2002 年度卒業研究レポート

矩形領域・円盤領域におけるラプラシアンの固有値問題

4 年 16 組 66 番 福澤 誠人

指導教官 桂田 祐史 助教授

2003 年 3 月

目 次

1 問題 **1**
1.1 目標 . . . 1
1.2 この問題が現れる例 . . . 1

2 固有値と固有関数の理論値 **2**
2.1 固有値と固有関数の性質 . . . 2
2.2 矩形領域の場合 . . . 7
2.3 Bessel 関数 . . . 12
2.3.1 Bessel の方程式とその基本解 . . . 12
2.3.2 Bessel 関数の原点付近での有様 . . . 21
2.3.3 Bessel 関数の直交性と零点 . . . 22
2.3.4 Bessel 関数による任意関数の展開 . . . 27
2.3.5 以後の議論に用いることのまとめ . . . 28
2.4 円盤領域の場合 . . . 28

3 差分法による解法 **33**
3.1 正方領域の場合 . . . 33
3.1.1 差分作用素 A に対する固有値と固有ベクトル . . . 35
3.2 円盤領域の場合 . . . 37

4 実験結果 **40**
4.1 正方領域の場合 . . . 40
4.1.1 Octave を用いた場合 . . . 40
4.1.2 MATLAB を用いた場合 . . . 47
4.2 円盤領域の場合 . . . 48
4.2.1 Octave を用いた場合 . . . 48
4.2.2 MATLAB を用いた場合 . . . 52
4.3 プログラムリスト . . . 52
4.3.1 正方領域の場合のプログラム . . . 52
4.3.2 円盤領域の場合のプログラム . . . 61
4.4 実験についてのメモ . . . 69

5 最後に **73**

1 問題

1.1 目標

Dirichlet 境界条件における Laplace 作用素に関する固有値問題

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

を考える。ここで、

$$\begin{aligned} \Omega &: \mathbf{R}^n\text{の有界領域} \\ \partial\Omega &: \Omega\text{の境界} \\ \Delta &: \text{Laplace 作用素} \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) \end{aligned}$$

である。ある定数 λ に対して、(1) が $\varphi \equiv 0$ (自明解) とならない解を持つとき、この λ を (Dirichlet 境界条件下での)$-\Delta$ の 固有値 といい、その時の解 φ を λ に属する 固有関数 という。

また、(1) に対して

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

を Neumann 境界条件における Laplace 作用素に関する固有値問題という。ここで、$\partial/\partial\nu$ は境界 $\partial\Omega$ 上の外向き法線微分、すなわち $\partial\Omega$ の各点での外向き単位法線ベクトル ν に沿った方向微分を表す。 (2) も (Neumann 境界条件下での) 固有値と固有関数を与える。

目標は、(1) において、Ω が矩形領域、円盤領域の場合に数値シミュレーションをして理論値と比較することである。

1.2 この問題が現れる例

この問題 (1) や (2) は、熱伝導方程式や波動方程式の初期値境界値問題を Fourier の方法で解く際に現れる。例として、波動方程式の場合を挙げる。

膜の振動を変動を記述する方程式は (質量、加速度を考慮し、係数を多少簡略化すれば) 次のようになる。

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = f. \tag{3}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \varphi &: \text{時刻 } t, \text{位置 } (x,y) \text{ における膜の変位 } (x,y,t \text{ の未知関数}) \\ f &: x,y,t \text{ の既知関数} \end{aligned}$$

である。この問題において、$f = 0$ の場合に変数分離をした形

$$\varphi(x,y,t) = U(x,y)T(t)$$

の解を仮定して (3) に代入する。すると、

$$U(x,y)T''(t) = \Delta U(x,y)T(t)$$

となる。ここで、$T(t) \equiv 0$ ならば $\varphi \equiv 0$ となってしまうので、$T(t) \not\equiv 0$ である。ゆえに、 $^{\exists}t_0 \quad \text{s.t.} \quad T(t_0) \neq 0$ に対して

$$\Delta U(x,y) = \frac{T''(t_0)}{T(t_0)} U(x,y)$$

が成り立ち、$-\lambda = T''(t_0)/T(t_0)$ とおくと、

$$\Delta U = -\lambda U$$

という問題が得られる。ゆえに、境界条件により (1) や (2) と同値な問題が現れる。

2　固有値と固有関数の理論値

2.1　固有値と固有関数の性質

以下に、問題 (1),(2) に共通する性質をいくつか挙げる。

命題 2.1
$(1), (2)$ における固有値は非負の実数である。さらに、(1) では $\lambda = 0$ が固有値にならず、(2) では $\lambda = 0$ に属する固有関数が定数に限られる。

証明
方程式 $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ の両辺に共役複素数 $\bar{\varphi}$ を乗じて Ω 上で積分すると、

$$\int_\Omega \bar{\varphi}\Delta\varphi dx + \int_\Omega \lambda\bar{\varphi}\varphi dx = 0$$

ゆえに、

$$\int_\Omega \bar{\varphi}\Delta\varphi dx + \lambda\int_\Omega |\varphi|^2 dx = 0 \tag{4}$$

となる。ここで次の定理を用いる。

定理　(グリーンの定理)
Ω を $\mathbf{R}^n$ 内の領域とし、$u(x), v(x)$ をそれぞれ $\overline{\Omega}$ 上で定義された C^1-級、C^2-級関数とすると以下が成り立つ。

$$\int_\Omega (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} dS_x.$$

ここで、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

である。

この定理を用いると、

$$\int_\Omega (\bar{\varphi}\Delta\varphi + \nabla\bar{\varphi}\cdot\nabla\varphi)dx = \int_{\partial\Omega} \bar{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dS_x$$

となる。ここで、(1) ならば、$\partial\Omega$ 上で、$\varphi = \bar{\varphi} = 0$ より右辺は 0, また、 (2) においても、$\partial\Omega$ 上で、$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ より右辺は 0 となる。よって、

$$\int_\Omega \bar{\varphi}\Delta\varphi dx = -\int_\Omega \nabla\bar{\varphi}\cdot\nabla\varphi dx \tag{5}$$

となる。ここで、

$$\nabla\bar{\varphi} = \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_n}\right) = \left(\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}}, \ldots, \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}}\right) = \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)} = \overline{\nabla\varphi}.$$

よって、(5) は、

$$\int_\Omega \bar{\varphi}\Delta\varphi dx = -\int_\Omega \nabla\bar{\varphi}\cdot\nabla\varphi dx = -\int_\Omega \overline{\nabla\varphi}\cdot\nabla\varphi dx = -\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx$$

となるので、(4) より、

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = \lambda\int_\Omega |\varphi|^2 dx$$

となる。$\varphi \not\equiv 0$ より右辺の積分は 0 でないので、

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega |\varphi|^2 dx}$$

となる。この式の右辺は非負実数であるので、固有値 λ は非負の実数である。

さらに、(1) の場合に $\lambda = 0$ が固有値でないことは次のようにして分かる。

$\lambda = 0$ とすると、

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

命題 **(Dirichlet 問題の解の一意性)**
$u(x)$ および $\tilde{u}(x)$ が、$\bar{\Omega}$ 上で連続、かつ Ω で C^2-級の関数でともに、

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \psi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (f,\ \psi \text{ は既知関数})$$

を満たせば、$u \equiv \tilde{u}$.

(6) は自明解を持つので、この命題より、$\varphi \equiv 0$　　よって不適

さらに、(2) の場合に $\lambda = 0$ に属する固有関数が定数に限られることは次のようにして分かる。

$\lambda = 0$ とすると、

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

命題 **(Neumann 問題の解の構造)**
Ω の境界は滑らかとする。$u(x)$ および $\tilde{u}(x)$ が、$\bar{\Omega}$ 上の C^2-級の関数でともに、

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \psi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (f,\ \psi \text{ は既知関数})$$

を満たせば、適当な定数 C が存在して、$\bar{\Omega}$ 上で、$\tilde{u}(x) = u(x) + C$ が成り立つ。

(7) は自明解を持つので、この命題より、$\varphi \equiv C (C : 0 \text{ でない定数})$ が成り立つ。

以上により命題 2.1 が示せた。ここで用いた命題、『Dirichlet 問題の解の一意性』と『Neumann 問題の解の構造』についてはこの小節の最後に証明する。∎

命題 2.2
$(1), (2)$ において、固有関数 φ として実数値関数が取れる。

証明
φ を λ の固有関数とすると、

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0. \tag{8}$$

(8) の両辺に複素共役をとると、

$$0 = \overline{\Delta\varphi} + \overline{\lambda\varphi} = \Delta\bar{\varphi} + \bar{\lambda}\bar{\varphi}.$$

ここで、命題 2.1 より、

$$\Delta\bar{\varphi} + \lambda\bar{\varphi} = 0. \tag{9}$$

$(8), (9)$ より、

$$\Delta\left(\frac{\varphi+\bar{\varphi}}{2}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi+\bar{\varphi}}{2}\right) = 0.$$

ゆえに、

$$\Delta(\mathrm{Re}\ \varphi) + \lambda(\mathrm{Re}\ \varphi) = 0.$$

よって $\mathrm{Re}\ \varphi \not\equiv 0$ ならば $\mathrm{Re}\ \varphi$ が実数値固有関数である。ここで、$\mathrm{Re}\ \varphi \equiv 0$ のときは、$\varphi \not\equiv 0$ より、$\mathrm{Im}\ \varphi \not\equiv 0$. よって、$(8)$ の両辺に i を掛ければ

$$\Delta(i\varphi) + \lambda(i\varphi) = 0$$

となり、$i\varphi$ が実数値固有関数となる。∎

以下では実数値固有関数のみ考えることにする。

固有値 λ を 1 つ選んで固定すると、(1) や (2) の解全体の集合

$$E_D(\lambda) = \left\{ \varphi \;\middle|\; \begin{array}{ll} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{array} \right\},$$
$$E_N(\lambda) = \left\{ \varphi \;\middle|\; \begin{array}{ll} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

は、明らかに線形空間になる。この線形空間を固有値 λ に属する <u>固有空間</u> と呼び、その次元を固有値 λ の <u>重複度</u> という。

命題 2.3 (固有関数の直交性)
$\varphi(x), \tilde{\varphi}(x)$ を、$-\Delta$ の相異なる固有値 $\lambda, \tilde{\lambda}$ に属する実数値固有関数とすると、以下が成り立つ。

$$\int_\Omega \varphi(x)\tilde{\varphi}(x)dx = 0. \tag{10}$$

証明
$\varphi(x), \tilde{\varphi}(x)$ を、$-\Delta$ の相異なる固有値 $\lambda, \tilde{\lambda}$ に属する実数値固有関数とすると、

$$\begin{aligned} \lambda\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}dx &= \int_\Omega (\lambda\varphi)\tilde{\varphi}dx \\ &= -\int_\Omega (\Delta\varphi)\tilde{\varphi}dx \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、次の定理を用いる 。

定理 (グリーンの定理)
Ω を $\mathbf{R}^n$ 内の領域とし、$u(x), v(x)$ を $\overline{\Omega}$ 上で定義された C^2-級関数とすると以下が成り立つ。

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS_x.$$

この定理において、$u = \varphi, v = \tilde{\varphi}$ とおくと、

$$\int_\Omega (\varphi\Delta\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}\Delta\varphi)dx = \int_{\partial\Omega} \left(\varphi\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \nu} - \tilde{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS_x.$$

ここで、(1) の場合、$\partial\Omega$ 上で、$\varphi = \tilde{\varphi} = 0$ より右辺は 0, また、(2) の場合でも、$\partial\Omega$ 上で、$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \nu} = 0$ より右辺は 0 となる。よって、

$$\int_\Omega \varphi\Delta\tilde{\varphi}dx = \int_\Omega \tilde{\varphi}\Delta\varphi dx$$

が得られる。よって、(11) より、

$$\begin{aligned} \lambda\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}dx &= -\int_\Omega (\Delta\varphi)\tilde{\varphi}dx \\ &= -\int_\Omega \varphi\Delta\tilde{\varphi}dx \\ &= -\int_\Omega \varphi(-\tilde{\lambda}\tilde{\varphi})dx \\ &= \tilde{\lambda}\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}dx \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$(\lambda - \tilde{\lambda})\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}dx = 0.$$

$\lambda \neq \tilde{\lambda}$ であるから、

$$\int_\Omega \varphi(x)\tilde{\varphi}(x)dx = 0. \qquad \blacksquare$$

また、

- 固有値の重複度は有限
- 固有値は有限の値には集積しない

ということが成り立つことが知られている。

$-\Delta$ の固有値を、その重複度に応じて重ねて数え、大きさの順に並べたものを $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ とし、各 λ_k に属する固有空間を $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ とする。ただし、ここで同一の固有空間に属する φ_k は、(10) の意味で直交するように各固有空間の基底をうまく選んでおく (シュミットの直交化法で可能)。一方、相異なる固有空間に属する φ_k どうしは命題 2.3 より、もともと (10) の意味で直交しているから、結局以下が成立することがわかる。

$$\int_\Omega \varphi_j(x)\varphi_k(x)dx = 0 \qquad (j \neq k, \quad j, k = 1, 2, 3, \ldots)$$

一般に、この関係を満たす関数系 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ を 直交系 と呼ぶ。さらに、各 φ_k が、

$$\int_\Omega \{\varphi_k(x)\}^2 dx = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たすように正規化されているとき、これを 正規直交系 と呼ぶ。固有関数系を直交系や正規直交系になるようにあらかじめ選んでおくと固有関数系の係数の計算がきわめて簡単になる。

最後に、命題 2.1 で用いた命題を証明しておく。

命題 **(Dirichlet 問題の解の一意性)**
$u(x)$ および $\tilde{u}(x)$ が、$\bar{\Omega}$ 上で連続、かつ Ω で C^2-級の関数でともに、

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \psi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (f,\ \psi \text{ は既知関数})$$

を満たせば、$u \equiv \tilde{u}$.

証明
$w := u - \tilde{u}$ とする。すると Ω 上で、

$$\Delta w = \Delta u - \Delta \tilde{u} = f - f = 0.$$

$\partial\Omega$ 上で、

$$w = u - \tilde{u} = \psi - \psi = 0.$$

よって、

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

となる。この時 w は Ω で調和関数となっていて、w は $\bar{\Omega}$ で連続 *(*仮定より明らか*)* であるので、最大値原理 · 最小値原理が使えて、

$$\begin{cases} \max\limits_{\bar{\Omega}} w = \max\limits_{\partial\Omega} w = 0 \\ \min\limits_{\bar{\Omega}} w = \min\limits_{\partial\Omega} w = 0. \end{cases}$$

よって、$\max\limits_{\bar{\Omega}} = \min\limits_{\bar{\Omega}} w = 0$ であるので、$\bar{\Omega}$ 上で $w \equiv 0$. ゆえに、$u \equiv \tilde{u}$. ∎

命題 **(Neumann 問題の解の構造)**
Ω の境界は滑らかとする。$u(x)$ および $\tilde{u}(x)$ が、$\bar{\Omega}$ 上の C^2-級の関数でともに、

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (f,\ \psi \text{ は既知関数})$$

を満たせば、適当な定数 C が存在して、$\bar{\Omega}$ 上で、$\tilde{u}(x) = u(x) + C$ が成り立つ。

証明
$w := u - \tilde{u}$ とする。すると Ω 上で、

$$\Delta w = \Delta u - \Delta \tilde{u} = f - f = 0.$$

$\partial\Omega$ 上で、

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = \psi - \psi = 0.$$

よって、

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{12}$$

となる。ここで、グリーンの定理を用いると、

$$\int_\Omega (w\Delta w + \nabla w \cdot \nabla w)dx = \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial w}{\partial \nu}dS_x.$$

そして、(12) を考慮すると、

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w dx = 0$$

であるので、

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = 0.$$

よって、$\nabla w \equiv 0$ が成り立つ。よって、$w \equiv C$ (C : 定数) となる。ゆえに、

$$u(x) = \tilde{u}(x) + C. \qquad \blacksquare$$

2.2 矩形領域の場合

矩形領域 (長方形領域) における (1) の理論解を求めていく。

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ 0 < x < a, 0 < y < b\}$ とする。まずは、変数分離解に書ける解を全て求めていく。$\varphi(x, y) = g(x)h(y)$ とおいて $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ に代入すると、

$$g''(x)h(y) + g(x)h''(y) + \lambda g(x)h(y) = 0. \tag{13}$$

ここで、$g(x) \not\equiv 0$, $h(y) \not\equiv 0$ である。(なぜならば、$g \equiv 0$ ならば $\varphi \equiv 0$ で不適。 $h \equiv 0$ ならば $\varphi \equiv 0$ で不適。) ゆえに、$^\exists x_0 \quad \text{s.t.} \quad g(x_0) \neq 0$ に対して、

$$\frac{g''(x_0)}{g(x_0)}h(y) + h''(y) + \lambda h(y) = 0$$

が成り立ち、

$$h''(y) = h(y)\left(-\frac{g''(x_0)}{g(x_0)} - \lambda\right)$$

と変形できる。ここで、$-\dfrac{g''(x_0)}{g(x_0)} = \mu$ とおくと、

$$h''(y) = h(y)(\mu - \lambda) \tag{14}$$

が得られる。この式を、(13) に代入すると、

$$g''(x)h(y) + g(x)h(y)(\mu - \lambda) + \lambda g(x)h(y) = 0$$

となり、

$$g''(x)h(y) = -\mu g(x)h(y)$$

となる。ここで、$h(y) \not\equiv 0$ より、$^\exists y_0 \quad \text{s.t.} \quad h(y_0) \neq 0$ に対して、

$$g''(x)h(y_0) = -\mu g(x)h(y_0)$$

となるので、ゆえに、

$$g''(x) = -\mu g(x) \tag{15}$$

が得られる。(14),(15) をまとめると、

$$\begin{cases} g''(x) = -\mu g(x) \\ h''(y) = h(y)(\mu - \lambda) \end{cases} \qquad (\mu : \text{定数}) \tag{16}$$

