilde{u}_{i-1}, \widetilde{U}_{i-1}$ によって計算されるため、区間値を成分に持つ区間ベクトルになる。u^h_i は、そのような区間ベクトルを右辺に持つ連立方程式の解として、(31) を成立させる最小の区間幅を持つものと定義する。

以後、記号の煩雑さを防ぐために、

$$\widetilde{u}^h_{i-1} = \sum_{j=1}^{M} u_j^{(i-1)} \phi_j$$

により、$\widetilde{u}^h_{i-1}$ を表すことにする。このとき、$u_j^{(i-1)}$ は区間であることに注意する。

このとき、定理 6 より、計算機上での反復法による検証条件を得る。

定理 7 ある反復回数 L に対し、

$$u^h_L \subset \widetilde{u}^h_{L-1}, \quad \alpha_L \le \widetilde{\alpha}_{L-1}, \quad \beta_L \le \widetilde{\beta}_{L-1} \tag{34}$$

ならば、(5) の解 $u \in \overline{U}_L$ が存在する。ここで、$U_L = (u^h_L, \alpha_L, \beta_L)$.

証明 反復式 (31), (32), (33) と、仮定より、

① $R(Af(\widetilde{U}_{N-1})) \subset \widetilde{u}^h_N \subset \widetilde{u}^h_{N-1}$,

② $\|RE(Af(\widetilde{U}_{N-1}))\|_{H_0} \le \alpha_N \le \widetilde{\alpha}^h_{N-1}$,

③ $\|f(\widetilde{U}_{N-1})\| = \beta_N \le \widetilde{\beta}_{N-1}$.

これより、定理 6 から、(5) の解が $u \in \overline{\widetilde{U}}_{N-1}$ に存在することがわかるが、もう一度①, ②, ③ を見ると、この u は、$u \in \overline{U}$,$U = (u^h_N, \alpha_N, \beta_N)$ にあることがわかる。■

5.3 ϵ-拡大について

反復法を用いて、ある回に $Af(U) \subset U$ になるような U まで U_i を拡大させていくわけだが、場合によっては、縮小に転ずることなく、ある集合 U' に収束してしまうことがある。この ϵ-拡大は、そうならないように、「無理やり U_i を大きく」して、「拡大 $\rightarrow$ 縮小」となるものを探させるようにしているのである。

6 実際の計算

次の方程式について有限要素法による近似方程式の構成を考える。有限要素法については、菊地 [5], [6] を参考にした。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t,u) = pu^2 + ([q_1,q_2],[q_1',q_2'])\,, & (x,t) \in \Omega \times J\,, \\ u(x,0) & = & 0\,, & x \in \Omega\,, \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0\,, & t \in J \end{array} \right.$$

ここで、$\Omega = (0,1)$, $J = (0,1)$, p は定数、$\mathcal{D} \equiv ([q_1,q_2],[q_1',q_2'])$ を次のような関数の集合とする。

$$\mathcal{D} = \{q \in H_0^1(\Omega) |\ q(x) \in [q_1,q_2]\,, q'(x) \in [q_1',q_2']\,, x \in \Omega\}\,.$$

いま、x, t 軸方向にそれぞれ N 等分した分割 δ_x, δ_t を考える。Ω,J 上の連続な区分 1 次関数の集合をそれぞれ $\mathcal{M}_x^1$, $\mathcal{M}_t^1$ とする。そして、$S_x = \{v \in \mathcal{M}_x^1 | v(0) = v(1) = 0\}$, $S_t = \{w \in \mathcal{M}_t^1 | w(0) = 0\}$ として、$S_{xt} = S_x \otimes S_t$ を有限要素近似空間とする。このとき、定数 C_1, C_2, C_3 は、

$$C_1 = \frac{1}{\pi}\,, \quad C_2 = \frac{1}{\pi^2}\,, \quad C_3 = \frac{1}{\pi}$$

であることが知られている (Schultz [21])。

このように有限要素分割された各要素の節点に、図 1 のように節点番号 $\{1,2,\ldots,M\}$ を付ける。各節点での座標を (x_j,y_j), $1 \le j \le M$ とする。また、各要素にも要素番号 $\{e_1,e_2,\ldots,e_E\}$ を付ける。このとき、総節点数は $M = (N+1)^2$, 総要素数は $E = N^2$ になる。

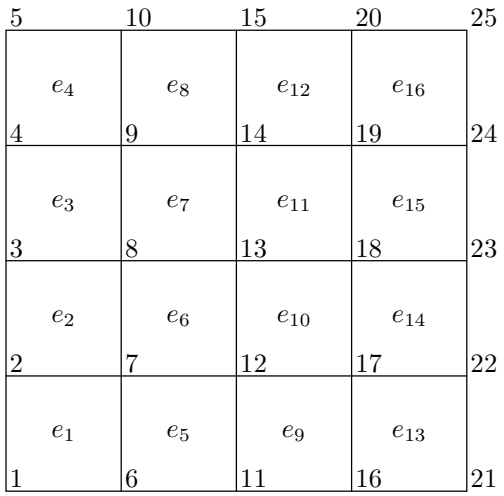


図 1: 要素分割の例 ($N = 4$)

6.1 基底関数

S_{xt} の基底関数は、双 1 次形式の山型関数で次を満たすものとする。

$$\phi_i(x_j, t_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} .$$

双 1 次とは、t を固定すると x について、また、x を固定すると t について線形になることである。基底関数 ϕ_j を具体的に表すと、次のような関数である。便宜的に、第 j 節点の上下左右の節点を n, s, w, e とする。

$$\phi_j(x,t) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x - x_w)(t - t_s)\,, & (x_w \leq x \leq x_j\,,\ t_s \leq t \leq t_j)\,, \\ (x - x_w)(t_n - t)\,, & (x_w \leq x \leq x_j\,,\ t_j \leq t \leq t_n)\,, \\ (x_e - x)(t - t_s)\,, & (x_j \leq x \leq x_e\,,\ t_s \leq t \leq t_j)\,, \\ (x_e - x)(t_n - t)\,, & (x_j \leq x \leq x_e\,,\ t_j \leq t \leq t_n)\,, \\ 0\,, & \text{それ以外の } (x,t)\,. \end{cases}$$

ただし、たとえば図 1 の第 1 節点では、(x_s, t_s), (x_w, t_w) は領域 Q から出てしまうため存在しない。このような領域 Q の外に出てしまう部分では $\phi_j(x,t) = 0$ とする。この基底関数により、有限要素空間 S_{xt} の任意の元 v^h は、

$$v^h = \sum_{i=1}^{M} v_i \phi_i$$

の形に書ける。このときの係数のベクトルを縦に並べたものを $\vec{v}$,

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{bmatrix}$$

と書くことにする。また、$(v^h)_t$, $(v^h)_x$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} (v^h)_t &= \sum_{i=1}^{M} v_i (\phi_i)_t\,, \\ (v^h)_x &= \sum_{i=1}^{M} v_i (\phi_i)_x\,. \end{aligned}$$

6.2 反復式 (31) の構成

前節で定義した $u_i^h \in S_{xt}$ の関数を用いて、反復式 (31) に代入すると、

$$\left(\sum_{k=1}^{M} u_k^{(i)} (\phi_k)_t, \phi_j \right) + \left(\sum_{k=1}^{M} u_k^{(i)} (\phi_k)_x, (\phi_j)_t \right) \supset (f(\widetilde{U}_{i-1}), \phi_j)\,, \quad 1 \leq j \leq M$$

となる。左辺について、$\sum$, $u_k^{(i)}$ を外に出して、

$$\sum_{k=1}^{M} (\phi_j, (\phi_k)_t)\, u_k^{(i)} + \sum_{k=1}^{M} ((\phi_j)_x, (\phi_k)_x)\, u_k^{(i)} \supset (f(\widetilde{U}_{i-1}), \phi_j)\,.$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&A = (A_{ij})\,, && A_{ij} = (\phi_j, (\phi_i)_t)\ ,\\
&D = (D_{ij})\,, && D_{ij} = ((\phi_j)_x, (\phi_i)_x)\ ,\\
&\overrightarrow{R}(\widetilde{U}_{i-1}) = (R_j(\widetilde{U}_{i-1}))\,, && R_j(\widetilde{U}_{i-1}) = \Big(f(\widetilde{U}_{i-1}), \phi_j\Big)
\end{aligned}
$$

という $M \times M$ 行列 A, D と、M 次縦ベクトル $\vec{R}(\widetilde{U}_{i-1})$ を考え、係数ベクトル

$$\vec{u_i} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots, u_M^{(i)})^T$$

(右肩^T は転置ベクトル) を用いて変形すると、

$$A\vec{u_i} + D\vec{u_i} \supset \vec{R}(\widetilde{U}_{i-1})$$

と書くことができる。ただし、右辺のベクトルは、$\widetilde{U}_{i-1} = (\widetilde{u}_{i-1}^h, \widetilde{\alpha}_{i-1}, \widetilde{\beta}_{i-1})$ についての関数であるので、区間による計算が必要になってくる。

6.3 係数行列 A, D の作成

行列 A,D の各成分 $(\phi_j, (\phi_i)_t)$, $((\phi_j)_x, (\phi_i)_x)$ は、そのまま計算してもかまわないが、たとえば、

$$
\begin{aligned}
(\phi_j, (\phi_i)_t) &= \int_0^1\!\!\int_0^1 \phi_j (\phi_i)_t dxdt\\
&= \sum_{k=1}^{E} \iint_{e_k} \phi_j (\phi_i)_t dxdt\\
&= \sum_{k=1}^{E} (\phi_j, (\phi_i)_t)_{e_k}
\end{aligned}
$$

と各要素 e_k 上で計算したものを足し合わせていくこともできる。このように、要素ごとに必要な量を計算し、和をとって近似方程式を組み立てる方法を、直接剛性法と呼ぶ。今回の場合、各長方形要素上での基底関数はその要素の 4 点の座標のみで構成されているので、各要素内での $(\phi_j, (\phi_i)_t)_e$, $((\phi_j)_x, (\phi_i)_x)_e$ は外の要素と独立して計算できる。

6.3.1 直接剛性法

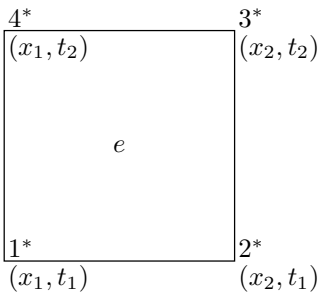


図 2: 代表要素 e

代表要素 e 上の局所節点番号 1^*,2^*,3^*,4^* を図 2 のようにとる。また、局所座標をそれぞれ $1^*(x_1, t_1)$, $2^*(x_2, t_1)$, $3^*(x_2, t_2)$,$4^*(x_1, t_2)$ ととる。このとき、e 上の局所節点番号 1^*,2^*,3^*,4^* に対

応する基底関数 ϕ_1^*, ϕ_2^*, ϕ_3^*, ϕ_4^* は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\phi_1^*(x,t) &= \frac{1}{h^2}(x_2-x)(t_2-t)\,,\\
\phi_2^*(x,t) &= \frac{1}{h^2}(x-x_1)(t_2-t)\,,\\
\phi_3^*(x,t) &= \frac{1}{h^2}(x-x_1)(t-t_1)\,,\\
\phi_4^*(x,t) &= \frac{1}{h^2}(x_2-x)(t-t_1)\,.
\end{aligned}$$

さらに、局所節点での u^h の値をそれぞれ u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^* とすると、e 上での u^h は、

$$u_e^h = \sum_{k=1}^{4} u_k^* \phi_k^*$$

で表される。また、$(\phi_k^*)_t$, $(\phi_k^*)_x$ $(1 \le k \le 4)$ は、

$$\begin{aligned}
(\phi_1^*(x,t))_t &= -\frac{1}{h^2}(x_2-x)\,,\\
(\phi_2^*(x,t))_t &= -\frac{1}{h^2}(x-x_1)\,,\\
(\phi_3^*(x,t))_t &= \frac{1}{h^2}(x-x_1)\,,\\
(\phi_4^*(x,t))_t &= \frac{1}{h^2}(x_2-x)\,.
\end{aligned}$$

そして、

$$\begin{aligned}
(\phi_1^*(x,t))_x &= -\frac{1}{h^2}(t_2-t)\,,\\
(\phi_2^*(x,t))_x &= \frac{1}{h^2}(t_2-t)\,,\\
(\phi_3^*(x,t))_x &= \frac{1}{h^2}(t-t_1)\,,\\
(\phi_4^*(x,t))_x &= -\frac{1}{h^2}(t-t_1)\,.
\end{aligned}$$

これらを用いて、e 上での $(\phi_i^*,(\phi_j^*)_t)_e$, $((\phi_i^*)_x,(\phi_j^*)_x)_e$ を計算する。$A_e = (A_{ij}^e)$, $D_e = (D_{ij}^e)$ として、

$$A_{ij}^e = (\phi_i^*,(\phi_j^*)_t)_e\,, \quad D_{ij}^e = ((\phi_i^*)_x,(\phi_j^*)_x)_e$$

という 4×4 行列を考えると、各成分は計算できて、$h = \dfrac{1}{N}$ とすると、

$$A_e = \frac{h}{12}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_e = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2 & -2\\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

となる。

以上により求まった A_e,D_e を A, D に直していくことを考える。各局所節点番号 1^*, 2^*, 3^*, 4^* を対応する全体節点番号に戻して各 A_e, D_e を A, D に加えていく。つまり、A_e, D_e を $M\times M$ 行列に拡大して、次のような行列 A_e^*, D_e^* を考える。例えば 要素 e_j における局所節点番号 1^*, 2^*,

3^*,4^* に対応する全体節点番号が k, l, m, n で、$k < l < m < n$ であったとすると、

$$A^*_{e_j} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & k & & l & & m & & n \text{ 列} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & A^e_{11} & \cdots & A^e_{12} & \cdots & A^e_{13} & \cdots & A^e_{14} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & A^e_{21} & \cdots & A^e_{22} & \cdots & A^e_{23} & \cdots & A^e_{24} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & A^e_{31} & \cdots & A^e_{32} & \cdots & A^e_{33} & \cdots & A^e_{34} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & A^e_{41} & \cdots & A^e_{42} & \cdots & A^e_{43} & \cdots & A^e_{44} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ k \text{ 行} \\ \\ l \\ \\ m \\ \\ n \\ \end{array}$$

と拡大する (その他の成分は 0)。同様に D_{e_j} の拡大 $D^*_{e_j}$ を作り、最終的な全体行列 A, D を、

$$A = \sum_{k=1}^{E} A^*_{e_k}\,, \quad D = \sum_{k=1}^{E} D^*_{e_k}$$

と和をとって構成する。

これらにより、第 1 式左辺で $1 \le j \le M$ で考えると、行列の形に書けることがわかった。行列 P を $P = A + D$ として、

$$P\overrightarrow{u_i} = A\overrightarrow{u_i} + D\overrightarrow{u_i}$$

としておく。

6.4 反復式 (31) の計算

(31) の右辺は、次のように計算する。まず、$\widetilde{U}_{i-1} = \widetilde{u}^h_{i-1} + [\widetilde{\alpha}_{i-1}]$ と書けるので、

$$\begin{aligned} \left(f(\widetilde{U}_{i-1}), \phi_j\right) &= \left(p\left(\widetilde{u}^h_{i-1} + [\widetilde{\alpha}_{i-1}]\right)^2 + q, \phi_j\right) \\ &= \left(p\left((\widetilde{u}^h_{i-1})^2 + 2\widetilde{u}_{i-1}[\widetilde{\alpha}_{i-1}] + [\widetilde{\alpha}_{i-1}]^2\right) + q, \phi_j\right) \\ &= p\left\{\left((\widetilde{u}^h_{i-1})^2, \phi_j\right) + 2(\widetilde{u}^h_{i-1}[\widetilde{\alpha}_{i-1}], \phi_j) + ([\widetilde{\alpha}_{i-1}]^2, \phi_j)\right\} + (q, \phi_j) \qquad (35) \end{aligned}$$