となる。ここで、Dirichlet 境界条件を考えると、

$$\begin{aligned} \varphi(0,y) = g(0)h(y) = 0. \qquad &\text{ゆえに、} \quad g(0) = 0. \\ \varphi(a,y) = g(a)h(y) = 0. \qquad &\text{ゆえに、} \quad g(a) = 0. \\ \varphi(x,0) = g(x)h(0) = 0. \qquad &\text{ゆえに、} \quad h(0) = 0. \\ \varphi(x,b) = g(x)h(b) = 0. \qquad &\text{ゆえに、} \quad h(b) = 0. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} g(0) = g(a) = 0 \\ h(0) = h(b) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

となる。(16),(17) において、まず g についての式から考える。

(i) $\mu = 0$ の時

(16) より、

$$g''(x) = 0 \qquad (x \in (0,a))$$

である。ゆえに、

$$g(x) = Ax + B \qquad (A, B : \text{定数}).$$

(17) より、

$$\begin{aligned} g(0) &= B = 0, \\ g(a) &= Aa + B = 0. \end{aligned}$$

よって、$a \neq 0$ に注意すると、$A = B = 0$. ゆえに、$g(x) \equiv 0$ となって不適である。

(ii) $\mu \neq 0$ の時

(16) より、

$$g''(x) = -\mu g(x).$$

特性方程式を考えると、

$$s^2 = -\mu$$

であるので、

$$s = \pm\sqrt{\mu}i$$

が成り立つ。よって、

$$g(x) = Ce^{\sqrt{\mu}ix} + De^{-\sqrt{\mu}ix} \qquad (C, D : \text{定数}). \tag{18}$$

(17) より、

$$\begin{aligned} g(0) &= C + D = 0, \\ g(a) &= Ce^{\sqrt{\mu}ia} + De^{-\sqrt{\mu}ia} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

ゆえに、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\mu}ia} & e^{-\sqrt{\mu}ia} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

この式の左辺の行列が正則ならば、この行列は逆行列をもち、両辺に左からその逆行列を掛けると $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

ゆえに、$g(x) \equiv 0$ で不適。よってこの行列は正則でない。ゆえに、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\mu}ia} & e^{-\sqrt{\mu}ia} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\iff \quad e^{-\sqrt{\mu}ia} - e^{\sqrt{\mu}ia} = 0 \\ &\iff \quad e^{2\sqrt{\mu}ia} = 1 \\ &\iff \quad 2\sqrt{\mu}ia = 2l\pi i \qquad (l : \text{整数}) \\ &\iff \quad \sqrt{\mu} = \frac{l\pi}{a}. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\mu = \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 \qquad (l : \text{整数}). \tag{20}$$

また、(18),(19),(20) より、

$$g(x) = E' \sin \frac{l\pi}{a} x \qquad (E' : \text{定数},\ l : \text{整数}).$$

ここで、$l = 0$ のとき $\mu = 0$ となり、不適。また l は正と負で、$g(x)$ と μ の値について重なりがある。よって、

$$\mu = \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 \qquad (l = 1, 2, \ldots) \tag{21}$$

としてよい。また、この時

$$g(x) = E \sin \frac{l\pi}{a} x \qquad (E : \text{定数},\ l = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

となる。次に、(16)(17) において、h についての式を考える。

(i) $\mu - \lambda = 0$ の時

(16) より、

$$h''(y) = 0 \qquad (y \in (0, b))$$

である。ゆえに、

$$h(y) = Fy + G \qquad (F, G : \text{定数}).$$

(17) より、

$$\begin{aligned} h(0) &= G = 0, \\ h(b) &= Fb + G = 0. \end{aligned}$$

よって、$b \neq 0$ に注意すると、$F = G = 0$. ゆえに、$h(y) \equiv 0$ となって不適である。

(ii) $\mu - \lambda \neq 0$ の時

(16) より、

$$h''(y) = (\mu - \lambda)h(y).$$

特性方程式を考えると、

$$s^2 = \mu - \lambda$$

であるので、

$$s = \pm\sqrt{\mu - \lambda}$$

が成り立つ。ゆえに、

$$h(y) = He^{\sqrt{\mu-\lambda}y} + Ie^{-\sqrt{\mu-\lambda}y} \qquad (H, I : \text{定数}). \tag{23}$$

(17) より、

$$\begin{aligned} h(0) &= H + I = 0, \\ h(b) &= He^{\sqrt{\mu-\lambda}b} + Ie^{-\sqrt{\mu-\lambda}b} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

ゆえに、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\mu-\lambda}b} & e^{-\sqrt{\mu-\lambda}b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

この式の左辺の行列が正則ならば、この行列は逆行列をもち、両辺に左からその逆行列を掛けると $\begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} = \mathbf{0}$. ゆえに、$h(y) \equiv 0$ で不適。よってこの行列は正則でない。ゆえに、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\mu-\lambda}b} & e^{-\sqrt{\mu-\lambda}b} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\iff \quad e^{-\sqrt{\mu-\lambda}b} - e^{\sqrt{\mu-\lambda}b} = 0 \\ &\iff \quad e^{2\sqrt{\mu-\lambda}b} = 1 \\ &\iff \quad 2\sqrt{\mu - \lambda}b = 2m\pi i \qquad (m : \text{整数}) \\ &\iff \quad \sqrt{\mu - \lambda} = \frac{m\pi i}{b} \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\lambda - \mu = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \qquad (m : \text{整数}). \tag{25}$$

また、(23),(24),(25) より、

$$h(y) = J' \sin\frac{m\pi}{b}y \qquad (J' : \text{定数},\ m = \text{整数}).$$

ここで $m = 0$ のときは、$\mu - \lambda = 0$ となり、不適。また m は正と負で、$h(y)$ と $\lambda - \mu$ の値について重なりがある。よって、

$$\lambda - \mu = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

としてよい。また、この時

$$h(y) = J \sin \frac{m\pi}{b} y \qquad (J : \text{定数},\ m = 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

となる。よって (21),(26) より、

$$\lambda = \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \pi^2 \qquad (l, m = 1, 2, \ldots)$$

はいずれも (1) の固有値であり、それらに属する固有関数は、(22),(27) より、

$$\varphi(x, y) = C \sin \frac{l\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \qquad (C : \text{定数})$$

で与えられる。

(1) の固有値が上で掲げたもの以外に存在しないことは、次のようにしてわかる。

上で (1) の固有値が存在することがわかったので、

$$\begin{aligned} \lambda &: \ (1) \text{ の任意の固有値} \\ \varphi &: \ \lambda \text{に属する固有関数} \end{aligned}$$

とおける。これから、φ を x, y それぞれについて、Fourier 正弦展開をしていく。(Dirichlet 境界条件の場合は、奇関数に拡張すると全体として滑らかな関数になるので、この場合 Fourier 正弦展開をすることは自然なことである。)

φ について y を固定して、x について Fourier 正弦展開をすると、

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{l=1}^{\infty} C_l(y) \sin \frac{l\pi}{a} x, \\ C_l(y) &= \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x, y) \sin \frac{l\pi}{a} x dx \end{aligned}$$

となる。次に $C_l(0) = C_l(b) = 0$ なので、$C_l(y)$ についても Fourier 正弦展開が出来て、

$$\begin{aligned} C_l(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} C_{lm} \sin \frac{m\pi}{b} y, \\ C_{lm} &= \frac{2}{b} \int_0^b C_l(y) \sin \frac{m\pi}{b} y dy \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{lm} \sin \frac{l\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \\ C_{lm} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \varphi(x, y) \sin \frac{l\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy \end{aligned} \tag{28}$$

が得られる。そして、(28) を $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ に代入する。すると、

$$\begin{aligned} \sum_{l,m=1}^{\infty} \Bigg\{ &- \left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 C_{lm} \sin \frac{l\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \quad - \quad \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 C_{lm} \sin \frac{l\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \\ &+ \quad \lambda C_{lm} \sin \frac{l\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \Bigg\} \ = \ 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{l,m=1}^{\infty}\left\{\left(-\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\lambda\right)C_{lm}\sin\frac{l\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y\right\}=0$$

よって、

$$\left(-\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\lambda\right)C_{lm}\equiv 0$$

ここで、$\varphi\not\equiv 0$ であるので、係数 C_{lm} のうち、0 とならない l,m を一つ選ぶ。すると、

$$\lambda=\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2. \qquad \blacksquare$$

2.3 Bessel 関数

次に、円盤領域の理論値を考えていくが、その際に現れる Bessel 関数について先にまとめておく。

2.3.1 Bessel の方程式とその基本解

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0 \qquad (\alpha:\text{定数}) \tag{29}$$

(29) の形をした方程式を Bessel の方程式 という。(29) は特異点 $x=0$ を持つので、その特解を一般化されたベキ級数

$$y=x^s\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \qquad (a_0\neq 0) \tag{30}$$

の形で求める。(30) を (29) に代入していく (ベキ級数は明らかに項別微分可能である)。y',y'' は以下のようになる。

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{k=0}^{\infty}a_k(s+k)x^{s+k-1},\\ y'' &= \sum_{k=0}^{\infty}a_k(s+k)(s+k-1)x^{s+k-2}. \end{aligned}$$

これを (29) に代入すると、

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty}\left\{a_k(s+k)(s+k-1)x^{s+k}+a_k(s+k)x^{s+k}+a_k(x^2-\alpha^2)x^{s+k}\right\}=0\\ &\sum_{k=0}^{\infty}\left\{a_k\{(s+k)^2-\alpha^2\}x^{s+k}+a_kx^{s+k+2}\right\}=0\\ &\sum_{k=0}^{\infty}\left\{a_k\{(s+k)^2-\alpha^2\}x^{s+k}\right\}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{s+k}=0 \end{aligned}$$

ゆえに、

$$(s^2-\alpha^2)a_0x^s+\{(s+1)^2-\alpha^2\}a_1x^{s+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\{(s+k)^2-\alpha^2\}a_k+a_{k-2}\right\}x^{s+k}=0. \tag{31}$$

(31) について、x の各々のベキ係数を 0 とおくと、

$$s^2-\alpha^2=0, \tag{32}$$

$$\{(s+1)^2-\alpha^2\}a_1=0, \tag{33}$$

$$\{(s+k)^2-\alpha^2\}a_k+a_{k-2}=0 \qquad (k=2,3,\ldots) \tag{34}$$

が得られる。(32) より、s の 2 つの値は、$s_1 = \alpha, \quad s_2 = -\alpha$ となる。まず、α が正のときは $s_1, \quad \alpha$ が負のときは s_2 を選ぶ。これで、形式的に $s = \alpha \quad (\alpha$:正の定数) と考えられる。まずこの場合について考えていく ($\alpha = 0$ も含めて考えることにする)。

すると (33) より、$(2\alpha + 1) = 0$. ここで $a \neq -\dfrac{1}{2}$ より、

$$a_1 = 0. \tag{35}$$

また、(34) より、$k(2\alpha + k)a_k + a_{k-2} = 0$. ここで、$\alpha \neq -\dfrac{l}{2}(l = 2, 3, \ldots)$ より、

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\alpha + k)} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{36}$$

したがって、(35)(36) より奇数番号の係数は、

$$a_{2k+1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{37}$$

となり、偶数番号の係数については、

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(\alpha + k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

であるので、

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\alpha + 1)(\alpha + 2)\cdots(\alpha + k)k!} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{38}$$

となる。(29) は線形同次方程式であり、a_0 は自由に選べるので a_0 は、

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \tag{39}$$

ととることにする。ここで、$\Gamma(\alpha)$ は Γ 関数である。以下、Γ 関数について、簡単に説明する。

正の α の値 (さらに正の実数部分をもつ複素数値) に対して、

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1} dx \tag{40}$$

と定義する。Γ 関数の基本的性質として次のものがある。

命題
任意の正の α に対して、

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{41}$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx \\ &= \left[-e^{-x} x^\alpha\right]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1} dx \\ &= \alpha\Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

命題
任意の自然数 n に対して、

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{42}$$

が成り立つ。

証明
定義より、

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1. \tag{43}$$

(41) を繰り返し用いると、

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\cdots 1\Gamma(1).$$

よって、(43) より、

$$\Gamma(n+1) = n!. \qquad \blacksquare$$

注意
(41) を用いて、

$$\Gamma(\alpha - 1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha - 1}$$

とすれば $\Gamma(\alpha)$ の定義を、整数でない負の α にまで拡張できる。

話を戻すと、(39) より、(38) は、

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+a} k!(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\Gamma(\alpha+1)}$$

となり、(41) を繰り返し用いると、

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+a} k!\Gamma(\alpha+k+1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{44}$$

となる。上で求めた a_{2k+1}, a_{2k} ((37),(44)) を級数 (30) に代入すれば、Bessel の方程式 (29) の特解が得られる。この特解を α 次の第一種 Bessel 関数 と呼び、普通 $J_\alpha(x)$ で表す。

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \tag{45}$$

級数 (45) が任意の x に対して収束することを、D'Alembert (ダランベール) の判定法を用いて示す。

定理 **(D'Alembert の判定法)**

$$^\exists N \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq ^\exists \lambda < 1, \quad ^\forall n \geq N, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \text{は絶対収束.}$$

$$^\exists N \in \mathbf{N}, \quad ^\forall n \geq N, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \text{は絶対収束しない.}$$

ただし、いずれの場合も $a_n \neq 0$ とする。

$J_\alpha(x)$ の係数部分を a_k とすると、

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}.$$

よって、

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\Gamma(\alpha+k+2)} \frac{k!\Gamma(\alpha+k+1)}{(-1)^k} \\
&= \frac{-1}{k+1} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+k+1)} \\
&= \frac{-1}{(k+1)(\alpha+k+1)} \\
&\to 0 \quad (k \to \infty).
\end{aligned}$$

ゆえに、$J_\alpha(x)$ は任意の x に対して収束する。

次に (32) の残りの根を用いた場合 (α が負の時は s_1, α が正の時は s_2 を選ぶことによって $s = -\alpha$ (α:正の定数) と考えた場合) について考えていく。

(33) より、

$$(-2\alpha+1)a_1 = 0. \tag{46}$$

(34) より、

$$k(-2\alpha+k)a_k = -a_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{47}$$

ここで、$\alpha \neq \dfrac{l}{2} \quad (l = 1, 2, \ldots)$ ならば、(46)(47) において、

$$a_1 = 0, \qquad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(-2\alpha+k)} \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

となり、先ほどと同じような計算をすれば (45) で、α を $-\alpha$ に置き換えた

$$J_{-\alpha(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)} \tag{48}$$

が得られる。収束性についても同じように示せる。

$\alpha = \dfrac{l}{2} \quad (l = 1, 3, 5, \ldots)$ (α が半整数) の時は、(46)(47) のどちらかにおいて奇数番号で一箇所割れない部分があり a_l が定まらないが、$a_l = 0$ とすれば奇数番号については、

$$a_{2j+1} = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

が得られる。偶数番号については全く影響が無いので、

$$a_{2j} = \frac{a_{2j-2}}{2^2 j(-\alpha+j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

が得られて、先ほどと同じように計算していけば (48) が得られる。

$\alpha = \dfrac{l}{2} \quad (l = 2, 4, 6, \ldots)$ (α が自然数) の時は、(47) より、

$$a_{l-2} = 0$$

となってしまい、(47) より a_{l-2} 以前の偶数番号については、全て 0 になってしまうので、(30) において改めて、$k = 2\alpha + m$ とおいて考える (つまり、偶数番号において 0 とならない場所から始めるとする)。すると、

$$\begin{aligned} y &= x^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2\alpha+m} x^{2\alpha+m} \\ &= x^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2\alpha+m} x^{m} \qquad (a_{2\alpha} \neq 0) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} &(2\alpha+1)a_{2\alpha+1} = 0, \\ &m(2\alpha+m)a_{2\alpha+m} = -a_{2\alpha+m-2} \qquad (m = 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