となる。ここで、各式、各等号などは関数の集合としての計算であることに注意する。たとえば、上の式 (35) の計算は、$v \in \widetilde{u}^h_{i-1}$, $a \in [\widetilde{\alpha}_{i-1}]$ で作られる全ての $v + a$ について計算したものの全体の集合が、「$=$」として表されていることに注意する。そして、各項は、

$$\begin{aligned} \left((\widetilde{u}^h_{i-1})^2, \phi_j\right) &= \left(\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} u^{(i-1)}_k u^{(i-1)}_l \phi_k\phi_l, \phi_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} u^{(i-1)}_k u^{(i-1)}_l \left(\phi_k\phi_l, \phi_j\right)\,, \\ \left(\widetilde{u}^h_{i-1}[\widetilde{\alpha}_{i-1}], \phi_j\right) &\le \|\widetilde{u}^h_{i-1}[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\|\|\phi_j\| \\ &\le \|\widetilde{u}^h_{i-1}\|_{L^\infty}\|[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\|\|\phi_j\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{\alpha}_{i-1}\widetilde{\beta}_{i-1}\|\phi_j\|\,, \qquad (36)\\
\left([\widetilde{\alpha}_{i-1}]^2,\phi_j\right) &\leq \|\widetilde{\alpha}_{i-1}\|^2\|\phi_j\|\\
&\leq \widetilde{\alpha}_{i-1}^2\|\phi_j\|\,,\\
(q,\phi_j) &\leq \|q\|\|\phi_j\|\,,
\end{aligned}
$$

のように見積もることができる。やはり、ここでのノルムは各元について計算されたノルムの上限として表されている。また、(36) で、$\|\widetilde{u}_{i-1}^h\|_{L^\infty}$ について、次のような評価を行った。$u \in \widetilde{U}_{i-1}$ に対し、$\Omega = (a,b)$ であるとき、$\forall x \in \Omega$ に対して、$d = \sqrt{b-a}$ で、

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \left|\int_0^x u_x(\xi,t)d\xi\right|\\
&\leq d\sup_{t\in J}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\lesseqgtr d\|f(\cdot,\widetilde{U}_{i-2})\|\\
&= d\beta_{i-1}
\end{aligned}
$$

と評価する。ここで、$\lesseqgtr$ の部分に関し、本来なら $\|f(\cdot,\widetilde{U}_{i-2})\|$ は $\|f(\cdot,\widetilde{U}_{i-1})\|$ と変形されるべきだが、反復終了時には $\beta_N \leq \beta_{N-1}\,,\ (\|f(\cdot,\widetilde{U}_N)\| \leq \|f(\cdot,\widetilde{U}_{N-1})\|)$ となることより、上のように考えても検証の結論には影響しないと考える。これより、少し大きくして、

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(Q)} &\leq d(\beta_{i-1}+\epsilon_3)\\
&= d\widetilde{\beta}_{i-1}
\end{aligned}
$$

と考える。これより、

$$
\|\widetilde{u}_{i-1}^h[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{\beta}_{i-1}\widetilde{\alpha}_{i-1}\,. \qquad (37)
$$

これらの見積もりより、右辺は、

$$
\begin{aligned}
(f(\widetilde{U}_{i-1}),\phi_j) \subset\ & p\left\{\sum_{k,l=1}^{M} u_k^{(i-1)}u_l^{(i-1)}(\phi_k\phi_l,\phi_j) + [-1,1]\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\widetilde{\alpha}_{i-1}\widetilde{\beta}_{i-1}\|\phi_j\| + \widetilde{\alpha}_{i-1}^2\|\phi_j\|\right)\right\}\\
&+[-1,1]\|q\|\|\phi_j\| \qquad (38)
\end{aligned}
$$

という区間に含まれることがわかった。そこで、新たにこの式 (38) の $1 \leq j \leq M$ による縦ベクトル $\overrightarrow{R'}(\widetilde{U}_{i-1})$ を (31) の右辺と見て、区間係数の連立方程式、

$$
P\overrightarrow{u_i} \supset \overrightarrow{R'}(\widetilde{U}_{i-1}) \qquad (39)
$$

の区間の解ベクトルを係数に持つをものを u_i^h とするのである。

6.5 境界条件の考慮

6.2 節, 6.3 節, 6.4 節で構成した反復式 (39) は境界条件を考慮していない。方程式 (1) の境界条件により、境界条件の課される辺上にある節点番号の集合を BC とすると、それに属する節点番号 j における $u_j^{(i)}$ の値は 0 である。よって、連立方程式の左辺の係数行列 P の第 (j,j) 成分を 1, それ以外の第 j 行、第 j 列の成分を 0 として、さらに、右辺 $\overrightarrow{R}(\widetilde{U}_{i-1})$ の第 j 成分を 0 に取れば、連立方程式の解として $u_j^{(i)} = 0$ が自動的に求められる。

6.6 反復式 (32) の計算

式 (32) で出てくる C、

$$C^2 = 2\left\{K_1\left(C_1^2K_2 + C_2\sqrt{K_3}\right) + \frac{1}{2}\left(C_1K_2 + C_3\sqrt{K_4}\right)^2\right\}$$

を見積もる。各 K_1, K_2, K_3, K_4 は、

$$\begin{aligned}
K_1 &= \|f(\widetilde{U}_{i-1})\| + \|(\widetilde{u}_i^h)_t\|\,, \\
K_2 &= 4\|f(\widetilde{U}_{i-1})\|\,, \\
K_3 &= \|\nabla f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega^2 + \|f_t(\widetilde{U}_{i-1})\|^2\,, \\
K_4 &= \frac{1}{2}\left(\|f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega^2 + \|f(\widetilde{U}_{i-1})\|^2 + \|f_t(\widetilde{U}_{i-1})\|^2\right)
\end{aligned}$$

であったので、$\|(\widetilde{u}_i^h)_t\|$, $\|\nabla f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega$, $\|f_t(\widetilde{U}_{i-1})\|$, $\|f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega$ をそれぞれを計算して見積もっていく。

(i) $\|(\widetilde{u}_i^h)_t\|$.

$$\|(\widetilde{u}_i^h)_t\| = \sqrt{((\widetilde{u}_i^h)_t, (\widetilde{u}_i^h)_t)}$$

から、行列 B,

$$B = (B_{ij})\,, \quad B_{ij} = ((\phi_i)_t, (\phi_j)_t)$$

を新しく作り、それを用いると、

$$\|(\widetilde{u}_i^h)_t\|^2 = \overrightarrow{\widetilde{u}_i}^T B \overrightarrow{\widetilde{u}_i}$$

と書けるので、よって、

$$\|(\widetilde{u}_i^h)_t\| = \sqrt{\overrightarrow{\widetilde{u}_i}^T B \overrightarrow{\widetilde{u}_i}}\,.$$

(ii) $\|f(\widetilde{U}_{i-1})\|$.

$$\begin{aligned}
\|f(\widetilde{U}_{i-1})\| &= \|p\left((\widetilde{u}_{i-1}^h)^2 + 2\widetilde{u}_{i-1}^h[\widetilde{\alpha}_{i-1}] + [\widetilde{\alpha}_{i-1}]^2\right) + q\| \\
&\le p\left(\|(\widetilde{u}_{i-1}^h)^2\| + 2\|\widetilde{u}_{i-1}^h[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\| + \|[\widetilde{\alpha}_{i-1}]^2\|\right) + \|q\|\,. \qquad (40)
\end{aligned}$$

ここで、$\|\widetilde{u}_{i-1}^h[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\|$, $\|[\widetilde{\alpha}_{i-1}]^2\|$, $\|q\|$ は、前述しであるように評価できる。そして、

$$\begin{aligned}
\|(\widetilde{u}_{i-1}^h)^2\|^2 &= ((\widetilde{u}_{i-1}^h)^2, (\widetilde{u}_{i-1}^h)^2) \\
&= \sum_{j,k=1}^{M}\sum_{l,m=1}^{M} u_j^{(i-1)}u_k^{(i-1)}u_l^{(i-1)}u_m^{(i-1)}(\phi_j\phi_k, \phi_l\phi_m)
\end{aligned}$$

と計算できる。

(iii) $\|\nabla f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega$ は、合成関数の微分法を用いて、

$$\|\nabla f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega = \|\left\{2p(\widetilde{u}_{i-1}^h + \widetilde{\alpha}_{i-1})\left(\nabla(\widetilde{u}_{i-1}^h + \widetilde{\alpha}_{i-1})\right) + q'(x)\right\}|_{t=0}\,\|_\Omega$$

とできるが、$\widetilde{u}_{i-1}^h$, $[\widetilde{\alpha}_{i-1}] \subset \widetilde{H}$ であることより、前の項は 0 になるので、よって、

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega &= \|q'(x)\|_\Omega \\
&\le \left|[q_1', q_2']\right|\,. \qquad (41)
\end{aligned}$$

ここで、区間の絶対値は $\left|[a,b]\right| = \max\{|a|,|b|\}$ である。

(iv) $\|f_t(\widetilde{U}_{i-1})\|$. これも、合成関数の微分法を用いて、

$$\begin{aligned}\|f_t(\widetilde{U}_{i-1})\| &= \|2p(\widetilde{u}^h_{i-1}+[\widetilde{\alpha}_{i-1}])\left((\widetilde{u}^h_{i-1}+[\widetilde{\alpha}_{i-1}])_t\right)\| \\ &\leq 2p\|\widetilde{u}^h_{i-1}+[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\|\|(\widetilde{u}^h_{i-1}+[\widetilde{\alpha}_{i-1}])_t\| \\ &\leq 2p\widetilde{\beta}_{i-1}(\|\widetilde{u}^h_{i-1}\|+\|[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\|)\,.\end{aligned}$$

これより、行列 M、

$$M=(M_{ij})\,,\quad M_{ij}=(\phi_i,\phi_j)$$

を新しく作り、それを用いると、

$$\|\widetilde{u}^h_{i-1}\|=\sqrt{\overrightarrow{\widetilde{u}_{i-1}}^{\,T}M\overrightarrow{\widetilde{u}_{i-1}}}$$

と書けるので、よって、

$$\|f_t(\widetilde{U}_{i-1})\|\leq 2p\widetilde{\beta}_{i-1}\left(\sqrt{\overrightarrow{\widetilde{u}_{i-1}}^{\,T}M\overrightarrow{\widetilde{u}_{i-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{\alpha}_{i-1}\right) \tag{42}$$

と見積もることができる。

(v) $\|f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega$. これも、$\widetilde{u}^h_{i-1}$, $[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\subset\widetilde{H}$ から、

$$\begin{aligned}\|f(\cdot,t,\widetilde{U}_{i-1})|_{t=0}\|_\Omega &= \|\left\{p\left((\widetilde{u}^h_{i-1})^2+2\widetilde{u}^h_{i-1}[\widetilde{\alpha}_{i-1}]+[\widetilde{\alpha}_{i-1}]^2\right)+q(x)\right\}|_{t=0}\|_\Omega \\ &= \|q(x)\|_\Omega\,. \\ &\leq \left|[q_1,q_2]\right| \end{aligned}\tag{43}$$

となる。

ここで出てきた行列 B, M も、先ほど出てきた A, D と同様に、各要素ごとに計算できる局所的な行列,

$$B_e=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1&-1&-2\\1&2&-2&-1\\-1&-2&2&1\\-2&-1&1&2\end{bmatrix},\quad M_e=\frac{h^2}{36}\begin{bmatrix}4&2&1&2\\2&4&2&1\\1&2&4&2\\2&1&2&4\end{bmatrix},$$

を拡大して足し合わせることによって得ることができる。

以上により、各 K_1, K_2, K_3, K_4, が見積もられ、定数 C を評価することができる。反復の際には、この見積もりによってできた値 C' を用いて次の α_i を計算することになる。

6.7 反復式 (33) の計算

$$\beta_i=\|f(\widetilde{U}_{i-1})\|$$

であるが、$\|f(\widetilde{U}_{i-1})\|$ は、(40) ですでに評価されている。この評価を次の β_i とするのである。

7　数値実験

この章では、具体的な方程式による解の検証を行う。考える問題は、次のものである。

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} &=& f \equiv pu^2 + q\,, & (x,t) \in \Omega \times J\,, \\ u(x,0) &=& 0\,, & x \in \Omega\,, \\ u(0,t) &=& u(1,t) = 0\,, & t \in J\,. \end{array}\right.$$

考える領域は、$\Omega = (0,1)$, $J = (0,1)$ の正方行列である。また、p, q は次のようなものにした。

$$p = 0.04\,, \quad q(x) = 3\sin(\pi x)\,.$$

このとき、

$$q'(x) = 3\pi\cos(\pi x)$$

である。この場合、$\|q\|$, $\|q'\|$ は普通に計算できて、

$$\|q\| = \|q\|_\Omega = \frac{3}{\sqrt{2}}\,, \quad \|q'\| = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

になる。この方程式で、初期条件を $u_0^h = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\beta = 0$ にして反復させ、解の検証に成功した場合の u_L^h, α_L, β_L を、各辺の分割数 N を変化させた場合の変化を見る。この章で使われている関数、定数については、§6 のものを使う。使用するプログラムは次章で解説する。

7.1　事前の計算

反復式 (31) の中で、$1 \le j \le M$ に対する (q, ϕ_j) を計算しなければならない。この計算も、各要素ごとに計算した和、

$$(q, \phi_j) = \sum_{k=1}^{E} (q, \phi_j)_{e_k}$$

とできるので、直接剛性法で計算できる。具体的に書くと、代表要素 e 上で局所節点番号 1^*, 2^*, 3^*, 4^* に対する $(q, \phi_i^*)_e$, $1 \le i \le 4$ は、

$$\begin{aligned}
(q,\phi_1^*)_e &= \iint_e 3\sin(\pi x)\cdot\frac{1}{h^2}(x_2 - x)(t_2 - t)\,dxdt \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{h\cos(\pi x_1)}{\pi} + \frac{\sin(\pi x_1)}{\pi^2} - \frac{\sin(\pi x_2)}{\pi^2}\right)\,, \\
(q,\phi_2^*)_e &= \iint_e 3\sin(\pi x)\cdot\frac{1}{h^2}(x - x_1)(t_2 - t)\,dxdt \\
&= \frac{3}{2}\left(-\frac{h\cos(\pi x_2)}{\pi} - \frac{\sin(\pi x_1)}{\pi^2} + \frac{\sin(\pi x_2)}{\pi^2}\right)\,, \\
(q,\phi_3^*)_e &= \iint_e 3\sin(\pi x)\cdot\frac{1}{h^2}(x - x_1)(t - t_1)\,dxdt \\
&= \frac{3}{2}\left(-\frac{h\cos(\pi x_2)}{\pi} - \frac{\sin(\pi x_1)}{\pi^2} + \frac{\sin(\pi x_2)}{\pi^2}\right)\,, \\
(q,\phi_4^*)_e &= \iint_e 3\sin(\pi x)\cdot\frac{1}{h^2}(x_2 - x)(t - t_1)\,dxdt \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{h\cos(\pi x_1)}{\pi} + \frac{\sin(\pi x_1)}{\pi^2} - \frac{\sin(\pi x_2)}{\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

となる。以上の q に関するデータをプログラムに埋め込み、実行させる。また、ϵ-拡大の値を、$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.01$ にした。

7.2 実験結果

7.2.1 解の存在証明

まず、この論文の本題である、方程式の解の検証を行う。適当な分割数 N を入力しプログラムを実行させ、反復が正常に終了したときに解が $U_L = (u_L^h, \alpha_L, \beta_L)$ の中に存在することが 定理 7 により証明されている。 $N = 16$ のとき、次の結果を得た (表 1)。

反復回数	$u_i^{(L)}$ の最大幅	そのときの節点番号	α_L	β_L
5	0.6553767336323	138	0.4076693071694	2.1646930943163