が得られ、奇数番号偶数番号については

$$a_{2\alpha+2m-1} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{49}$$

$$a_{2\alpha+2m} = \frac{(-1)^m a_{2\alpha}}{2^{2m} m!(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{50}$$

となる。ここで、

$$a_{2\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha}}{2^{\alpha}\alpha!}$$

とおくと、(50) は、

$$a_{2\alpha+2m} = \frac{(-1)^{m+\alpha}}{2^{2m+\alpha} m!\Gamma(\alpha+m+1)} \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{51}$$

となる。よって、(49),(51) より、

$$\begin{aligned} J_{-\alpha}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+\alpha} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}}{m!\Gamma(\alpha+m+1)} \\ &= (-1)^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}}{m!\Gamma(\alpha+m+1)} \\ &= (-1)^{\alpha} J_{\alpha}(x) \end{aligned} \tag{52}$$

となる。よって、α が自然数の時 $J_{-\alpha}(x)$ は、$J_{\alpha}(x)$ と線形従属となることがわかる。

まとめると、α が負の時も含めて考えれば、

(i) α が整数でない時、級数 (45)(48) の展開は相異なるベキから始まっていて、$J_{\alpha}(x)$ と $J_{-\alpha}(x)$ は線形独立である。
(ii) α が整数の時、$J_{\alpha}(x)$ と $J_{-\alpha}(x)$ は線形従属である。

α が整数 n の時、(29) の一般解を求めるためには、$J_{\alpha}(x)$ と線形独立なもうひとつの特解を求めなければならない。そのために、新しい関数 $Y_{\alpha}(x)$ を

$$Y_{\alpha}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_{\alpha}(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \qquad (\alpha > 0, \quad \alpha \neq 0, 1, 2, \ldots) \tag{53}$$

と定義する。これは、$J_{\alpha}(x)$ と $J_{-\alpha}(x)$ の線形結合なので、明らかに (29) の解である。この $Y_{\alpha}(x)$ を 第二種 Bessel 関数 という。

α が整数の時は、(52) より $\frac{0}{0}$ の不定形となってしまうが、α が整数に近づいた極限でも $Y_{\alpha}(x)$ は Bessel の方程式の解であるから、

$$Y_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to n} Y_{\alpha}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と定義する。この $Y_n(x)$ を計算していく。ロピタルの定理を使うと、

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{\alpha\to n}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \\ &= \lim_{\alpha\to n}\frac{-\pi J_\alpha(x)\sin\alpha\pi + \dfrac{\partial J_\alpha(x)}{\partial\alpha}\cos\alpha\pi - \dfrac{\partial J_{-\alpha(x)}}{\partial\alpha}}{\pi\cos\alpha\pi} \\ &= \frac{(-1)^n\left(\dfrac{\partial J_\alpha(x)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n} - \left(\dfrac{\partial J_{-\alpha}(x)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n}}{(-1)^n\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{\partial J_\alpha(x)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\alpha}(x)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n}\right\}. \end{aligned} \tag{54}$$

ここで、$\dfrac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha}, \dfrac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha}$ を計算する。まず、$\dfrac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha}$ を計算する。

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha} &= \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\log\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &- \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= J_\alpha(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\left(\frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n} = J_n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{55}$$

次に $\dfrac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha}$ を計算していく。

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)} \tag{56}$$

と変形する (ただし、$n=0$ の時は第 1 項はなし)。ここで、Γ 関数の公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

を使うと、

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha+k+1)} = \frac{\sin(\alpha-k)\pi}{\pi}\Gamma(\alpha-k). \tag{57}$$

ここで、$\sin(\alpha-k)\pi = (-1)^k\sin\alpha\pi$ より (57) は、

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha+k+1)} = \frac{(-1)^k\sin\alpha\pi}{\pi}\Gamma(\alpha-k)$$

となる。これを (56) の右辺の第 1 総和に用いて変形すると、

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)}.$$

すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha} &= -J_{-\alpha}(x)\log\left(\frac{x}{2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left\{\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\Gamma'(\alpha-k)+\Gamma(\alpha-k)\cos\alpha\pi\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}\\ &+ \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)}\frac{\Gamma'(-\alpha+k+1)}{\Gamma(-\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}.\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=n} &= -J_{-n}(x)\log\left(\frac{x}{2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n\frac{\Gamma(n-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\\ &+ \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\frac{\Gamma'(-n+k+1)}{\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.\end{aligned}$$

これをさらに変形して、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=n} &= -(-1)^n J_n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right)+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\\ &+ (-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad (58)\end{aligned}$$

が得られる。(55),(58) を (54) へ代入する。

$$\begin{aligned}\pi Y_n(x) &= 2J_n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\\ &- \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left\{\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \qquad (59)\end{aligned}$$

この式を Γ 関数の性質を使ってさらに変形する。

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad (x\neq 0,\quad \Gamma(1)=1).$$

この式を微分すると、

$$\begin{aligned}\Gamma'(x+1) &= \Gamma(x)+x\Gamma'(x)\\ &= \frac{\Gamma(x+1)}{x}+x\Gamma'(x).\end{aligned}$$

ゆえに、x が自然数の時には、

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} &= \frac{1}{x}+\frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x+1)}\\ &= \frac{1}{x}+\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\\ &= \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\cdots+\frac{1}{1}+\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\end{aligned}$$

となり、ここで、

$$\sum_{k=1}^{x}\frac{1}{k}=\phi(x), \qquad \gamma=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=0.57721\cdots \quad (\textbf{オイラー定数})$$

とおくと、

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\phi(x)+\gamma.$$

これを使って、(59) を書き直すと、

$$\begin{aligned}\pi Y_n(x) &= 2\left\{\log\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma\right\}J_n(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\\ &- \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\{\phi(k)+\phi(n+k)\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad (60)\end{aligned}$$

となる (ただし、$n=0$ の時は、右辺第 2 項はなし)。

次に、$Y_n(x)$ の収束性を D'Alembert の判定法を用いて調べる。第 1 項と第 2 項は収束性が明らかなので、第 3 項についてだけ調べればよい。(60) の第 3 項の係数部分を b_k とおく。

$$b_k=\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\{\phi(k)+\phi(n+k)\}.$$

すると、

$$\begin{aligned}\frac{b_{k+1}}{b_k} &= \frac{(-1)^{k+1}\{\phi(k+1)+\phi(n+k+1)\}}{(k+1)!(n+k+1)!}\frac{k!(n+k)!}{(-1)^k\{\phi(k)+\phi(n+k)\}}\\ &= \frac{-1}{(k+1)(n+k+1)}\frac{\phi(k+1)+\phi(n+k+1)}{\phi(k)+\phi(n+k)}.\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\phi(k+1)+\phi(n+k+1)}{\phi(k)+\phi(n+k)} &= \frac{\phi(k)+\dfrac{1}{k+1}+\phi(n+k)+\dfrac{1}{n+k+1}}{\phi(k)+\phi(n+k)}\\ &= 1+\frac{\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{n+k+1}}{\phi(k)+\phi(k+n)}\\ &\to 1 \quad (k\to\infty).\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{b_{k+1}}{b_k}\to 0 \quad (k\to\infty).$$

よって、収束半径は ∞ となり、$Y_n(x)$ は任意の x に対して常に収束する。

Bessel 関数 $Y_\alpha(x)$ は $\alpha=0,1,2,\ldots$ の場合でも Bessel 方程式の解になっている。関数 J_α と Y_α は明らかに線形独立である。それゆえ、これらは Bessel 方程式の解の基本系をなしている。したがって、(29) の一般解は C_1,C_2 を任意定数として、

$$\begin{aligned}y &= C_1J_\alpha(x)+C_2Y_\alpha(x) \qquad (\alpha\geq 0),\\ y &= C_1J_\alpha(x)+C_2Y_{-\alpha}(x) \quad (\alpha<0)\end{aligned}$$

となる。ここで、$Y_\alpha(x)$ は $\alpha\geq 0$ でしか定義されていないことに注意する必要がある。$\alpha<0$ の時 J_α と $Y_{-\alpha}$ が独立であることは明らかである (α が整数でない時は Y_α の定義から明らかで、α が整数の時は、$J_{-\alpha}$ と J_α が線形従属であることから明らか。)。

さらに、異なる次数の Bessel 関数の間には次の漸化式が成り立つ。

$$\begin{cases}J'_\alpha(x)=J_{\alpha-1}(x)-\dfrac{\alpha}{x}J_\alpha(x)\\ J'_\alpha(x)=-J_{\alpha+1}(x)+\dfrac{\alpha}{x}J_\alpha(x)\end{cases}, \qquad (61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'_\alpha(x) = Y_{\alpha-1}(x) - \dfrac{\alpha}{x} Y_\alpha(x) \\ Y'_\alpha(x) = -Y_{\alpha+1}(x) + \dfrac{\alpha}{x} Y_\alpha(x) \end{array} \right. . \tag{62}$$

(61) は、Bessel 関数の級数展開を直接微分することによって確かめられる。(61),(62) を証明する。

(61) の証明

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\alpha}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha J_\alpha(x)\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+\alpha)}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\alpha-1} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha-1} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha J_{\alpha-1}(x) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{d}{dx}\{x^\alpha J_\alpha(x)\} = x^\alpha J_{\alpha-1}(x).$$

ゆえに、

$$\alpha x^{\alpha-1} J_\alpha(x) + x^\alpha J'_\alpha(x) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$$

であるので、

$$J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

が成り立つ。同様に、

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

であるので、ゆえに、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x)\right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!\Gamma(k+\alpha+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\ &= -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha+1} \\ &= -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{d}{dx}\{x^{-\alpha} J_\alpha(x)\} = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x).$$

ゆえに、

$$-\alpha x^{-\alpha-1} J_\alpha(x) + x^{-\alpha} J'_\alpha(x) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$$

であるので、

$$J'_\alpha(x) = -J_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x). \qquad \blacksquare$$

(62) の証明

$\alpha \neq 0, 1, \ldots$ の時、

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} Y'_\alpha(x) &= \frac{J'_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J'_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \\ &= \frac{\left(J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x}J_\alpha(x)\right)\cos\alpha\pi - \left(-J_{-\alpha+1}(x) - \frac{\alpha}{x}J_{-\alpha}(x)\right)}{\sin\alpha x} \\ &= \frac{J_{\alpha-1}(x)\cos(\alpha-1)\pi - J_{-(\alpha-1)}(x)}{\sin(\alpha-1)\pi} - \frac{\frac{\alpha}{x}(J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x))}{\sin\alpha\pi} \\ &= Y_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x}Y_\alpha(x) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\cos(\alpha \pm 1)\pi = -\cos\alpha\pi, \quad \sin(\alpha \pm 1)\pi = -\sin\alpha\pi$$

を用いた。また、

$$\begin{aligned} Y'_\alpha(x) &= \frac{J'_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J'_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \\ &= \frac{(-J_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x}J_\alpha(x))\cos\alpha\pi - (J_{-\alpha-1}(x) + \frac{\alpha}{x}J_{-\alpha}(x))}{\sin\alpha\pi} \\ &= \frac{-J_{\alpha+1}(x)\cos\alpha\pi + J_{-(\alpha+1)}(x)}{\sin(\alpha+1)\pi} + \frac{\frac{\alpha}{x}(J_\alpha(x) + J_{-\alpha}(x))}{\sin\alpha\pi} \\ &= -Y_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x}Y_\alpha(x) \end{aligned}$$

である。$\alpha = 0, 1, \ldots$ の時は上の証明で、$Y_\alpha(x)$ を $\lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x)$ と置き換えれて考えればばよい ($Y_n(x)$ は項別微分可能)。 ∎

2.3.2 Bessel 関数の原点付近での有様

$x = 0$ の近傍における J,Y の様子を調べる。

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha - \frac{1}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{1}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots \end{aligned}$$

であるので $x \simeq 0$ において、

$$J_\alpha(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \qquad (\alpha \neq -n \quad (n : \text{自然数})). \tag{63}$$

$\alpha = -n$ (n : 自然数) の場合は、$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ より、$x \simeq 0$ において、

$$J_{-n}(x) \simeq \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \tag{64}$$

である。また、

$$\pi Y_0(x) = 2\left\{\log\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma\right\} J_0(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!}\{2\phi(k)\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

より、$x \simeq 0$ において、$J_0(0) = 1$ に注意すると、

$$\pi Y_0 \simeq 2\log\left(\frac{x}{2}\right) \tag{65}$$

となる。また、$n = 1, 2, \ldots$ の時、

$$\begin{aligned}
\pi Y_n(x) &= 2\left\{\log\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma\right\} J_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\{\phi(k) + \phi(n+k)\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\
&= 2\left\{\log\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma\right\} J_n(x) \\
&- (n-1)!\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} - \frac{(n-2)!}{1!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2-n} - \frac{(n-3)!}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4-n} - \cdots - \frac{0!}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2} \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\{\phi(k) + \phi(n+k)\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}
\end{aligned}$$

より、$x \simeq 0$ において、

$$\pi Y_n(x) \simeq -(n-1)!\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \tag{66}$$

となる。まとめると、

(i) α が整数でない時
$\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots \quad \alpha > 0$ とする。
(63) より、$J_\alpha(x)$ は x^α の程度で 0 となるが、$J_{-\alpha}$ は $\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$ の程度で無限大になる。よって、$Y_\alpha(x)$ も $\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$ の程度で無限大となる。

(ii) α が整数の時
$J_0(x) = 1$ である ($J_\alpha(x)$ の式より)。n を自然数とすると、(63)(64) より $J_n(x)$ と $J_{-n}(x)$ は x^n の程度で 0 となる。$Y_\alpha(x)$ の方は、(65) より $Y_0(x)$ は対数的に、(66) より $Y_n(x)$ は $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ の程度で無限大となる。

よって、$\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ での場合、$x = 0$ の近傍での Bessel の方程式の有界な一般解は $J_\alpha(x)$ の定数倍のみに限られる (この事実は、円盤領域の固有値の理論値を求める時に用いる)。

2.3.3 Bessel 関数の直交性と零点

k を 0 でない定数として、

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \alpha^2)y = 0 \tag{67}$$

を考える。$t = kx$ とすると、

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = k\dfrac{dy}{dt} \\ \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = k^2\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

となるので、(67) は、

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \alpha^2)y = 0$$

と変形される。ゆえに、$y = J_\alpha(kx)$ は方程式 (67) の解である。

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(kx) + x\frac{d}{dx}J_\alpha(kx) + (k^2x^2 - \alpha^2)J_\alpha(kx) = 0.$$

$x = 0$ は特異点であり、x で割れるので、この式を x で割ると、

$$x\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(kx) + \frac{d}{dx}J_\alpha(kx) + \left(k^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(kx) = 0$$

である。ゆえに、

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\alpha(kx)\right] + \left(k^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(kx) = 0 \tag{68}$$

となる。k について、異なる値 k_1,k_2 を考えて対応する方程式を書けば、

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right] + \left(k_1^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(k_1x) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right] + \left(k_2^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(k_2x) = 0.$$

第 1 式に $J_\alpha(k_2x)$, 第 2 式に $J_\alpha(k_1x)$ を掛けて、辺々引き算をすると、

$$J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right] - J_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right]$$
$$+ \quad \left(k_1^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x) - \left(k_2^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(k_2x)J_\alpha(k_1x) = 0.$$

よって、

$$J_\alpha(k_2x)\left(\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) + x\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(k_1x)\right) - J_\alpha(k_1x)\left(\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x) + x\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(k_2x)\right)$$

$$+ \quad (k_1^2 - k_2^2)xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x) = 0.$$

よって、

$$J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) + xJ_\alpha(k_2x)\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(k_1x) - J_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x) - xJ_\alpha(k_1x)\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(k_2x)$$

$$+ \quad (k_1^2 - k_2^2)xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x) = 0.$$

よって、

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right] - \frac{d}{dx}\left[xJ_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right]$$

$$= \quad (k_2^2 - k_1^2)xJ_\alpha(k_1x)J\alpha(k_2x).$$

$$\left(\quad x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) \quad \text{と} \quad -x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x) \quad \text{が相殺する。} \right)$$

ゆえに、

$$(k_2^2 - k_1^2)xJ_\alpha(k_1x)J\alpha(k_2x) = \frac{d}{dx}\left[xJ_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) - xJ_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right] \tag{69}$$

となる。ここで、右辺の括弧内は $x^{2(\alpha+1)}$ から始まる x のベキ級数に展開される。

なぜならば、 $J_\alpha(x) = \dfrac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}$ であるので、

$$\begin{aligned}
J_\alpha(k_1x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^\alpha - \frac{1}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{1}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots \\
J_\alpha(k_2x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^\alpha - \frac{1}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{1}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots \\
x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^\alpha - \frac{\alpha+2}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{\alpha+4}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots \\
x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^\alpha - \frac{\alpha+2}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{\alpha+4}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots
\end{aligned}$$

より、(69) の右辺の括弧内の第 1 項は消えてしまう。よって、ベキは $x^{2(\alpha+1)}$ から始まる。

したがって、$\alpha > -1$ ならば (69) は $x = 0$ で 0 となる。このことを考慮して、(69) を区間 $(0, l)$ で積分する。すると、

$$\int_0^l (k_2^2 - k_1^2) x J_\alpha(k_1x) J_\alpha(k_2x) dx = \int_0^l \frac{d}{dx}\left[x J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) - x J_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right] dx.$$

ゆえに、

$$(k_2^2 - k_1^2)\int_0^l x J_\alpha(k_1x) J_\alpha(k_2x) dx = \left[x J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) - x J_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right]_0^l.$$

ここで、

$$\frac{d}{dx}J_\alpha(x) = J'_\alpha(x)$$

とすると、

$$\left.\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right|_{x=l} = k_1 J'_\alpha(k_1 l), \qquad \left.\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right|_{x=l} = k_2 J'_\alpha(k_2 l)$$

より、

$$(k_2^2 - k_1^2)\int_0^l x J_\alpha(k_1x) J_\alpha(k_2x) dx = l(k_1 J'_\alpha(k_1 l) J_\alpha(k_2 l) - k_2 J'_\alpha(k_2 l) J_\alpha(k_1 l)). \tag{70}$$

$l = 1$ の場合には、

$$(k_2^2 - k_1^2)\int_0^1 x J_\alpha(k_1x) J_\alpha(k_2x) dx = k_1 J'_\alpha(k_1) J_\alpha(k_2) - k_2 J'_\alpha(k_2) J_\alpha(k_1) \tag{71}$$

となる。ここで、次の命題を示す。

命題
$\alpha > -1$ の時、$J_\alpha(x)$ の零点がすべて実数となる。

証明

もし、$J_\alpha(x)$ が複素零点 $a + ib$ $(b \neq 0)$ を持つとすれば、

$$J_\alpha(a+ib) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\dfrac{a+ib}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} = 0 \tag{72}$$

となる。ここで、

$$\overline{(a+ib)^n} = (a-ib)^n \qquad (n : \text{実数})$$

を用いると、J_α の係数は全て実数なので、(72) の複素共役を取れば、

$$J_\alpha(a-ib)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{a-ib}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}=0 \tag{73}$$

が成り立つ。(71) に戻って $k_1=a+ib,\quad k_2=a-ib$ とおけば、$(72),(73)$ より $\alpha>-1$ の時に

$$-4iab\int_0^1 xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x)dx=0$$

となる。ここで、$a\neq 0$ の時 (純虚数でない時) は、

$$\int_0^1 xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x)dx=0$$

となるが $J_\alpha(k_1x)$ と $J_\alpha(k_2x)$ は、いま互いに複素共役であり、上式の被積分関数は正となるので、左辺 >0 となり等式は成り立たなくなる。よって、$J_\alpha(x)$ は $a+ib$ ($a\neq 0$ かつ $b\neq 0$) の零点を持たない。

$a=0$(純虚数の時) があり得ないことは以下のようにして示せる。

ib $(b\neq 0)$ を $J_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}$ に代入する。すると、

$$\begin{aligned}
J_\alpha(ib) &= (ib)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{(ib)^{2k}}{2^{2k+\alpha}}\\
&= (ib)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{(-1)^kb^{2k}}{2^{2k+\alpha}}\\
&= (ib)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{b^{2k}}{2^{2k+\alpha}}.
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{J_\alpha(ib)}{(ib)^\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{b^{2k}}{2^{2k+\alpha}}$$

となる。ここで右辺を見ると $\alpha>-1$ なので、Γ 関数が正より右辺は正となる。よって、右辺は零となることが無い。よって、$J_\alpha(x)$ は純虚数の零点を持たない。 ∎

注意 **2.3.1**

$$J_\alpha(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}$$

について、右辺は偶数ベキだけしか含んでいないので、$J_\alpha(x)$ の零点は、絶対値が等しく、符号の異なるものが対になって現れることがわかる。したがって正の零点についてだけ考えれば十分である。

注意 **2.3.2**
$|x|\gg 1$ の時、

$$\begin{aligned}
J_\alpha(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{2\alpha+1}{4}\pi\right)\\
Y_\alpha(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{2\alpha+1}{4}\pi\right)
\end{aligned}$$

となることが知られている。この結論を出せるために、x が十分大きい時、$\cos x$ や $\sin x$ は可算無限個の零点をもつので、$J_\alpha(x)$ や $Y_\alpha(x)$ は可算無限個の零点を持つ。

次に Bessel 関数の直交性について考えていく。

$$k_1 = \frac{\mu_i}{l}, \quad k_2 = \frac{\mu_j}{l}$$

とする。ただし、μ_i, μ_j $(i, j = 1, 2, \ldots)$ は、$\mu_i > 0$, $\mu_j > 0$ で、

$$J_\alpha(x) = 0 \qquad (\alpha > -1) \tag{74}$$

を満たすとする (つまり、μ_i, μ_j $(i, j = 1, 2, \ldots)$ は、正の零点とする)。l は正の定数である。ここで、注意 2.3.1 より、正の零点のみについて考えていくことにしている。また、注意 2.3.2 より、正の零点は可算無限個あることに注意しておく。すると、(70) より、次の Bessel 関数の直交性が得られる。

(i) $i \neq j$ の時

$$\int_0^l x J_\alpha\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) J_\alpha\left(\mu_j \frac{x}{l}\right) dx = 0. \tag{75}$$

(ii) $i = j$ の時
今度は、$k = \dfrac{\mu}{l}$ (μ は (74) を満たす、$\mu > 0$) とする。(70) において $k_1 = k$ とおき、一方 k_2 を変数として k に近づける。すると、

$$\int_0^l x J_\alpha(kx) J_\alpha(k_2 x) dx = \frac{lkJ'_\alpha(kl)J_\alpha(k_2 l)}{k_2^2 - k^2}.$$

ゆえに、

$$\lim_{k_2 \to k} \int_0^l x J_\alpha(kx) J_\alpha(k_2 x) dx = \lim_{k_2 \to k} \frac{lkJ'_\alpha(kl)J_\alpha(k_2 l)}{k_2^2 - k^2}.$$

よって、

$$\int_0^l x[J_\alpha(kx)]^2 dx = \lim_{k_2 \to k} \frac{lkJ'_\alpha(kl)J_\alpha(k_2 l)}{k_2^2 - k^2}$$

となる。ここで、右辺は $\dfrac{0}{0}$ の不定形となるので、ロピタルの定理が使えて、

$$\begin{aligned} \int_0^l x[J_\alpha(kx)]^2 dx &= \lim_{k_2 \to k} \frac{l^2 kJ'_\alpha(kl)J'_\alpha(k_2 l)}{2k_2} \\ &= \frac{l^2}{2}[J'_\alpha(kl)]^2 \end{aligned} \tag{76}$$

となる。漸化式 (61)

$$J'_\alpha(x) = -J_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

で、$x = \mu$ とすると、

$$J'_\alpha(\mu) = -J_{\alpha+1}(\mu)$$

であるので (76) は、

$$\int_0^l x \left\{ J_\alpha\left(\mu \frac{x}{l}\right) \right\}^2 dx = \frac{l^2}{2}\{J_{\alpha+1}(\mu)\}^2 \tag{77}$$

となる。こうして、(75),(77) より、次の直交関係が得られた。

$$\int_0^l x J_\alpha\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) J_\alpha\left(\mu_j \frac{x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \dfrac{l^2}{2}\{J_{\alpha+1}(\mu)\}^2 & (i = j) \end{cases} \tag{78}$$

ただし、$\alpha > -1$ であり、$\mu_i,\ \mu_j$ は正の零点である。

以後、円盤領域における固有値の議論をする時に、$J_\alpha(x)$ の零点を考えることになるが、そこで役に立つと思われる性質をまとめておく。

1. $\alpha > 0$ ならば、$x = 0$ は $J_\alpha(x)$ の零点である。
2. α が実数の時、$J_\alpha(x)$ は可算無限個の正の零点を持ち、それは有限な点には集積しない。
3. $\alpha > -1$ の時、$J_\alpha(x)$ は虚の零点を持たない。
4. $J_\alpha(x)$ の隣り合う 2 つの零点の間には、$J_{\alpha-1}(x)$ 及び $J_{\alpha+1}(x)$ の零点がそれぞれ必ず 1 個存在し、ただ 1 個に限る。
5. $J_\alpha(x)$ と $J_{\alpha+1}(x)$ は原点以外に共通の零点を持たない。

   という性質がある。他にも、

6. $J_\alpha(x)$ の零点は原点に関して、対称に分布している。
7. $J_\alpha(x)$ の $x = 0$ 以外の零点はすべて 1 位である。

という性質がある。3,6 は証明済みである。他の証明については、参考文献 [3] を参照すること。

2.3.4 Bessel 関数による任意関数の展開

任意関数 $f(x)$ が、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\alpha\left(\mu_i^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right) \qquad (\alpha > -1) \tag{79}$$

の形に級数展開されるものとする。$\mu_1^{(\alpha)},\ \mu_2^{(\alpha)},\ \mu_3^{(\alpha)}, \ldots$ は、増加の順に並べられた $J_\alpha(x)$ の正の零点である。係数 a_i を決定するために、(79) の両辺に $xJ_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)} \dfrac{x}{l}\right)$ を掛け、項別積分が可能であると仮定して、区間 $[0, l]$ で積分する。すると、

$$\begin{aligned}
\int_0^l x f(x) J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right) dx &= \int_0^l x J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right) \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\alpha\left(\mu_i^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right) dx \\
&= \int_0^l x \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right) J_\alpha\left(\mu_i^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right) dx
\end{aligned}$$

である。ここで、(78) の直交性によって、$i \neq j$ なる a_i のかかる項は全部消える。ゆえに、

$$\begin{aligned}
\int_0^l x f(x) J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right) dx &= a_j \int_0^l x \left\{J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right)\right\}^2 dx \\
&= \frac{a_j l^2}{2} \{J_{\alpha+1}(\mu_j^{(\alpha)})\}^2
\end{aligned}$$

である。したがって、

$$a_j = \frac{2}{l^2 \{J_{\alpha+1}(\mu_j^{(\alpha)})\}^2} \int_0^l x f(x) J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)} \frac{x}{l}\right) dx \tag{80}$$

が得られる。展開 (79) の係数は (80) で定められる。展開 (79) を $f(x)$ の Fourier-Bessel 展開 という。

2.3.5　以後の議論に用いることのまとめ

最後に、以後の議論で用いることをまとめておく。

命題
$y = J_\alpha(kx)$　(k : 定数) は方程式

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \alpha^2)y = 0$$

の解である。

命題
$\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ の時、原点で有界な Bessel 関数は $J_\alpha(x)$ のみである。

命題
$J_\alpha(x)$ の零点の性質として次のものがある。

- $\alpha > 0$ ならば、$x = 0$ は $J_\alpha(x)$ の零点である。
- α が実数の時、$J_\alpha(x)$ は可算無限個の正の零点を持ち、それは有限な点には集積しない。
- $\alpha > -1$ の時、$J_\alpha(x)$ は虚の零点を持たない。
- $J_\alpha(x)$ の隣り合う 2 つの零点の間には、$J_{\alpha-1}(x)$ 及び $J_{\alpha+1}(x)$ の零点がそれぞれ必ず 1 個存在し、ただ *1* 個に限る。
- $J_\alpha(x)$ と $J_{\alpha+1}(x)$ は原点以外に共通の零点を持たない。

他に、2.3.4 で紹介した Fourier-Bessel 展開を用いる。

2.4　円盤領域の場合

円盤領域における (1) の理論解を求めていく。

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 < 1\}$$

とする。ここで、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

によって変数変換する。つまり、

$$\Phi(r, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad (0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

とする。すると、

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

より、(1) は、

$$\begin{cases} \Phi_{rr} + \dfrac{1}{r}\Phi_r + \dfrac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} + \lambda\Phi = 0 & (0 < r < 1), \\ \Phi(1, \theta) = 0 & (0 \le \theta < 2\pi). \end{cases} \tag{81}$$

ただし、$r \to +0$ で Φ は有界とする。なぜならば、φ は $(0, 0)$ で滑らかであるので、$r \to +0$ で Φ が有界でないとこの性質が崩れてしまうからである。

(81) において、変数分離形に書ける解を全て求めていく。

$$\Phi(r,\theta) = g(r)h(\theta)$$

とおく。(81) に代入して、

$$g''(r)h(\theta) + \frac{1}{r}g'(r)h(\theta) + \frac{1}{r^2}g(r)h''(\theta) + \lambda g(r)h(\theta) = 0. \tag{82}$$

ここで、$g(r) \not\equiv 0$ かつ $h(\theta) \not\equiv 0$ である。なぜならば、

$$\begin{aligned} g(r) \equiv 0 \quad &\text{ならば} \quad \Phi \equiv 0 \quad \text{ゆえに不適、} \\ h(\theta) \equiv 0 \quad &\text{ならば} \quad \Phi \equiv 0 \quad \text{ゆえに不適、} \end{aligned}$$

だからである。よって、 $^{\exists}\theta_0 \quad \text{s.t.} \quad h(\theta_0) \neq 0$ に対して、(82) より、

$$g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) + \left(\lambda + \frac{1}{r^2}\frac{h''(\theta_0)}{h(\theta_0)}\right) g(r) = 0$$

となる。ここで、$-\xi = \dfrac{h''(\theta_0)}{h(\theta_0)}$ とおくと、

$$g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) + \left(\lambda - \frac{\xi}{r^2}\right) g(r) = 0 \qquad (0 < r < 1) \tag{83}$$

が得られる。また、(82) を、

$$h(\theta)\left(g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) + \lambda g(r)\right) + \frac{1}{r^2}g(r)h''(\theta) = 0$$

と変形し、この式に (83) を代入すると、

$$h(\theta)\frac{\xi}{r^2}g(r) + \frac{1}{r^2}g(r)h''(\theta) = 0$$

となる。よって、 $^{\exists}r_0 \quad \text{s.t.} \quad g(r_0) \neq 0$ に対して、

$$h(\theta)\frac{\xi}{r_0^2}g(r_0) + \frac{1}{r_0^2}g(r_0)h''(\theta) = 0$$

となり、

$$\xi h(\theta) + h''(\theta) = 0 \qquad (0 \leq \theta < 2\pi) \tag{84}$$

が成り立つ。また、$\Phi(1,\theta) = 0$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ より、

$$g(1)h(\theta) = 0$$

であるので、

$$g(1) = 0 \tag{85}$$

が成り立つ。そして、$h(\theta)$ は周期 2π の周期関数なので、

$$\begin{aligned} h(\theta) &= h(2\pi + \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi), \\ h'(\theta) &= h'(2\pi + \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi). \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} h(0) = h(2\pi), \\ h'(0) = h'(2\pi) \end{cases} \tag{86}$$

が得られる。よって、(83),(84),(85),(86) をまとめると、

$$\begin{cases} g''(r)+\dfrac{1}{r}g'(r)+\left(\lambda-\dfrac{\xi}{r^2}\right)g(r)=0 \qquad (0<r<1), \\ \\ g(1)=0, \end{cases} \tag{87}$$

$$\begin{cases} h''(\theta)+\xi h(\theta)=0 \qquad (0\le\theta<2\pi), \\ \\ h(0)=h(2\pi), \\ h'(0)=h'(2\pi) \end{cases} \tag{88}$$

が得られる。次にこれらの方程式を解いていく。まずは (88) から解いていく。

(i) $\xi=0$ **の場合**
$h''(\theta)=0 \quad (\theta\in[0,2\pi))$ **より、**

$$h(\theta)=A\theta+B \qquad (A,B:\text{定数}).$$

$h(0)=h(2\pi)$ **より、**

$$B=2\pi A+B.$$

ゆえに、

$$A=0.$$

よって、

$$h(\theta)=B\ (B:\text{定数}).$$

(ii) $\xi\neq0$ **の場合**
$h''(\theta)+\xi h(\theta)=0$ **より、特性方程式を考えると、**

$$s^2+\xi=0,\ \text{ゆえに、}s=\pm\sqrt{\xi}i.$$

よって、

$$\begin{aligned} h(\theta) &= De^{\sqrt{\xi}i\theta}+Ee^{-\sqrt{\xi}i\theta} \qquad (D,E:\text{定数}), \\ h'(\theta) &= i\sqrt{\xi}De^{\sqrt{\xi}i\theta}-i\sqrt{\xi}Ee^{-\sqrt{\xi}i\theta}. \end{aligned}$$

$h(0)=h(2\pi)$ **より、**

$$D+E=De^{\sqrt{\xi}2\pi i}+Ee^{-\sqrt{\xi}2\pi i}.$$

ゆえに、

$$(e^{\sqrt{\xi}2\pi i}-1)D+(e^{-\sqrt{\xi}2\pi i}-1)E=0. \tag{89}$$

また、$h'(0)=h'(2\pi)$ **より、**

$$i\sqrt{\xi}D-i\sqrt{\xi}E=i\sqrt{\xi}De^{\sqrt{\xi}2\pi i}-i\sqrt{\xi}Ee^{-\sqrt{\xi}2\pi i}.$$

ゆえに、

$$(e^{\sqrt{\xi}2\pi i}-1)D-(e^{-\sqrt{\xi}2\pi i}-1)E=0. \tag{90}$$

よって (89),(90) より、

$$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{\xi}2\pi i}-1 & e^{-\sqrt{\xi}2\pi i}-1 \\ e^{\sqrt{\xi}2\pi i}-1 & -(e^{-\sqrt{\xi}2\pi i}-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

この式の左辺の行列が正則ならば、この行列は逆行列をもち、両辺に左からその逆行列を掛けると $\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}=\mathbf{0}$.