表 1: $N = 16$ のときの結果

このときの u_L^h の下限 `Inf(u)` , 上限 `Inf(u)` , これらを重ね合わせたものを 図 3、図 4、図 5 に載せる。実際には、この u_L^h に $[\alpha_N] \subset \widetilde{H}$ の誤差を付加した領域に厳密解が存在する。また、u_L^h の最大幅を取る第 138 節点に点を打った。

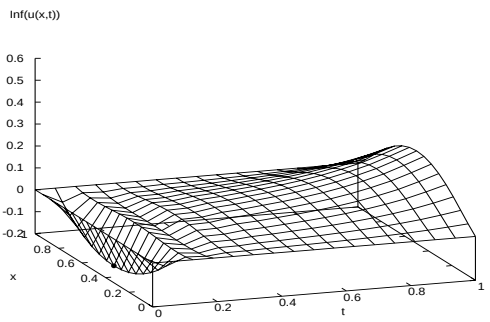


図 3: u_L^h の下限

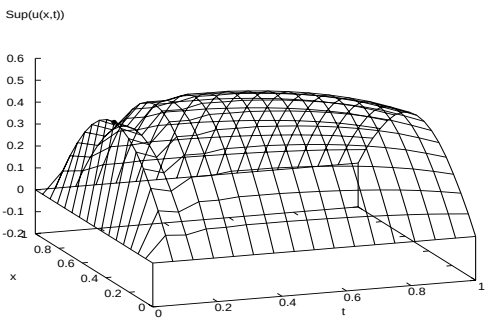


図 4: u_L^h の上限

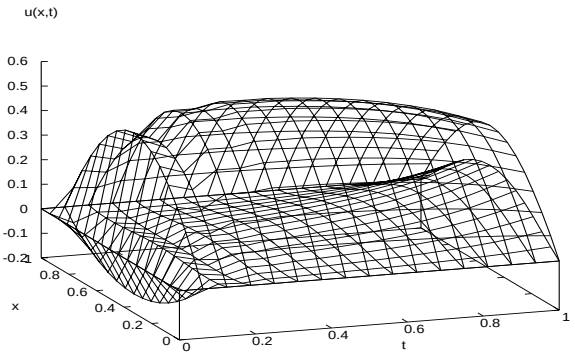
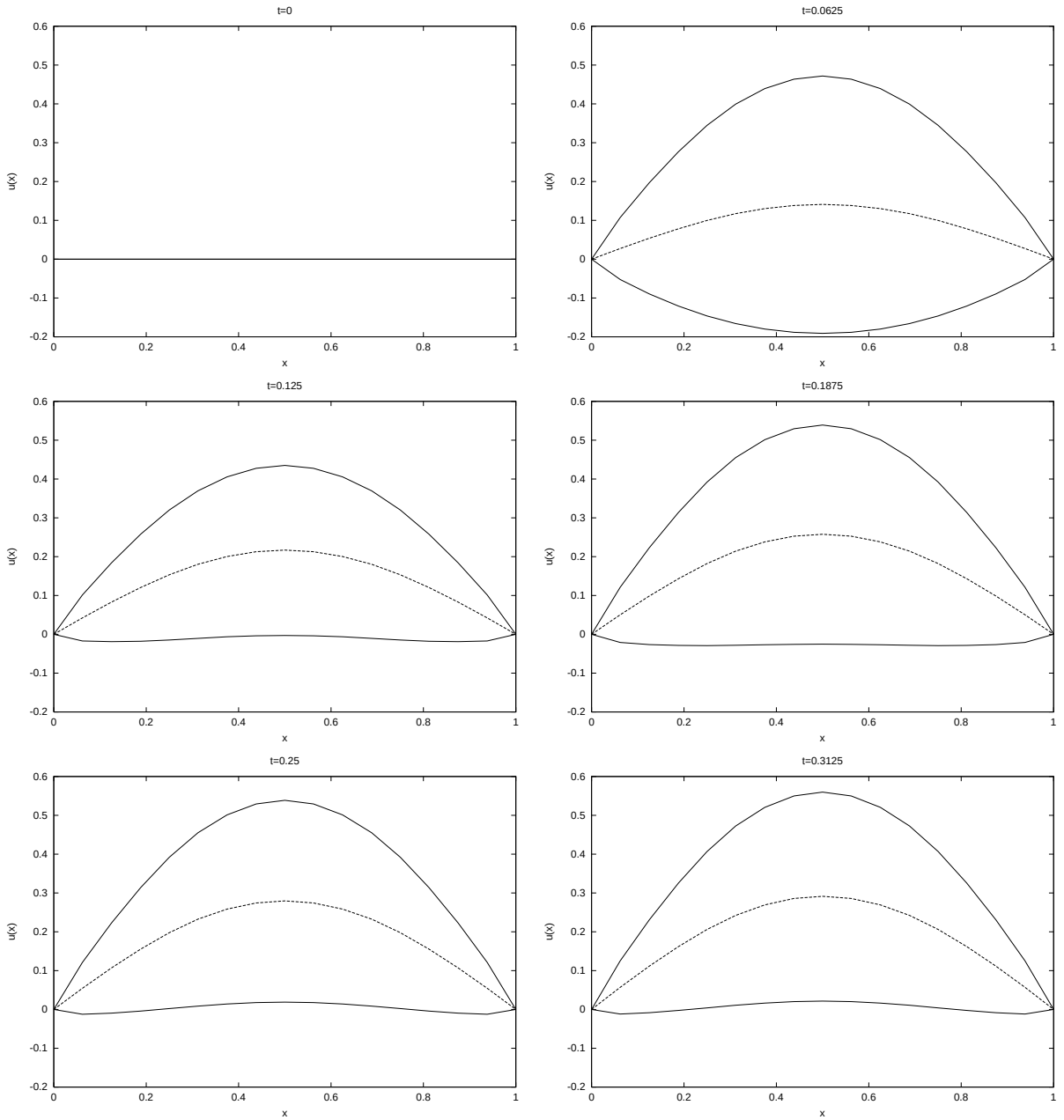
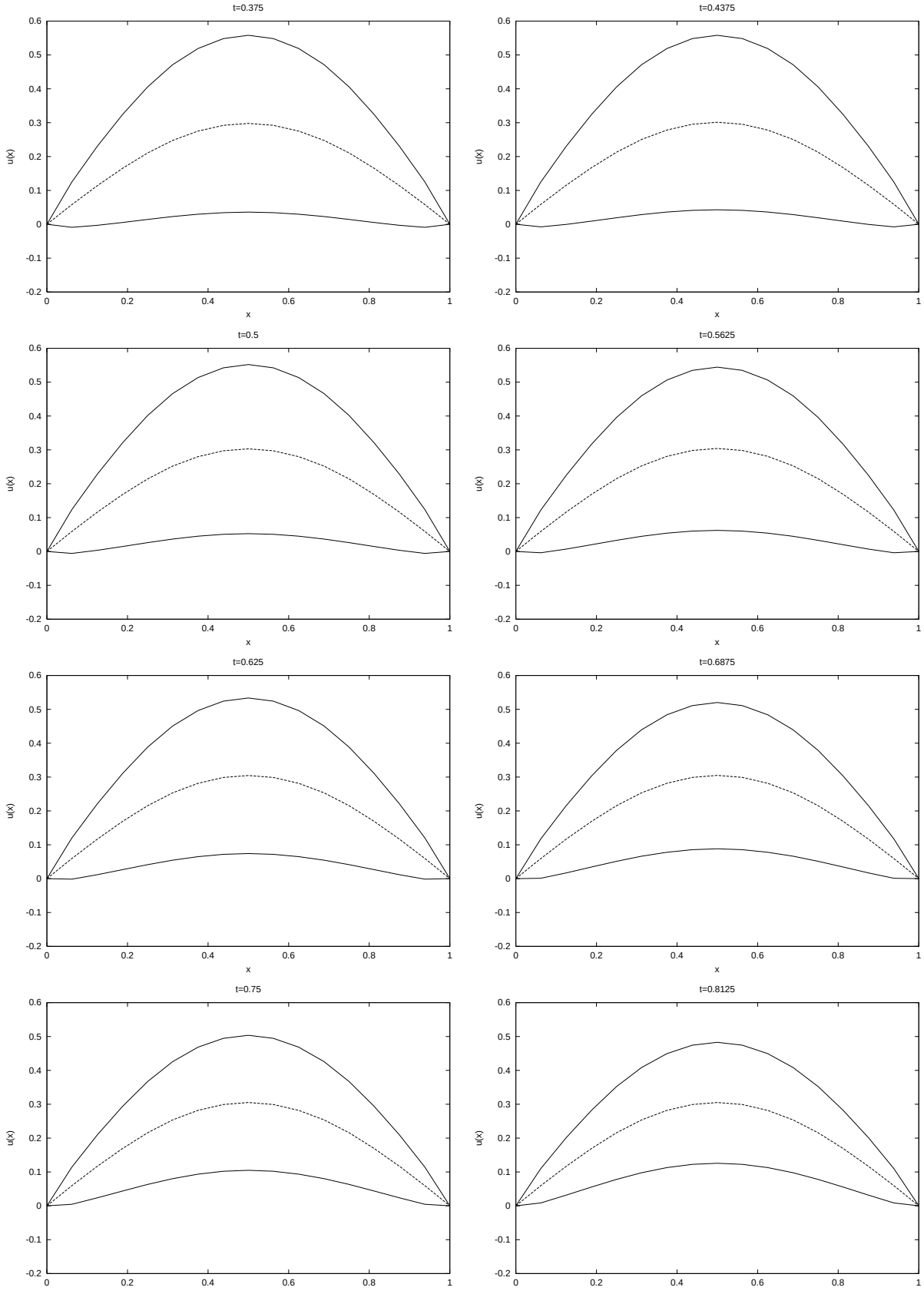
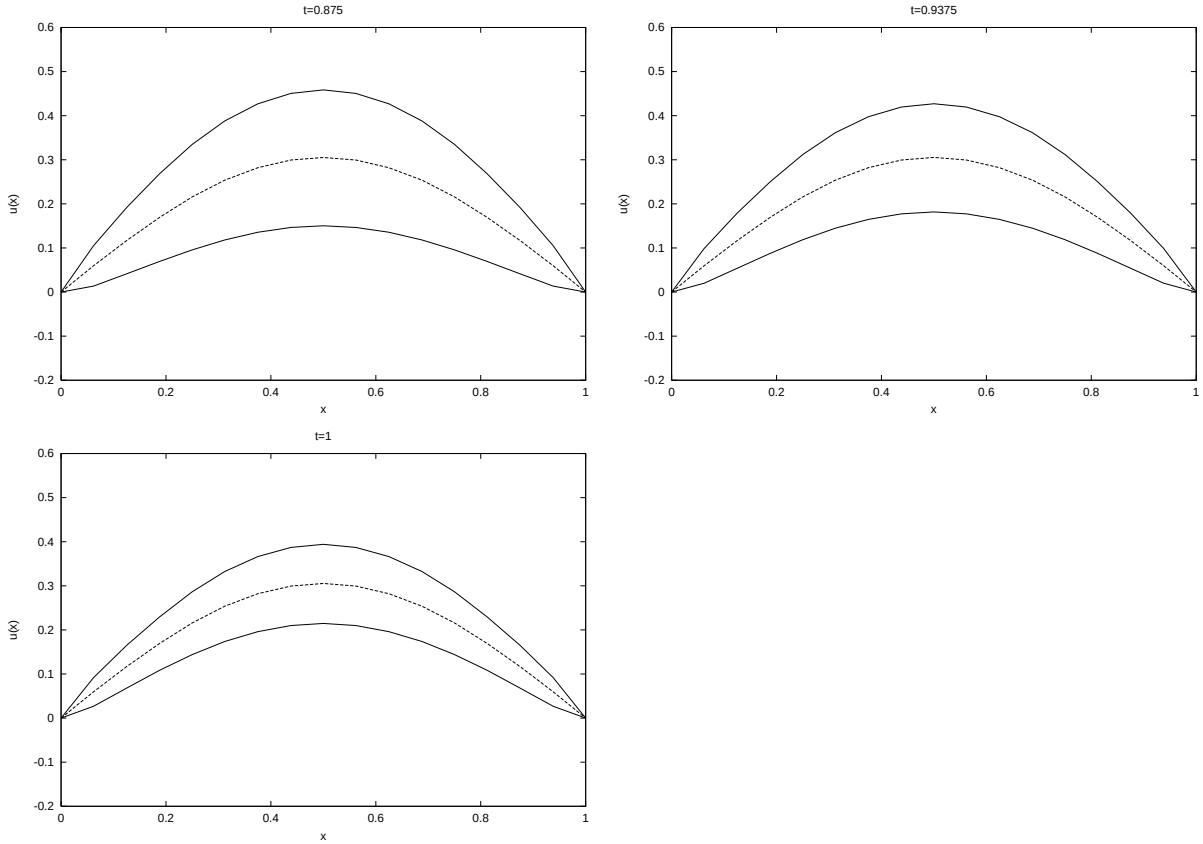