ゆえに、$h(\theta)\equiv 0$ で不適。よってこの行列は正則でない。ゆえに、

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\xi}2\pi i}-1 & e^{-\sqrt{\xi}2\pi i}-1 \\ e^{\sqrt{\xi}2\pi i}-1 & -(e^{-\sqrt{\xi}2\pi i}-1) \end{vmatrix}=\mathbf{0} \\
\iff\quad & -2(e^{\sqrt{\xi}2\pi i}-1)(e^{-\sqrt{\xi}2\pi i}-1)=0 \\
\iff\quad & e^{\sqrt{\xi}2\pi i}-2+e^{-\sqrt{\xi}2\pi i}=0 \\
\iff\quad & (e^{\sqrt{\xi}\pi i}-e^{-\sqrt{\xi}\pi i})^2=0 \\
\iff\quad & e^{\sqrt{\xi}\pi i}=e^{-\sqrt{\xi}\pi i} \\
\iff\quad & e^{\sqrt{\xi}2\pi i}=1 \\
\iff\quad & \sqrt{\xi}2\pi i=2m\pi i \quad (m:\text{整数}).
\end{aligned}$$

ここで、$m=0$ の時は $\xi=0$ となるので不適。よって $m\neq 0$ である。ゆえに、

$$\xi=m^2 \quad (m:0\text{ 以外の整数}).$$

またこの時、

$$\begin{aligned}
h(\theta) &= De^{mi\theta}+Ee^{-mi\theta} \\
&= (D+E)\cos m\theta+(D-E)\sin m\theta \\
&= C_1\cos m\theta+C_2\sin m\theta \qquad (m:0\text{ 以外の整数},\ C_1,C_2:\text{定数}).
\end{aligned}$$

ここで、m が正と負で、$h(\theta)$ と ξ の値について重なりがある。よって、

$$\xi=m^2 \quad (m:\text{自然数})$$

とできる。またこの時、

$$h(\theta)=C_1\cos m\theta+C_2\sin m\theta \qquad (m:\text{自然数},\ C_1,C_2:\text{定数})$$

となる。**(i),(ii)** をあわせると、

$$\begin{cases} \xi=m^2 & (m=0,1,2,\ldots), \\ h(\theta)=C_1\cos m\theta+C_2\sin m\theta & (C_1,C_2:\text{定数}) \end{cases} \tag{91}$$

が得られる。次に、(87) を考える。$\xi=m^2$ より、(87) は、

$$\begin{cases} g''(r)+\dfrac{1}{r}g'(r)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{r^2}\right)g(r)=0 \qquad (0<r<1), \\ \\ g(1)=0 \end{cases}$$

となる。この上式は Bessel の方程式である。$\Phi(r,\theta)$ は $r \to +0$ で有界であるので、$g(r)$ も $r \to +0$ で有界である。$r \to +0$ で有界な解は J_m に限られる (Y_m は原点で有界でない)。よって、この式は、($J_\alpha(kx)$ が (67) の解であることに注意すれば) 次のようになる。

$$\begin{cases} g(r) = J_m(r\sqrt{\lambda}) & (0 < r < 1), \\ g(1) = J_m(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases} \tag{92}$$

よって、(91),(92) よりまとめると、

(92) の下の式より、固有値 λ については、ある 0 以上の整数 m に対して $\mu_i^{(m)}(i = 1, 2, \ldots)$ を増加の順に並べた $J_m(r)$ の正の零点とすると、

$$\lambda = \{\mu_i^{(m)}\}^2 \tag{93}$$

となり、それに属する固有関数 Φ は (91)(92) より、

$$\Phi(r,\theta) = J_m(r\sqrt{\lambda})(C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta) \qquad (0 \le r < 1, \quad C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{94}$$

で与えられる。

(1) の固有値が上で求めたもの以外に存在しないことは、次のようにしてわかる。

$$\begin{aligned} \lambda &: \ (1) \text{ の任意の固有値} \\ \Phi &: \ \lambda \text{に属する固有関数} \end{aligned}$$

とする (上で固有値が存在することが分かったので、このようにできる)。まず、Φ を θ について、r を固定して Fourier 展開をする。

$$\begin{aligned} \Phi(r,\theta) &= \frac{1}{2}a_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m(r)\cos m\theta + b_m(r)\sin m\theta), \\ a_m(r) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(r,\theta)\cos m\theta d\theta \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_m(r) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(r,\theta)\sin m\theta d\theta \quad (m = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{95}$$

次に、$a_m(r), b_m(r)$ を Fourier-Bessel 展開する。

$$\begin{cases} a_m(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_\alpha(\mu_n^{(\alpha)} r) & (\alpha > -1), \\ a_{mn} = \dfrac{2}{\{J_{\alpha+1}(\mu_n^{(\alpha)})\}^2}\displaystyle\int_0^1 r a_m(r) J_\alpha(\mu_n^{(\alpha)} r) dr & (n = 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{96}$$

$$\begin{cases} b_m(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_\alpha(\mu_n^{(\alpha)} r) & (\alpha > -1), \\ b_{mn} = \dfrac{2}{\{J_{\alpha+1}(\mu_n^{(\alpha)})\}^2}\displaystyle\int_0^1 r b_m(r) J_\alpha(\mu_n^{(\alpha)} r) dr & (n = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{97}$$

ここで、$\mu_1^{(\alpha)}, \mu_2^{(\alpha)}, \ldots$ は増加の順に並べられた $J_\alpha(x)$ の正の零点である。(95) に (96),(97) を代入する。ただし、この時 α は m と同じ値とする。すると、

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{J_0(\mu_n^{(0)} r) a_{0n}\} + \sum_{m,n=1}^{\infty}\{J_m(\mu_n^{(m)} r)(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\} \tag{98}$$

が得られる。ここで、(98) を、

$$\Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} + \lambda\Phi = 0$$

に代入していく。ここで、$y(r) = J_m(\mu_n^{(m)} r)$ は

$$r^2 y''(r) + r y'(r) + (\{\mu_n^{(m)}\}^2 r^2 - m^2) y(r) = 0$$

を満たす。つまり、

$$y''(r) + \frac{1}{r} y'(r) = \left(-\{\mu_n^{(m)}\}^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) y(r)$$

となることに注意すると、

$$\begin{aligned}
& \Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} + \lambda\Phi \\
= \;& \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} + \left(\lambda - \{\mu_n^{(m)}\}^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \Phi \\
= \;& \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{0n} \left(\lambda - \{\mu_n^{(0)}\}^2 + \frac{0^2}{r^2} \right) J_0(\mu_n^{(0)} r) \right\} \\
+ \;& \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ \left(\lambda - \{\mu_n^{(m)}\}^2 + \frac{m^2}{r^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) J_m(\mu_n^{(m)} r)(a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) \right\} \\
= \;& \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{0n} \left(\lambda - \{\mu_n^{(0)}\}^2 \right) J_0(\mu_n^{(0)} r) \right\} \\
+ \;& \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ \left(\lambda - \{\mu_n^{(m)}\}^2 \right) J_m(\mu_n^{(m)} r)(a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) \right\}.
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{0n} \left(\lambda - \{\mu_n^{(0)}\}^2 \right) J_0(\mu_n^{(0)} r) \right\} \\
+ \;& \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ \left(\lambda - \{\mu_n^{(m)}\}^2 \right) J_m(\mu_n^{(m)} r)(a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

よって、

$$a_{0n} \left(\lambda - \{\mu_n^{(0)}\}^2 \right) \equiv 0 \text{ かつ、 } \left(\lambda - \{\mu_n^{(m)}\}^2 \right) (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) \equiv 0.$$

ここで、$\Phi \not\equiv 0$ であるので、係数 a_{mn}, b_{mn} の中で、$\Phi \equiv 0$ とならない m, n を一つ選ぶ。すると、$a_{mn} \not\equiv 0$ または $b_{mn} \not\equiv 0$ である。ゆえに、

$$\lambda = \{\mu_n^{(m)}\}^2. \qquad \blacksquare$$

3　差分法による解法

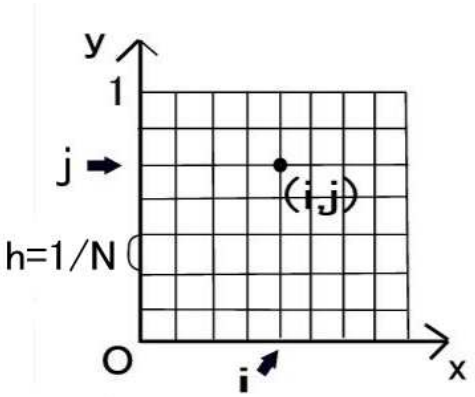
ここでは、(1) の問題を差分法によって行列の固有値問題にすることを考える。

3.1　正方領域の場合

今回は矩形領域において、正方領域の場合について考える。

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x, y < 1\}$$

とする。まず Ω の各辺を N 等分し、分点を通り、x 軸、y 軸に平行な直線群を考える。



直線の交点を格子点とする。y 軸に平行な直線を含め、左から $0, 1, 2, \ldots, N$ と番号を付ける。x 軸に平行な直線には下から $0, 1, 2, \ldots, N$ と番号を付ける。

y 軸に平行な i 番目の直線と x 軸に平行な j 番目の直線の交点を格子点 (i, j) とする。

$h = \dfrac{1}{N}$ を格子間隔とする。また、(i, j) での φ の値を φ_{ij} とする。すなわち、$\varphi_{ij} = \varphi(ih, jh) \quad (0 \leq i, j \leq N)$ とする。

2 階中心差分商を用いると、

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(ih, jh) &\approx \frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i+1,j}}{h^2}, \\ \varphi_{yy}(ih, jh) &\approx \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i,j+1}}{h^2} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi(ih, jh) &\approx -\left\{ \frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i+1,j}}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i,j+1}}{h^2} \right\} \\ &= \frac{4\varphi_{ij} - \varphi_{i-1,j} - \varphi_{i,j-1} - \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j+1}}{h^2}. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{4\varphi_{ij} - \varphi_{i-1,j} - \varphi_{i,j-1} - \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j+1}}{h^2} = \lambda\varphi_{ij} \qquad (1 \leq i, j \leq N-1) \tag{99}$$

が考えられる。また、境界条件の近似は、

$$\begin{cases} \varphi_{0,j} = \varphi_{N,j} = 0 \quad (0 \leq j \leq N), \\ \varphi_{i,0} = \varphi_{i,N} = 0 \quad (0 \leq i \leq N) \end{cases} \tag{100}$$

が考えられる。これは行列の固有値問題になる。そのために格子点に一次元的番号をつけるが、(100) は簡単な式であるので、最初に消去することにする。このことを考慮して、番号付けは、$1 \leq i, j \leq N-1$ に対して、$(i, j) \to i + (N-1)(j-1)$ とすることにする。

最後に $A\varphi = \lambda\varphi$ となる $A = (a_{ij})$ を求める。$l = i + (N-1)(j-1)$ とすると (99) より、

$$\begin{cases} a(l,l) = \dfrac{4}{h^2}, & \\ a(l,l-1) = -\dfrac{1}{h^2} & (i \neq 1), \\ a(l,l-(N-1)) = -\dfrac{1}{h^2} & (j \neq 1), \\ a(l,l+1) = -\dfrac{1}{h^2} & (i \neq N-1), \\ a(l,l+(N-1)) = -\dfrac{1}{h^2} & (j \neq N-1) \end{cases} \tag{101}$$

となり、行列 A が定まる。

例として、$N = 4$ の時の行列 A を示す。

$$A = 16 \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & & O & \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & & \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ & & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ & O & & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

A は、$(4-1)^2 = 9$ 次の正方行列になっていることが分かる。また、実対称行列になることも明らかに分かる (これらの事は、もちろん一般の N について成り立つ)。

3.1.1 差分作用素 A に対する固有値と固有ベクトル

ここでは、正方領域における差分作用素 A に対する固有値と固有ベクトルを調べていく。上と同じく領域を N 等分した場合を考える。記号も上と同じとする。もちろん、$h = \dfrac{1}{N}$ である。また、

$$x_i = ih, \quad y_j = jh$$

とする。すると、次の命題が成り立つ。

命題
$^\forall l, m \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ に対して、

$$\lambda^{(l,m)} = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{l\pi h}{2} + \sin^2\frac{m\pi h}{2}\right) \tag{102}$$

は、差分作用素 A の固有値であり、対応する固有ベクトルは、

$$\varphi^{(l,m)}(x_i, y_j) = \sin l\pi x_i \sin m\pi y_j \tag{103}$$

で与えられる。この時、固有値とそれに対応する固有ベクトルは $(N-1)^2$ 個求まり、本質的にこれで全てである。

証明
まず、任意の l, m に対して (102), (103) が成り立つことを示す。$1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq N-1$ に対して、

$$\begin{aligned} A\varphi^{(l,m)}(x_i, y_j) &= -\frac{1}{h^2}\{(\sin l\pi x_{i-1} \sin m\pi y_j - 2\sin l\pi x_i \sin m\pi y_j + \sin l\pi x_{i+1} \sin m\pi y_j) \\ &\quad +(\sin l\pi x_i \sin m\pi y_{j-1} - 2\sin l\pi x_i \sin m\pi y_j + \sin l\pi x_i \sin m\pi y_{j+1})\}. \end{aligned} \tag{104}$$

ここで、$\sin l\pi x_{i+1}$ は、$i = N-1$ の時、つまり $\sin l\pi$ の時には境界条件より 0 とならなければならない。よって l は整数である。同様に m も整数である。計算の続きをすると、

$$\begin{aligned}
(104)\text{の右辺} &= -\frac{1}{h^2}\{\sin m\pi y_j(\sin l\pi(x_i-h) - 2\sin l\pi x_i + \sin l\pi(x_i+h)) \\
&\quad + \sin l\pi x_i(\sin m\pi(y_i-h) - 2\sin m\pi y_i + \sin m\pi(y_i+h))\} \\
&= -\frac{1}{h^2}\{\sin m\pi y_i \cdot 2\sin l\pi x_i(\cos l\pi h - 1) + \sin l\pi x_i \cdot 2\sin m\pi y_j(\cos m\pi h - 1)\} \\
&= \frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{l\pi h}{2} + \sin^2\frac{m\pi h}{2}\right)\sin l\pi x_i \sin m\pi y_j \\
&= \frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{l\pi h}{2} + \sin^2\frac{m\pi h}{2}\right)\varphi^{(l,m)}(x_i, y_j).
\end{aligned}$$

よって、任意の整数 l, m に対して、$(102), (103)$ が成り立つことがわかる。

次に、l を固定すると、

$$m \equiv m'(\mathrm{mod}\ N) \quad \Longrightarrow \quad \varphi^{(l,m)} = \varphi^{(l,m')} \text{ または } \varphi^{(l,m)} = -\varphi^{(l,m')} \tag{105}$$

が成り立つ。また、m を固定すると、

$$l \equiv l'(\mathrm{mod}\ N) \quad \Longrightarrow \quad \varphi^{(l,m)} = \varphi^{(l',m)} \text{ または } \varphi^{(l,m)} = -\varphi^{(l',m)} \tag{106}$$

が成り立つ。$(105), (106)$ が成り立てば l, m は $1, 2, \ldots, N-1$ を走らせれば十分であることがわかる。l または m が 0 の時は、固有ベクトルが恒等的に 0 なってしまい不適である。

(105) を証明する。

$^\forall k \in \mathbf{Z},\ m' = m + kN$ とおく。すると、

$$\begin{aligned}
\sin l\pi x_i \sin m'\pi y_j &= \sin l\pi x_i \sin(m+kN)\pi y_j \\
&= \sin l\pi x_i \sin(m+kN)\pi jh \\
&= \sin l\pi x_i \sin(m\pi jh + jk\pi) \\
&= \begin{cases} \sin l\pi x_i \sin m\pi y_j & (jk : \text{偶数の時}) \\ -\sin l\pi x_i \sin m\pi y_j & (jk : \text{奇数の時}) \end{cases}
\end{aligned}$$

となり、(105) を証明できた。(106) も同様に証明できる。 ∎

次に、固有値の理論値との比を考える。λ を理論値とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\lambda^{(l,m)}} &= \frac{(l^2+m^2)\pi^2}{\frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{l\pi h}{2} + \sin^2\frac{m\pi h}{2}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{l\pi h}{2}\right)^2 + \left(\frac{m\pi h}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{l\pi h}{2} + \sin^2\frac{m\pi h}{2}}
\end{aligned}$$

となる。$h \to +0$ の時、この値は 1 になることが分かる。つまり、差分作用素 A による固有値の値は厳密解へと収束しているということがわかった。また、$l = m = N$ の時、この値はおよそ 2.4674 となることも分かる。固有値の番号が最大のところは、この程度の誤差が生じる $(2.4674$ は超えない$)$ ということである。

またこのことから、重複度を含む固有値、例えば $5\pi^2(l = 1, m = 2$ または $l = 2, m = 1$ の時$)$ については、分割数を上げると誤差は全く同じように減っていくことが分かる。また、$50\pi^2(l = 5, m = 5$ または $l = 7, m = 1$ または $l = 1, m = 7$ の時$)$ のような場合については、2 つの固有値の誤差は全く同じように減っていくが、1 つの固有値については他の 2 つに比べて誤差の減り方が異なってしまうことが分かる。

3.2 円盤領域の場合

(1) を極座標変換した、

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = \lambda\Phi \quad (0 < r < 1), \\ \\ \Phi(1,\theta) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le \theta < 2\pi) \end{cases}$$

について考える。

$$\Omega = \{(r,\theta) \mid 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$$

である。

まず Ω の各辺をそれぞれ N_r, N_θ 等分し、分点を通り r 軸 y 軸に平行な直線群を考える。
$h_r = \dfrac{1}{N_r}$, $h_\theta = \dfrac{1}{N_\theta}$ とする。

直線の交点を格子点とする。θ 軸に平行な直線を左から $0, 1, 2, \ldots, N_r$ と番号を付ける。r 軸に平行な直線も下から $0, 1, 2, \ldots, N_\theta$ と番号を付ける。θ 軸に平行な i 番目の直線と、r 軸に平行な j 番目の直線の交点を格子点 (i, j) とする。

(i, j) での Φ の値を Φ_{ij} とする。すなわち、$\Phi_{ij} = \Phi(ih_r, jh_\theta) \quad (0 \le i \le N_r,\ 0 \le j \le N_j)$ とする。

2 階中心差分商を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}(ih_r, jh_\theta) &\approx \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i+1,j}}{h_r^2} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}(ih_r, jh_\theta) &\approx \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i,j+1}}{h_\theta^2} \end{aligned}$$

また、1 階中心差分商を用いると、

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(ih_r, jh_\theta) \approx \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2h_r}$$

が得られるので、

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = \lambda\Phi$$

については、$r = ih_r$ に注意すると、

$$-\frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i+1,j}}{h_r^2} - \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2ih_r^2} - \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i,j+1}}{i^2h_r^2h_\theta^2} = \lambda\Phi_{ij}$$

つまり、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h_r^2h_\theta^2}\Bigg\{ \left(4h_\theta^2 + \frac{4}{i^2}\right)\Phi_{ij} \quad &+ \quad \left(\frac{h_\theta^2}{i} - 2h_\theta^2\right)\Phi_{i-1,j} \ - \ \frac{2}{i^2}\Phi_{i,j-1} \\ &+ \quad \left(-2h_\theta^2 - \frac{h_\theta^2}{i}\right)\Phi_{i+1,j} \ - \ \frac{2}{i^2}\Phi_{i,j+1}\Bigg\} = \lambda\Phi_{ij} \end{aligned} \tag{107}$$

という式が考えられる。ここで、$1 \le i \le N_r - 1, \quad 0 \le j \le N_\theta - 1$ である。ただし、添え字 j が -1 となった場合は、j は $N_\theta - 1$ とする。

境界条件の近似は、

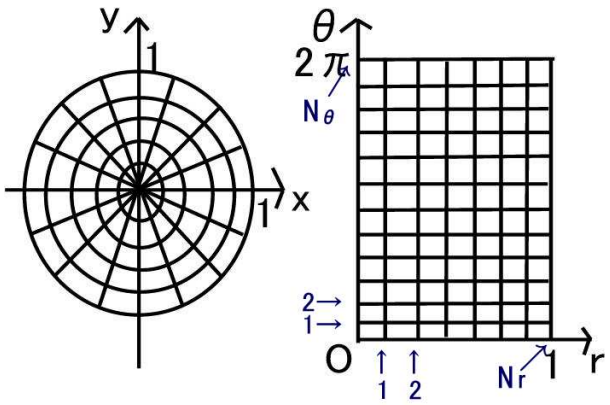
$$\Phi_{N_r,j} = 0 \qquad (0 \le j \le N_\theta) \tag{108}$$

である。また、原点における近似 $\Phi_{0,j}$ については、もとの式

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi$$

を用いて考えることにする。

半径 h_r、中心が原点の円を描くと、この円が x 軸、y 軸と交わる点における値は、$\Phi_{1,0}$, $\Phi_{1,\frac{N_\theta}{4}}$, $\Phi_{1,\frac{2N_\theta}{4}}$, $\Phi_{1,\frac{3N_\theta}{4}}$, 中心の値は $\varphi_{0,0}$ となる。



2 階中心差分近似をすると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0) &= \frac{\Phi_{1,0} - 2\varphi_{0,0} + \Phi_{1,\frac{2N_\theta}{4}}}{h_r^2} + \{O(h_r^2)\} \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0) &= \frac{\Phi_{1,\frac{N_\theta}{4}} - 2\varphi_{0,0} + \Phi_{1,\frac{3N_\theta}{4}}}{h_r^2} + \{O(h_r^2)\}
\end{aligned}$$

よって、これから、

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(0,0) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0) \\
&= \frac{\Phi_{1,0} + \Phi_{1,\frac{N_\theta}{4}} + \Phi_{1,\frac{2N_\theta}{4}} + \Phi_{1,\frac{3N_\theta}{4}} - 4\varphi_{0,0}}{h_r^2} + \{O(h_r^2)\}
\end{aligned}$$

と導くことができる。そして、x 軸 y 軸を少しだけ回転させていく。$\Delta\varphi$ は、回転させても不変なので、この回転を繰り返し行うと、

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(0,0) &= \frac{\Phi_{1,0} + \Phi_{1,\frac{N_\theta}{4}} + \Phi_{1,\frac{2N_\theta}{4}} + \Phi_{1,\frac{3N_\theta}{4}} - 4\varphi_{0,0}}{h_r^2} + \{O(h_r^2)\} \\
&= \frac{\Phi_{1,1} + \Phi_{1,\frac{N_\theta}{4}+1} + \Phi_{1,\frac{2N_\theta}{4}+1} + \Phi_{1,\frac{3N_\theta}{4}+1} - 4\varphi_{0,0}}{h_r^2} + \{O(h_r^2)\} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&= \frac{\Phi_{1,\frac{N_\theta}{4}-1} + \Phi_{1,\frac{2N_\theta}{4}-1} + \Phi_{1,\frac{3N_\theta}{4}-1} + \Phi_{1,N_\theta-1} - 4\varphi_{0,0}}{h_r^2} + \{O(h_r^2)\}.
\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{N_\theta}{4}\Delta\varphi(0,0) = \frac{\Phi_{1,0} + \Phi_{1,1} + \cdots + \Phi_{1,N_\theta-1} - N_\theta\varphi_{0,0}}{h_r^2} + \{O(h_r^2)\}$$

となるので、

$$\Delta\varphi(0,0) = \frac{4\left(\dfrac{1}{N_\theta}\displaystyle\sum_{j=0}^{N_\theta-1}\Phi_{1,j} - \varphi_{0,0}\right)}{h_r^2} + \{O(h_r^2)\}$$

が得られる。よって、原点では近似的に、

$$-\frac{4\left(\dfrac{1}{N_\theta}\displaystyle\sum_{j=0}^{N_\theta-1}\Phi_{1,j} - \varphi_{0,0}\right)}{h_r^2} = \lambda\varphi_{0,0} \tag{109}$$

とできる。$\Phi_{0,j}$ $(j = 0, 1, \ldots, N_\theta - 1)$ については、この式を用いることにする。

ここで、格子点の一次元的番号をつけるが、$\Phi_{N_r,j}$ については (108) より簡単な式であるので、最初に消去することにする。$\Phi_{0,j}$ については、まとめて $\varphi_{0,0}$ として 1 番目にすることにする。

このことを考慮して、番号付けは、$1 \le i \le N_r - 1, \quad 0 \le j \le N_\theta - 1$ に対して、$(i, j) \to 1 + i + (N_r - 1)j$ とすることにする $(\varphi_{0,0}$ を 1 番目とするために 1 を足している$)$。

最後に $A\Phi = \lambda\Phi$ となる $A = (a_{ij})$ を求める。$l = 1 + i + (N_r - 1)j$ とすると、(107) より、

$$\begin{cases} a(l,l) = \dfrac{2}{h_r^2 h_\theta^2}\left(h_\theta^2 + \dfrac{1}{i^2}\right), \\ \\ a(l,l-1) = \dfrac{1}{2h_r^2}\left(\dfrac{1}{i} - 2\right) \\ \qquad \left(\text{ただし } i = 1 \text{ の時、} a(l,1) = \dfrac{1}{2h_r^2}\left(\dfrac{1}{i} - 2\right)\right), \\ \\ a(l,l-(N_r-1)) = -\dfrac{1}{i^2 h_r^2 h_\theta^2} \\ \qquad \left(\text{ただし } j = 0 \text{ の時、} a(l,1+i+(N_r-1)(N_\theta-1)) = -\dfrac{1}{i^2 h_r^2 h_\theta^2}\right), \\ \\ a(l,l+1) = -\dfrac{1}{2h_r^2}\left(2 + \dfrac{1}{i}\right) \\ \qquad (\text{ただし } i = N_r - 1 \text{ の時、} a(l,l+1) = 0), \\ \\ a(l,l+(N_r-1)) = -\dfrac{1}{i^2 h_r^2 h_\theta^2} \\ \qquad \left(\text{ただし、} j = N_\theta - 1 \text{ の時、} a(l,1+i) = -\dfrac{1}{i^2 h_r^2 h_\theta^2}\right) \end{cases} \tag{110}$$

となる。また、(109) より、

$$\frac{4}{h_r^2}\varphi_{0,0} - \frac{4}{h_r^2 N_\theta}(\Phi_{1,0} + \Phi_{1,1} + \cdots + \Phi_{1,N_\theta-1}) = \lambda\varphi_{0,0}$$

という近似が出来るので、

$$\begin{cases} a(1,1) = \dfrac{4}{h_r^2}, \\ \\ a(1,2+(N_r-1)j) = -\dfrac{4}{h_r^2 N_\theta} \end{cases} \tag{111}$$

が得られる。よって、(110),(111) より、行列 A が定まる。A は $N_\theta(N_r-1)+1$ 次正方行列である。また、A は実対称行列とはならない。

例として、$N_r=4,\ N_\theta=3$ の場合を挙げる。行列の値が出る地点を示すために、(110) 式を上から a,b,c,d,e と、(111) 式を上から f,g と対応させる。すると、$A\Phi=\lambda\Phi$ は次のようになる。

$$
\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
f & g & & & g & & & g & & \\
\hline
b & a & d & & e & & & c & & \\
 & b & a & d & & e & & & c & \\
 & & b & a & & & e & & & c \\
\hline
b & c & & & a & d & & e & & \\
 & & c & & b & a & d & & e & \\
 & & & c & & b & a & & & e \\
\hline
b & e & & & c & & & a & d & \\
 & & e & & & c & & b & a & d \\
 & & & e & & & c & & b & a
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
\varphi_{0,0}\\ \Phi_{1,0}\\ \Phi_{2,0}\\ \Phi_{3,0}\\ \Phi_{1,1}\\ \Phi_{2,1}\\ \Phi_{3,1}\\ \Phi_{1,2}\\ \Phi_{2,2}\\ \Phi_{3,2}
\end{array}\right)
=\lambda
\left(\begin{array}{c}
\varphi_{0,0}\\ \Phi_{1,0}\\ \Phi_{2,0}\\ \Phi_{3,0}\\ \Phi_{1,1}\\ \Phi_{2,1}\\ \Phi_{3,1}\\ \Phi_{1,2}\\ \Phi_{2,2}\\ \Phi_{3,2}
\end{array}\right)
$$

ここで、空白の部分は値が 0 である。具体的には、行列 A は、

$$
\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
64 & -64/3 & & & -64/3 & & & -64/3 & & \\
\hline
-8 & 320 & -24 & & -144 & & & -144 & & \\
 & -12 & 104 & -20 & & -36 & & & -36 & \\
 & & -40/3 & 64 & & & -16 & & & -16 \\
\hline
-8 & -144 & & & 320 & -24 & & -144 & & \\
 & & -36 & & -12 & 104 & -20 & & -36 & \\
 & & & -16 & & -40/3 & 64 & & & -16 \\
\hline
-8 & -144 & & & -144 & & & 320 & -24 & \\
 & & -36 & & & -36 & & -12 & 104 & -20 \\
 & & & -16 & & & -16 & & -40/3 & 64
\end{array}\right)
$$

となる。

4 実験結果

問題 (1) を 3 節で行列の固有値問題にしたが、これを数値計算ソフトウェアである MATLAB や Octave を用いて実験をする。MATLAB や Octave を使えば簡単に行列の固有値問題を解くことが出来る。以下 MATLAB や Octave で解いた結果について考察する。

4.1 正方領域の場合

4.1.1 Octave を用いた場合

Octave で解いた時の、最小固有値に対する固有関数は図 1 のようになる。($N=20$ の時) また、固有値の誤差は、分割数 N の 2 乗に比例して小さくなることが図 2 のグラフ (上側の直線) の傾きを調べることによって確認できる。

また、正方領域における第 2 第 3 固有値 $5\pi^2$ に対する固有関数は図 3 のようになった。この第 2 第 3 固有値の重複度は 2 であるので、任意の固有関数はこの 2 つの固有関数の線形結合で与えられる。