図 5: u_L^h の上限、下限を重ねたもの

また、このときの時刻 $t = \dfrac{1}{16}i$, $(0 \leq i \leq 16)$ における x-$u(x,t)$ グラフを並べる。また、点線は前進差分による差分解を示している。




t=0.375
t=0.4375
t=0.5
t=0.5625
t=0.625
t=0.6875
t=0.75
t=0.8125
u(x)
x



差分解はこの u_L^h の範囲のほぼ中心にあることがわかる。

7.2.2 分割数による解の存在範囲の変化

次は、各辺の分割数 N を変化させたときの、反復停止回数、u_L^h の最大幅 (そのときの節点番号), α_L, β_L の値の変化について実験する。$N = 5$ から 5 ずつ値を増やしていった場合の結果を示す。

分割数	反復回数	$u_i^{(L)}$ の最大幅	そのときの節点番号	α_L	β_L
5	4	0.3762793215893	20	1.0234900630511	2.2179629534257
10	5	0.5181718614140	57	0.5699899523671	2.1764899116579
15	5	0.6303045160255	130	0.4254919578928	2.1658480200771
20	5	0.7409833165203	212	0.3545983050901	2.1615995581754
25	6	0.8518629758547	340	0.3136005504054	2.1605324605872
30	6	0.9580449696207	467	0.2862162463423	2.1600979364456
35	6	1.0605561722043	650	0.2668998193086	2.1603516316170
40	7	1.1737566110372	822	0.2532749093715	2.1617369074106
45	7	1.2781909817318	1060	0.2423805047228	2.1629371091865

表 2: 分割数 N に対する各値の変化

7.3 実験の考察

まず、u_L^h の上限と下限との幅が広がっていることについて考える。これは、U そのものが解を包み込むように作られているので、$\widetilde{u}_{i-1}^h, \widetilde{\alpha}_{i-1}, \widetilde{\beta}_{i-1}$ の増加分全てが u_i^h に反映されてしまうからである。そのため、右辺の包み込み (38) が反復のたびに大きくなり、結果として u_L^h の幅が広がってしまうのである。また、方程式右辺の $q(x)$ が t に依らないことも、$t = \frac{1}{N}$ での大きな幅に影響してしまっている。

常微分方程式や、楕円型偏微分方程式の場合、このようなことを防ぐ手段として、残差方程式を用いる方法がある。方程式の解 u から、離散化方程式の解 u^h を引いた $w = u - u^h$ を考え、(1), (3), (23) のような w に関する方程式を導いて w を包み込むようなものを見つけるのである。詳しくは、中尾、山本 [16] を参照。

α の変化については、表 2 から、分割数と α_L を取り出したグラフ (図 6, 対数軸によるグラフ: 図 7) を見ると、分割数が増えるにつれ、α_L も減少している。α_L は、$[\alpha]$ の定義 (20) より、残差

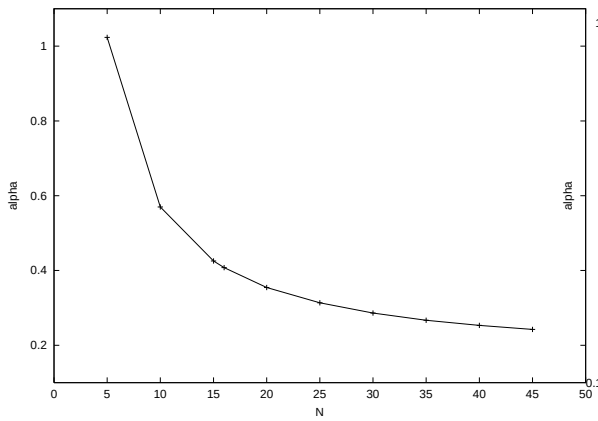


図 6: N-α_L グラフ

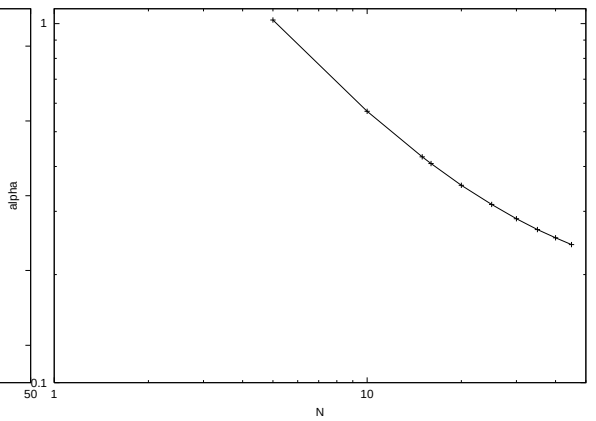


図 7: N-α_L 対数グラフ

$u - u_L^h$ の H_0 ノルムで測った最大の誤差を示していて、分割数が増えることにより解の誤差も小さくなっていることを示している。対数グラフにおける分割数 N に対する α_L の傾きはほぼ 1 であるが、分割が増えるにつれ、減少の度合いが緩やかになっている。これは u_L^h の幅が N を増やすと増加してしまうためであると考える。

β_L は、(40) で求められる $\|f(\widetilde{U}_{i-1})\|$ であるが、その中でも $\|q\| = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12132...$ がそのまま残ってしまうため、比較的大きい値になってしまっている。

7.4 その他の実験

7.4.1 ϵ-拡大

上の実験では、ϵ-拡大において、$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.01$ にした。これを変化させ、反復回数などにどのように影響するかを調べた (表 3)。分割数は $N = 16$ に固定した。
これを見ると、ϵ の値を小さくすると、反復停止までの回数が増えるが、結果 u_L^h, α_L, β_L の値にはそれほど影響していない。逆に反復停止を早くさせたいのなら、適当に ϵ の値を大きく取ればよさそうだが、今回の場合、$\epsilon_i = 1.0\,, (i = 1, 2, 3)$ にすると、3 回で検証が終了したが、u_L^h の最大幅が 5.0055812618364 にもなってしまい、結果の値の利用価値がなくなってしまう。

ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	停止回数	u_L^h の最大幅	α_L	β_L
0.01	0.01	0.01	5	0.6553767336323	0.4076693071694	2.1646930943163
0.0001	0.01	0.01	9	0.6593907423611	0.4081748227097	2.1645887481075
0.01	0.0001	0.01	8	0.6379570754958	0.4053192824581	2.1637773211044
0.01	0.01	0.0001	8	0.6562634281544	0.4078107222464	2.1649964549599
0.0001	0.0001	0.0001	9	0.6337651463457	0.4046864406982	2.1629249879284

表 3: ϵ-拡大の変化による値の変化

7.4.2 違う $q(x)$ での実験

上で実験した $q(x) = 3\sin \pi x$ の外に、x 上同じような曲線を持つ、

$$q(x) = 12x(1-x)$$

を使って実験する。この場合、

$$\|q\| = \|q\|_\Omega = \frac{12}{\sqrt{30}}\,, \quad \|q'\| = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

で、代表要素 e 上での $(q, \phi_i^*)_e\,, 1 \le i \le 4$ は、

$$\begin{aligned}(q, \phi_1^*)_e &= (q, \phi_4^*)_e = 6\left(\frac{x_2 - x_2^2}{2}h^2 + \frac{2x_2 - 1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4\right)\,,\\ (q, \phi_2^*)_e &= (q, \phi_3^*)_e = 6\left(\frac{x_1 - x_1^2}{2}h^2 + \frac{1 - 2x_1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4\right)\end{aligned}$$

となる。$N = 5$, $N = 10$, $N = 15$, $N = 20$ の場合を表 4 に表す。

分割数	反復回数	$u_i^{(L)}$ の最大幅	そのときの節点番号	α_L	β_L
5	4	0.4041997849447	20	1.0630731541857	2.2949041252270
10	5	0.5575456598455	57	0.5933455956728	2.2505368252445
15	5	0.6793514767948	114	0.4439256594673	2.2392276600925
20	6	0.8065113264982	212	0.3714703218985	2.2354468411004

表 4: $q(x) = 12x(1-x)$ の場合の表

結果は、それぞれの値こそ違っていても、全体の傾向として、$q(x) = 3\sin \pi x$ とほとんど変わっていない。

8 プログラムについて

この章では、6 章の手順を 7 章の問題を基に作ったプログラム"heat1d_verif.C" についての解説をする。6 章であるような計算は、PROFIL ライブラリ [20] により、精度よく区間演算される。

8.1 プログラムの流れ

プログラムは、大きく分けて 3 つに分けることができる。

1. 初期データの作成。
2. 行列 P, M, B の作成。
3. 解の検証。

これらを順に説明していく。

8.1.1 初期データの作成

領域 $Q = \Omega \times J$ に関するデータ : 総節点数、総要素数、境界条件を課す節点の数、各要素に属する節点番号の表、境界条件を課す節点の表 を `domain` という構造体に作成する。今回の場合、正方領域をそれぞれ N 等分しているので、総節点数は $(N+1)^2$, 総要素数は N^2, 境界条件を課す節点の数は $3N+1$ になる。また、各要素に属する節点番号は、要素左下の点を反時計回りに次のように表にする。たとえば 図 1 の場合、

[要素番号]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]
1^*	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14	16	17	18	19
2^*	6	7	8	9	11	12	13	14	16	17	18	19	21	22	23	24
3^*	7	8	9	10	12	13	14	15	17	18	19	20	22	23	24	25
4^*	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	15	17	18	19	20

となり、境界条件を課す節点番号は、

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25$$

になる。これらの初期データの作成は、関数 `input0()`, `input()` で行っている。

プログラム中に現れるこれらに関係する主な変数と論文中との表記の対応は次のようになる。

プログラム中の変数	論文中での表記
`Q.nnode`	総節点数。
`Q.nelmt`	総要素数。
`Q.nbc1`	境界条件を課す節点数。
`Q.ibc1`	境界条件を課す節点の表。
`Q.ielmt[].node[]`	各要素に属する節点の表。`Q.ielmt[i].node[j]` で、 第 $(i+1)$ 要素における局所節点 $(j+1)^*$ に対応する全体節点番号を示す。
`Q.cck[]`	境界条件を課す節点の表。第 i 節点が境界条件を課される場合、 `Q.cck[i-1]=1`, そうでなければ `0` .

8.1.2 各行列の作成

各行列の作成は、`makematrix()`, `assem()`, `ecm()` という関数で行っている。`ecm()` で代表要素 e での行列 A_e, D_e, M_e, B_e を作成し、`assem()` で 行列を拡大して全要素で足し合わせ、行列

$P = A + D$, M, B を作成している。そして、makematrix() で係数行列 P の境界条件の考慮をしている。

プログラム中に現れるこれらに関係する主な変数と論文中との表記の対応は次のようになる。

プログラム中の変数	論文中での表記
ae,de,me,be	代表要素 e での行列 A_e, D_e, M_e, B_e .
pm,mm,bm	行列 P, M, B .