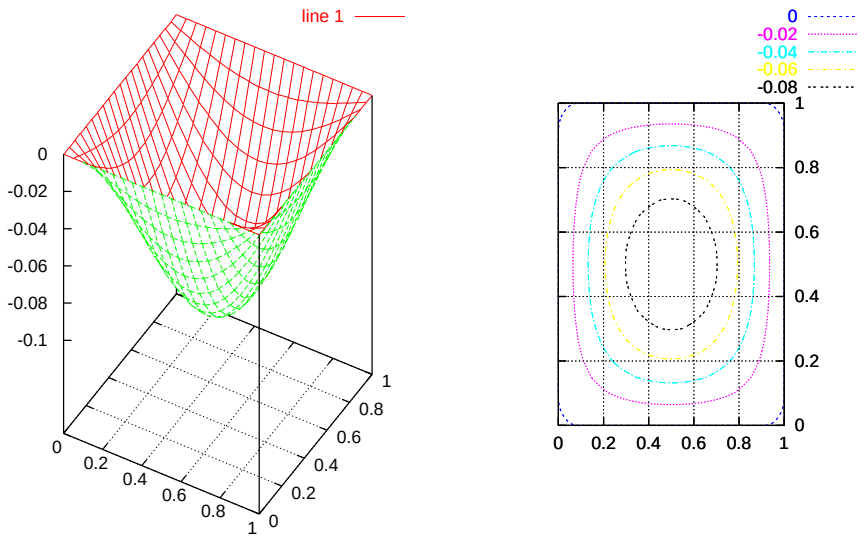


図 1: Octave による正方領域における最小固有値に対する固有関数のグラフ

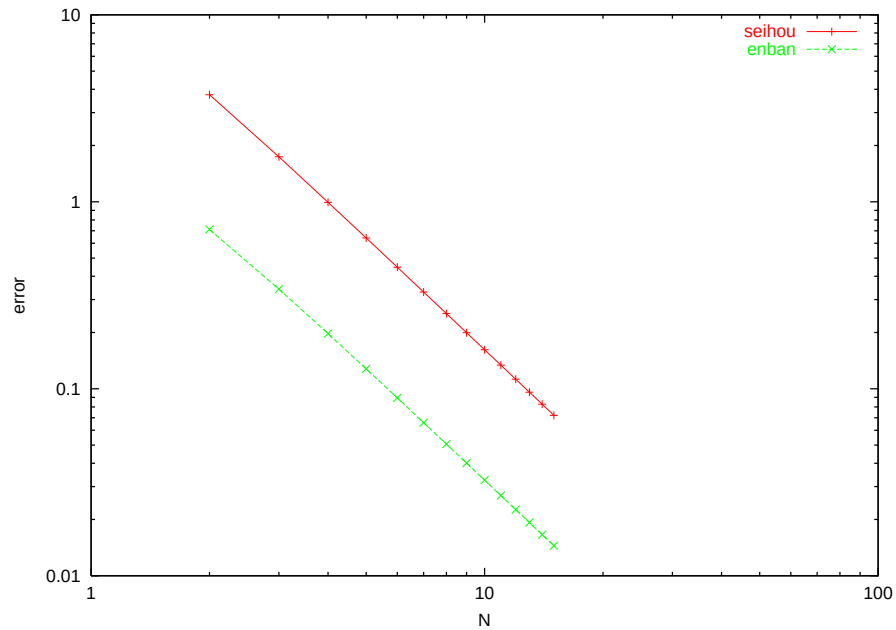


図 2: 最小固有値に対する誤差の対数グラフ

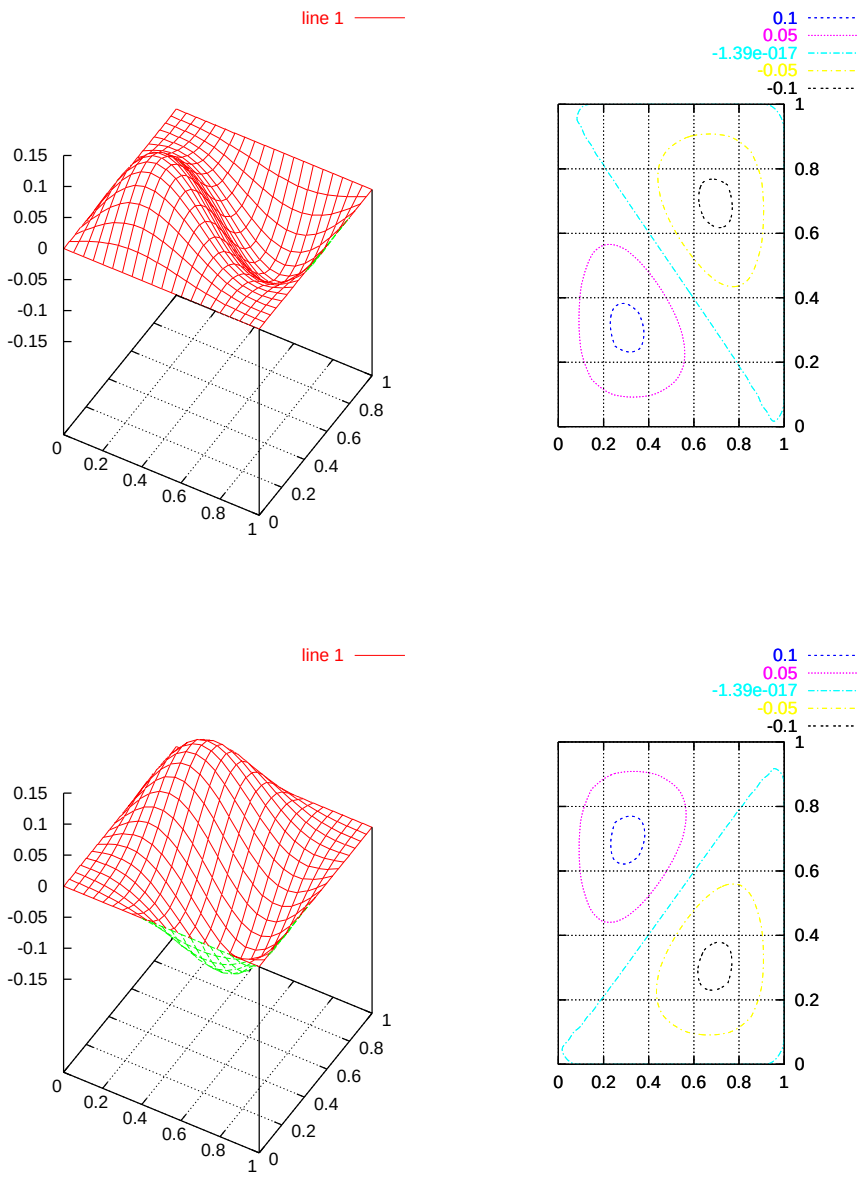


図 3: 正方領域における第 2 第 3 固有値 $5\pi^2$ に対する固有関数

固有関数の誤差　ここでは、固有関数についての理論値との誤差 (各格子点の誤差の L^2 ノルムと各格子点の平均誤差) を調べた結果を示す。実験で得られた各格子点 φ の絶対値で、一番大きいところに理論値を揃えた場合の誤差を調べた。最小固有関数について、誤差は以下のようになった。

N	各格子点の誤差の L^2 ノルム	格子点 1 つあたりの平均誤差
3	8.9509e-16	3.6082e-16
4	5.4531e-16	1.3569e-16
5	8.3590e-16	1.5092e-16
6	4.3467e-16	6.1617e-17
7	1.8709e-15	2.4517e-16
8	8.5978e-16	9.1905e-17
9	1.9883e-15	1.9434e-16
10	4.0132e-15	3.7873e-16
11	2.8454e-15	2.1106e-16
12	5.0143e-15	3.5983e-16
13	4.4921e-15	2.9083e-16
14	6.5026e-15	3.3393e-16
15	1.9462e-14	1.1231e-15
16	1.8636e-14	1.0511e-15
17	1.6604e-14	8.0167e-16
18	4.5417e-14	2.0384e-15
19	2.6944e-14	1.1906e-15
20	1.8978e-14	7.2355e-16
21	2.9771e-14	1.1819e-15

各格子点の誤差は最初からかなり小さい。よってこの場合、固有関数は分割数によらず正確な値を与えると想像できる。実際、3.1.1 での考察より、差分作用素 A の固有ベクトルは理論値と同じ値を与えることがわかる。

N	各格子点の誤差の L^2 ノルム	格子点 1 つあたりの平均誤差
3	9.7580e-16	3.4694e-16
4	0.99998	0.22669
5	2.7357e-15	5.2909e-16
6	5.8259e-15	9.8247e-16
7	3.7755e-15	4.7666e-16
8	7.3563e-15	8.5003e-16
9	4.4149e-15	4.4685e-16
10	5.0838e-15	4.7791e-16
11	7.3392e-15	5.7078e-16
12	1.2346e-14	9.0265e-16
13	1.3379e-14	8.8182e-16
14	1.4618e-14	9.2764e-16
15	4.1037e-14	2.3024e-15
16	3.2639e-14	1.6713e-15
17	8.5654e-14	4.1965e-15
18	3.9408e-14	1.8001e-15
19	3.8329e-14	1.5593e-15
20	1.9723e-14	7.9469e-16

N が 4 の場合以外に関しては、格子点 1 つあたりの平均誤差は 10^{-16} 程度で安定していることが分かる (ゆるやかに増えているようにも見える)。このとき、固有関数は図 $4(N{=}20$ の時) のようになっている。N が 4 の時は、誤差がなぜか大きくなっている。

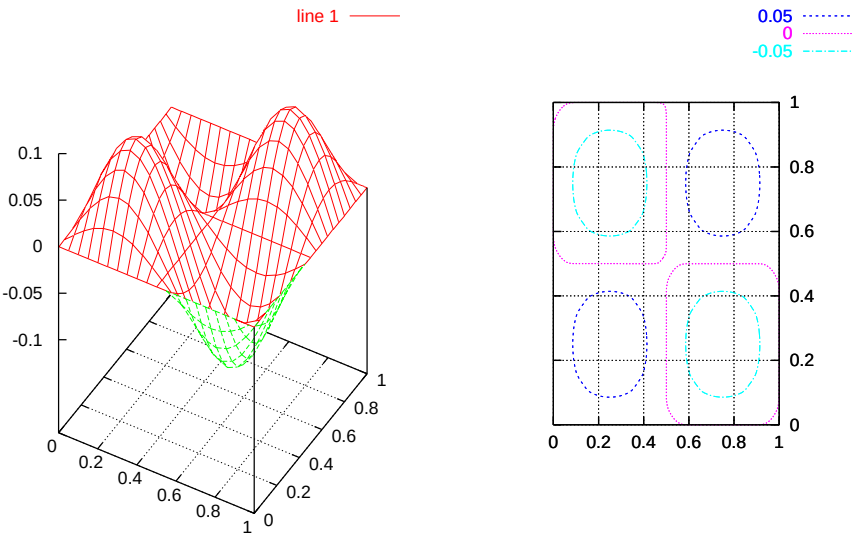


図 4: 正方領域における第 4 固有値 $8\pi^2$ に対する固有関数

固有値の誤差　最小固有値において、固有値の誤差は N の 2 乗に比例して減少するということは先に示した。ここでは、固有値の番号が大きいところや、重複度を持った場合について実験していく。

図 5 は第 9 第 10 第 11 固有値の誤差のグラフである。第 9 第 10 固有値は理論値が $17\pi^2(m=4,\ n=1,$ または $m=1,\ n=4$ の時) である。もちろん重複度は 2 である。第 11 固有値は理論値が $18\pi^2(m=3,\ n=3$ の時) である。もちろん重複度は 1 である。グラフにおいて、一番下の直線が第 11 固有値のグラフ、重なっているのが第 9 第 10 固有値である。重複度が入っている時、2 つの固有値の誤差は全く同様に減少することがわかる。分割数が 4 の時は行列 A は 9 次正方行列で固有値の近似値は $m,n=1,2,3$ の時の固有値しか現れない (今回は、$N=5$ からデータを取り始めている。)。

誤差の減り方はどれも同じで、傾きを調べると、およそ N の 2 乗に比例して誤差が小さくなっていることが分かる。また、普通は固有値の番号の大きいほうが誤差が大きくなるのに、第 11 固有値のほうが第 9 第 10 固有値に比べて誤差が小さくなっている。このことから、重複度が入ると誤差は大きくなっている。この結果から、$3.1.1$ で考察したことが確認できた。

N	第 9 固有値の誤差	第 10 固有値の誤差	第 11 固有値の誤差
5	67.783275	67.783275	52.652879
6	50.137104	50.137104	33.652879
7	38.271172	38.271172	25.266982
8	30.039855	30.039855	19.619838
9	24.144484	24.144484	15.652879
10	19.797977	19.797977	12.766980
11	16.511008	16.511008	10.605474
12	13.969913	13.969913	8.946385
13	11.967494	11.967494	7.646145
14	10.363019	10.363019	6.608761
15	9.058468	9.058468	5.768174
16	7.984010	7.984010	5.077762
17	7.088881	7.088881	4.503888
18	6.335498	6.335498	4.021803
19	5.695584	5.695584	3.612976
20	5.147543	5.147543	3.263318

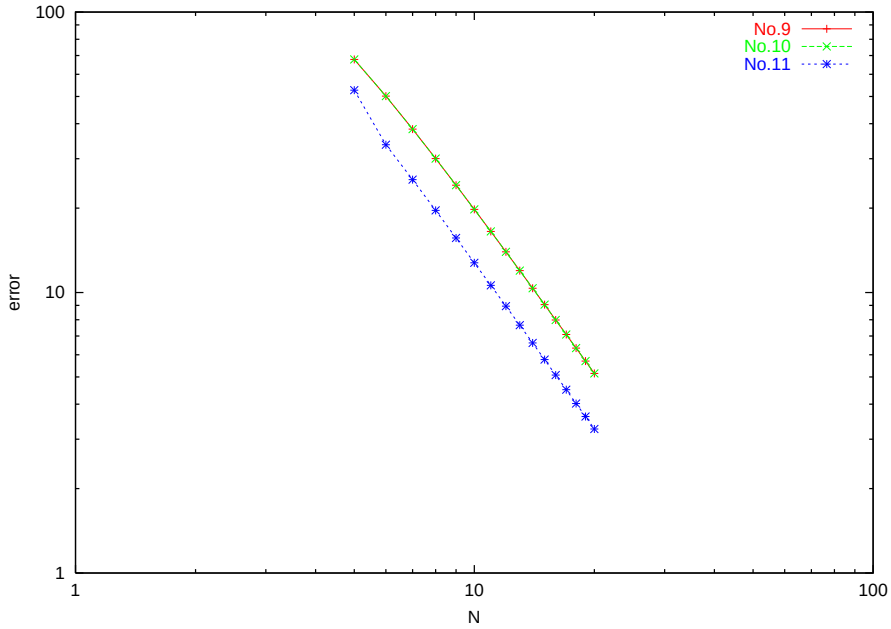


図 5: 第 9 第 10 第 11 固有値の誤差の対数グラフ

図 6 は第 12 第 13 第 14 第 15 固有値の誤差のグラフである。第 12 第 13 固有値は理論値が $20\pi^2(m=4,\ n=2,$ または $m=2,\ n=4$ の時) である。第 14 第 15 固有値は理論値が $25\pi^2(m=4,\ n=3,$ または $m=3,\ n=4$ の時) である。もちろん重複度はそれぞれ 2 である。

誤差の減り方については、どちらもおよそ N の 2 乗に比例して小さくなっていることが分かる (第 14 第 15 固有値に関しては N が 15 ~ 20 の部分を調べた)。また誤差は、重複度を持つ同じ固有値に対しては (N が小さいところを除いて) 同じであることが分かる。

N の小さいところで、重複度 2 をもつ固有値について違いが出てくるのは、Octave にこの固有値問題を解か

せると、Octave は固有値を小さい順に出力してしまうためだと思われる。この場合、N が 5 の時は第 11 固有値と第 12 第 13 固有値の順番が逆になっていると思われる。N を大きくするにつれて、誤差が減っていくので、N を大きくすれば、固有値の順番は自然に順番どおりになると思われる。

N	第 12 固有値の誤差	第 13 固有値の誤差	第 14 固有値の誤差	第 15 固有値の誤差
5	72.392088	66.490389	90.838411	90.838411
6	53.392088	53.392088	102.740110	102.740110
7	40.687037	40.687037	77.933058	77.933058
8	31.901756	31.901756	60.013211	60.013211
9	25.622293	25.622293	46.839310	46.839310
10	20.998886	20.998886	36.951413	36.951413
11	17.505876	17.505876	29.377601	29.377601
12	14.807404	14.807404	23.466633	23.466633
13	12.682109	12.682109	18.774896	18.774896
14	10.979887	10.979887	14.994277	14.994277
15	9.596317	9.596317	11.906530	11.906530
16	8.457081	8.457081	10.491223	10.491223
17	7.508191	7.508191	9.312769	9.312769
18	6.709705	6.709705	8.321371	8.321371
19	6.031584	6.031584	7.479606	7.479606
20	5.450897	5.450897	6.758925	6.758925

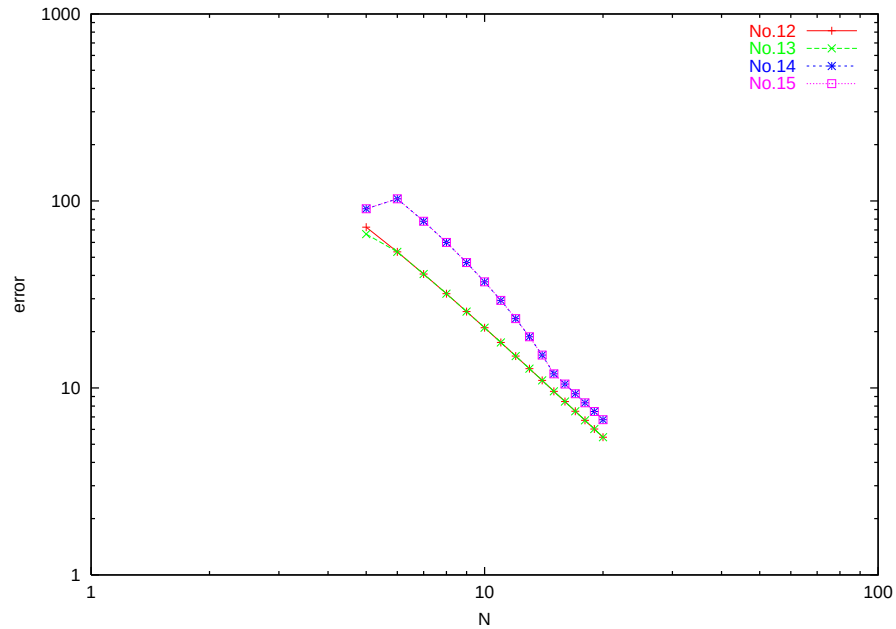


図 6: 第 12 第 13 第 14 第 15 固有値の誤差の対数グラフ

図 7 は第 31 第 32 第 33 の固有値の誤差のグラフである。第 31 第 32 第 33 固有値は理論値が $50\pi^2 (m = 7,\ n = 1,$ または $m = 1,\ n = 7$ または $m = 5,\ n = 5$ の時) である。もちろん重複度は 3 である。

このときは、重複度があるが全て同じ誤差とはならない。第 31 第 32 固有値については誤差が全く同じであるが、第 33 固有値については誤差の減り方が他の 2 つと異なっている。第 31 第 32 固有値についての誤差は、ほぼ N の 2 乗に比例して小さくなっている (やや 2 より小さい。分割数を更に上げていけば 2 に近づきそう？)。第

33 固有値についての誤差は、N が $18 \sim 20$ のところを見れば、ほぼ N の 2 乗に比例して小さくなっている。

同じ固有値であるが、誤差が同じにならないのは、$m = 7,\ n = 1$, または $m = 1,\ n = 7$ の時と、$m = 5,\ n = 5$ の時の差である。これで、3.1.1 で考察したことの確認ができた。