これらの各成分は、区間であらわされている。また、pm は、境界条件を考慮したものである。

8.1.3 解の検証

verification() が解の検証の本体である。反復の初期値 u_0^h, α_0, β_0 を ϵ-拡大させてから、次のような手順を反復している。

1. 右辺ベクトル $\overrightarrow{R}(\widetilde{U}_{i-1})$ を関数 makeIntervalRightHandVector() で作成し、区間係数 P による連立方程式 (39) を解いて、u_i^h を求める。
2. (32) の C を関数 next_alpha() で計算し、α_i を求める。
3. next_beta() で β_i を求める。
4. 求まった u_i^h, α_i, β_i が、検証条件 (34) を成立させているかを見る。成立していたら検証終了。定理 7 により、$U_i = (u_i^h, \alpha_i, \beta_i)$ で作られる U_i の中に、(5) の解が存在することが証明された。
5. もし、検証条件を成立させなければ、u_i^h, α_i, β_i を ϵ-拡大させて、さらに反復する。

決められた反復回数のうちに検証条件を成立させなければ、反復回数オーバーで検証失敗とする。また、反復中に u_i^h, α_i, β_i が発散してしまっても検証失敗である。このような場合、反復の初期値を変えたりする必要がある。常微分方程式や、楕円型偏微分方程式の場合では、不動点形式自体を見直して、Newton 型の反復法を用いる方法が考えられている。詳しくは、中尾、山本 [16] を参照。

プログラム中に現れるこれらに関係する主な変数と論文中との表記の対応は次のようになる。下の i は、反復回数 ($i \geq 1$) である。

プログラム中の変数	論文中での表記
alpha,nxt_alpha	$\widetilde{\alpha}_{i-1}$, α_i .
beta,nxt_beta	$\widetilde{\beta}_{i-1}$, β_i .
u,nxt_u	$\widetilde{u}_{i-1}^h$ の係数ベクトル $\overrightarrow{\widetilde{u}_{i-1}}$, u_i^h の係数ベクトル $\overrightarrow{u}_i$.

8.1.4 その他の変数

上で紹介した以外の変数、定数と論文中の対応を挙げる。見てわかりやすいものは省いている。

プログラム中の変数、定数	論文中での表記
IH	正方形要素の一辺の長さを区間で計算したもの。
PI	π を区間で表したもの。
q_norm	$\|q\|$ または $\|q\|_\Omega$.
qp_norm	$\|q'\|_\Omega$.
f	$\|f(\widetilde{U}_{i-1})\|$ を (40) で見積もったもの。
fx	$\|f_x(\cdot, t, \widetilde{U}_{i-1})\|_{t=0}\|_\Omega$ を (41) で見積もったもの。
ft	$\|f_t(\widetilde{U}_{i-1})\|$ を (42) で見積もったもの。
f0	$\|f(\cdot, t, \widetilde{U}_{i-1})\|_{t=0}\|_\Omega$ を (43) で見積もったもの。
u2_norm	$\|\phi_j\|$.
u_alp_norm	$\|\widetilde{u}^h_{i-1}[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\|$ を (37) で見積もったもの。
alp2_norm	$\|[\widetilde{\alpha}_{i-1}]\|^2$ を見積もったもの。
three[4][4][4]	代表要素 e 上の $(\phi_k\phi_l, \phi_j)_e$ を計算した表。たとえば $k < j < l$ の場合、$(\phi_k\phi_l, \phi_j)_e$ の値は、three[k][j][l] で表される。このような添え字の並び替えに narabikae() 関数を用いる。
four[4][4][4][4]	代表要素 e 上の $(\phi_i\phi_j, \phi_k\phi_l)_e$ を計算した表。three[][][] と同様に、$(\phi_i\phi_j, \phi_k\phi_l)_e$ の値は、$i < j < k < l$ の場合、four[i][j][k][l] で表される。添え字の並び替えに narabikae() を用いる。

8.2 PROFIL の関数

プログラム中に用いた PROFIL の関数を挙げる。より詳しくは PROFIL [20] を参照。

関数	説明
Resize(v,n)	ベクトル v の次元を n に設定する。
Resize(A,n,n)	行列 A の大きさを $n \times n$ に設定する。
Clear(v),Clear(A)	ベクトル v, 行列 A の各成分を 0 にする。
Sqrt(x)	$\sqrt{x}$ の値を返す。x が区間の場合は、その値を包み込む $\mathbf{F}$ の区間を返す。
DivBounds(a,b)	点 a, b の商 $a \div b$ を包み込む $\mathbf{F}$ の区間を返す。
MulBounds(a,b)	点 a, b の積 $a \times b$ を包み込む $\mathbf{F}$ の区間を返す。
Sup(A)	区間 $A = [a, b]$ で表されているとき、b を返す。
Sup(v)	区間ベクトル v に対して第 i 成分が Sup(v(i)) であるベクトルを返す。
Inf(A)	区間 $A = [a, b]$ で表されているとき、a を返す。
Inf(v)	区間ベクトル v に対して第 i 成分が Inf(v(i)) であるベクトルを返す。
Hull(a)	点 a から区間 $[a, a]$ を作る。
SymHull(a)	点 a から区間 $[-a, a]$ を作る。
Abs(A)	区間 $A = [a, b]$ に対して、$\max\{|a|, |b|\}$ を返す。
Diam(A)	区間 $A = [a, b]$ に対して、$b - a$ を返す。
ILSS(A,b,i)	区間行列 A, 区間ベクトル b に関する連立方程式 $Ax \supset b$ の区間ベクトルによる解 x を返す。i には、解が求められなかった場合に 0 が代入され、x は不定。

参考文献

[1] H.Brezis (小西芳雄 訳), 関数解析, 産業図書, 1988.

[2] 藤田宏, 関数解析 (岩波講座 応用数学 15), 岩波書店, 1995.

[3] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三, 関数解析 (岩波基礎数学選書), 岩波書店, 1991.

[4] H.Fujita, T.Suzuki, Evoluation Problems, Handbook of Numerical Analysis, vol. II, 1991.

[5] 菊地文雄, 有限要素法概説, サイエンス社, 1980.

[6] 菊地文雄, 有限要素法の数理, 培風館, 1994.

[7] 黒田成俊, 関数解析 (共立数学講座 15), 共立出版, 1980.

[8] J.L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes, Dunod, 1968.

[9] J.L. Lions, E. Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, II, Springer, Berlin, 1972.

[10] M.Luskin, R.Rannacher, On the smoothing property of the Galerkin method for parabolic equations, SIAM J. Numer. Anal. 19, 1981.

[11] 増田久弥, 非線型楕円型方程式 (岩波講座基礎数学), 岩波書店, 1977.

[12] M.T. Nakao, A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, Japan Journal of Applied Mathematics 5, 1988.

[13] M.T. Nakao, A Computational Verification Method of Existence of Solutions for Nonlunear Elliptic Equations, Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 10, In Proc. Recent Topics in Nonlinear PED IV, Kyoto, 1988, North-Holland/ Kinokuniya, 1989.

[14] M.T. Nakao, Solving nonlinear parabolic problems with result verification. Part I : One-space dimensional case, Journal of Computational and Applied Mathematics 38, 1991.

[15] M.T. Nakao, Y. Watanabe, On computational proofs of the existence of solutions to nonlinear parabolic problems, Journal of Computational and Applied Mathematics 50, 1994.

[16] 中尾充宏, 山本野人, 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.

[17] 村田實, 倉田和弘, 偏微分方程式 1(現代数学の基礎 6), 岩波書店, 1997.

[18] 大石進一, 数値計算, 裳華房, 1999.

[19] 大石進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000.

[20] Olaf Knüppel, PROFIL – Programmer's Runtime Optimized Fast Interval Library, Technical Report 93.4, Technische Universität Humburg Harburg, 1993.
このライブラリ、レポート、リファレンスは以下の URL から入手できる。
(http://www.ti3.tu-harburg.de/Software/PROFILEnglisch.html)

[21] M.H.Schultz, Spline Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[22] 田端正久, 微分方程式の数値解法 II(岩波講座応用数学 10), 岩波書店, 1994.

[23] 田辺広城, 発展方程式 (数学選書), 岩波書店, 1975.