N	第 31 固有値の誤差	第 32 固有値の誤差	第 33 固有値の誤差
8	195.954031	195.954031	188.496741
9	169.480220	169.480220	169.480220
10	149.233872	149.233872	137.726568
11	133.516327	133.516327	112.533142
12	121.126973	121.126973	92.355651
13	104.917156	104.917156	76.022959
14	91.651962	91.651962	62.660016
15	80.684449	80.684449	51.613484
16	71.528528	71.528528	42.392786
17	63.815880	63.815880	34.626377
18	57.264697	57.264697	30.532962
19	51.657178	51.657178	27.474809
20	46.823292	46.823292	24.851070

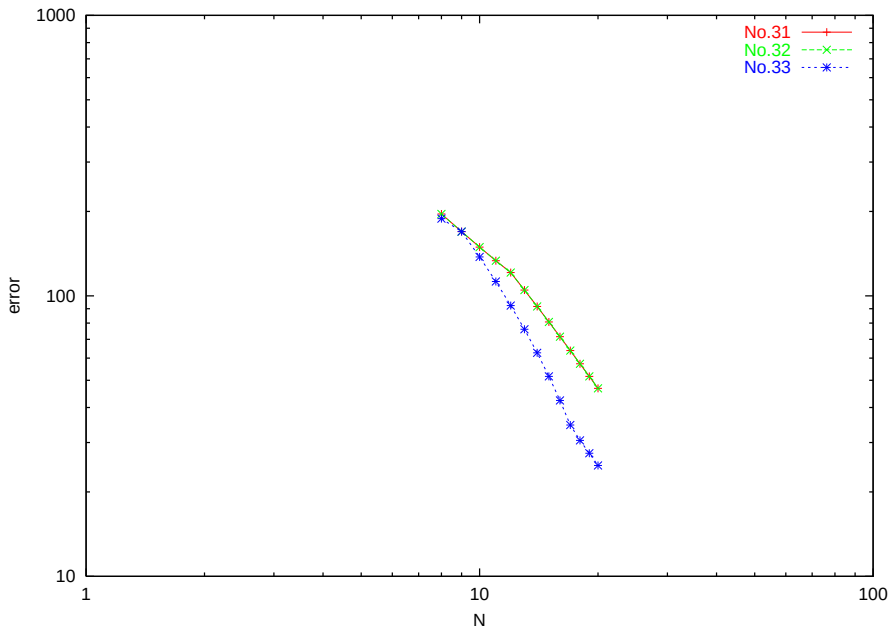


図 7: 第 31 第 32 第 33 固有値の誤差の対数グラフ

4.1.2 MATLAB を用いた場合

Octave はフリーソフトであり、手軽に実験できるが、どうしても大きな分割数では時間がかかり過ぎてしまい、うまく解けない。そこで、疎行列用の命令文がある MATLAB が有効になってくる。ここでは、分割数を Octave の場合よりもかなり大きくして実験していく。

MATLAB で解いた時の、最小固有値に対する固有関数は図 8 のようになる ($N = 100$ の時)。Octave に比べて、かなり分割数が細かくなっていることが図を見ても確認できる。

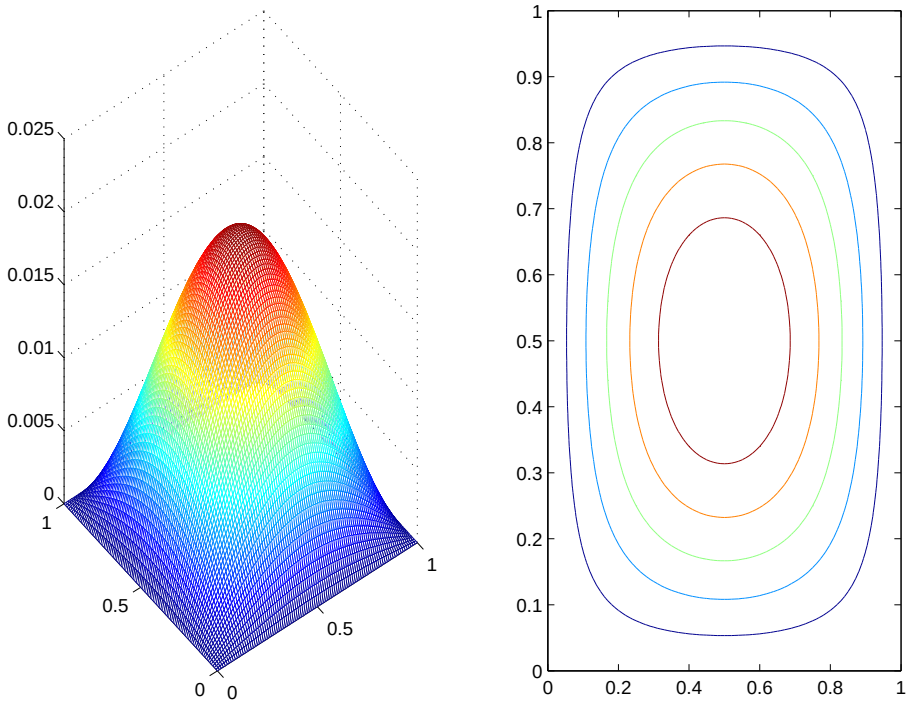


図 8: MATLAB による正方領域における最小固有値に対する固有関数のグラフ

固有関数の誤差　MATLAB によって、固有関数の誤差を同じ状況下で計算させると、計算するごとに値が 10^{-15} ~ 10^{-16} 程度で異なってしまう。計算させるたびに値が異なってしまう原因として、固有値の計算法にべき乗法系統のものを使っていて、初期ベクトルを乱数で選んでいるから、という可能性が考えられる。ともかく、分割数が小さいうちから、誤差がとても小さくなるということは確認できた。この場合、固有関数は分割数によらず正確な値を与えると想像できる。

固有値の誤差　最小、第 2、第 3、第 4 固有値の誤差のグラフは図 9 のようになった。傾きを調べると、誤差は N の 2 乗に比例して小さくなっていることが分かる。もちろん第 2 固有値と第 3 固有値の誤差が全く同じであることも確認できる。

4.2　円盤領域の場合

4.2.1　Octave を用いた場合

Octave で解いた時の、最小固有値に対する固有関数は図 10 のようになる ($N_r = 15,\ N_\theta = 30$ の時)。また、固有値の誤差は、分割数 N_r, N_θ の 2 乗に比例して小さくなることが図 2 の直線 (下側の直線) の傾きを確認することによって分かる。(N_r を横軸とし、N_θ は N_r の 2 倍とした。)

また、円盤領域における $m = 0$ に対する第 2 第 3 固有関数は図 11 のようになった。

固有関数の誤差　ここでは、固有関数についての理論値との誤差 (各格子点の誤差の L^2 ノルム) を調べた結果を示す。原点から実験で得られた各格子点 Φ の距離の中で、一番大きいところに理論値を揃えた場合の誤差を調べ

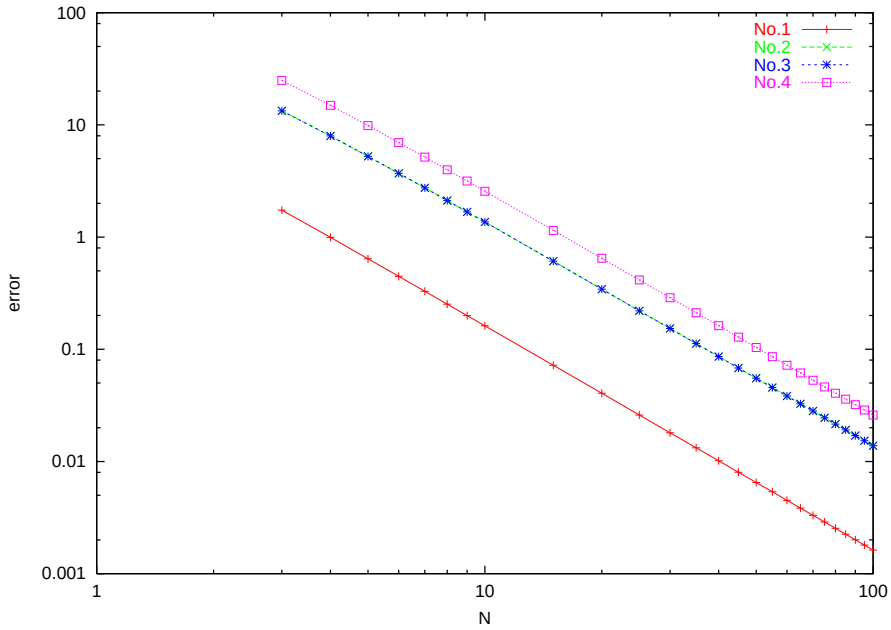


図 9: MATLAB による最小第 2 第 3 第 4 固有値の誤差の対数グラフ

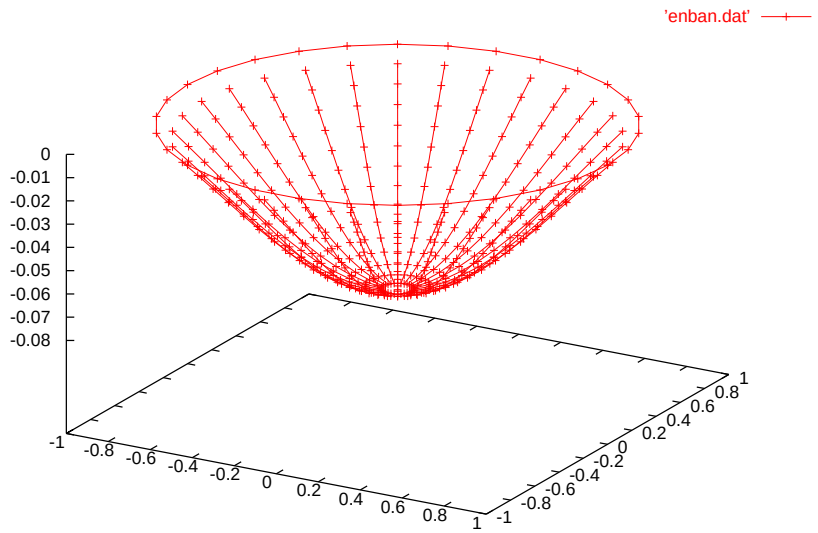


図 10: Octave による円盤領域における最小固有値に対する固有関数のグラフ

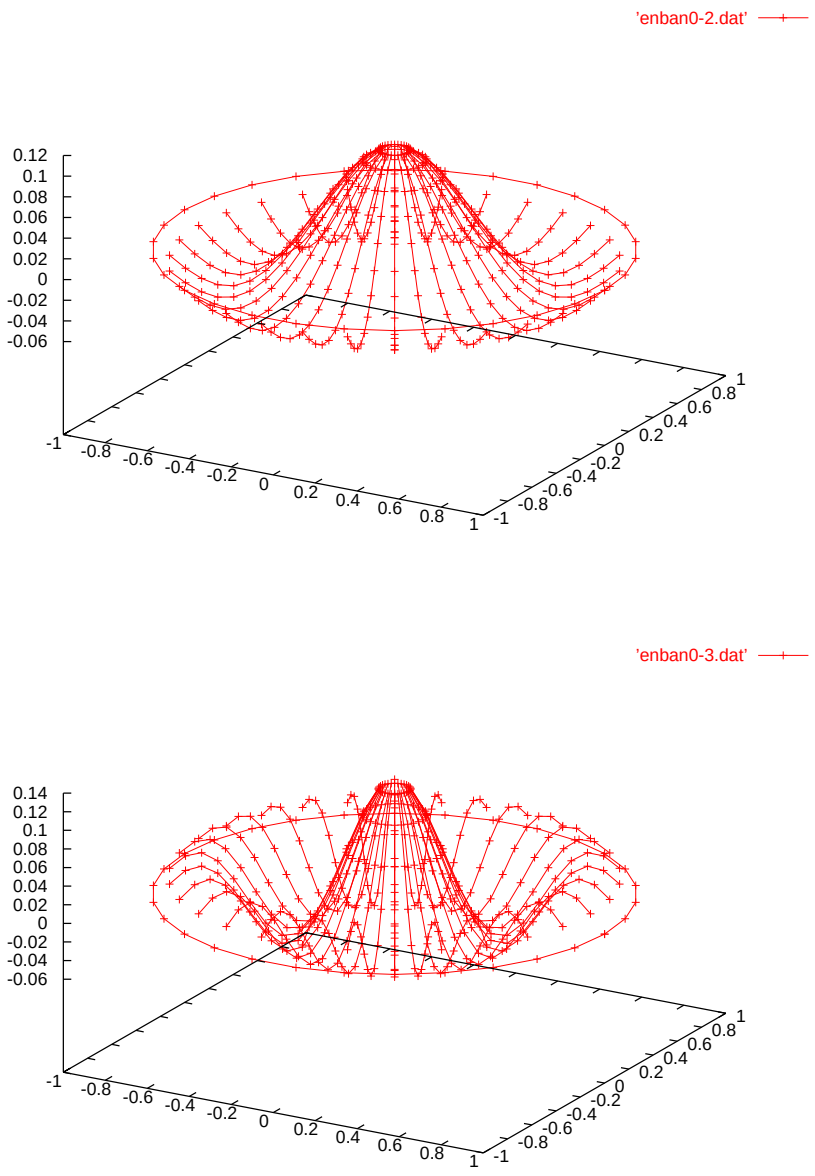


図 11: 円盤領域における $m = 0$ に対する第 2 第 3 固有関数

た。$m=0$ における固有関数について、誤差は図 12 のようになった。ここで、N_θ は N_r の 2 倍とした。

グラフを見ると、第 2 第 3 固有関数の誤差はおよそ N_r の 2 乗に比例して小さくなっている。最小固有関数はおよそ N_r の 1.85 乗に比例して小さくなっている。

N_r	最小固有関数の誤差	第 2 固有関数の誤差	第 3 固有関数の誤差
2	0.011536	0.027442	
3	0.0029256	0.10430	0.065111
4	0.0014728	0.043574	0.17178
5	0.00094738	0.026026	0.068759
6	0.00067595	0.017606	0.043661
7	0.00051104	0.012746	0.031820
8	0.00040150	0.0096612	0.024427
9	0.00032443	0.0075771	0.019344
10	0.00026791	0.0061024	0.015682
11	0.00022512	0.0050204	0.012958
12	0.00019192	0.0042030	0.010879
13	0.00016560	0.0035704	0.0092597
14	0.00014438	0.0030708	0.0079742
15	0.00012701	0.0026694	0.0069376

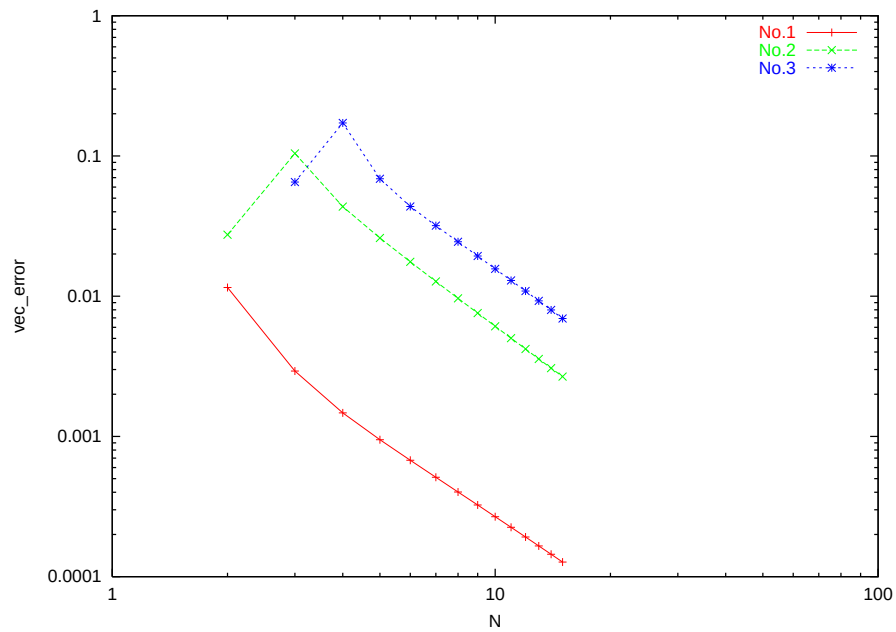


図 12: Octave による $m=0$ における最小第 2 第 3 固有関数の誤差の対数グラフ

固有値の誤差　固有値についての、理論値との誤差を調べた結果を示す。最小固有値の場合については、グラフは図 2 で確認済みである。$m=0$ における第 2 第 3 固有値についてのグラフは図 13 のようになった。グラフの傾きを調べると、両方の誤差はおよそ N の 2 乗に比例して小さくなっていることが分かる。$m=0$ の場合以外の固有値や、固有値の番号の大きいところについては、実験をした時に、大きさの順に固有値が出てこないために、誤差を調べるのが難しい。

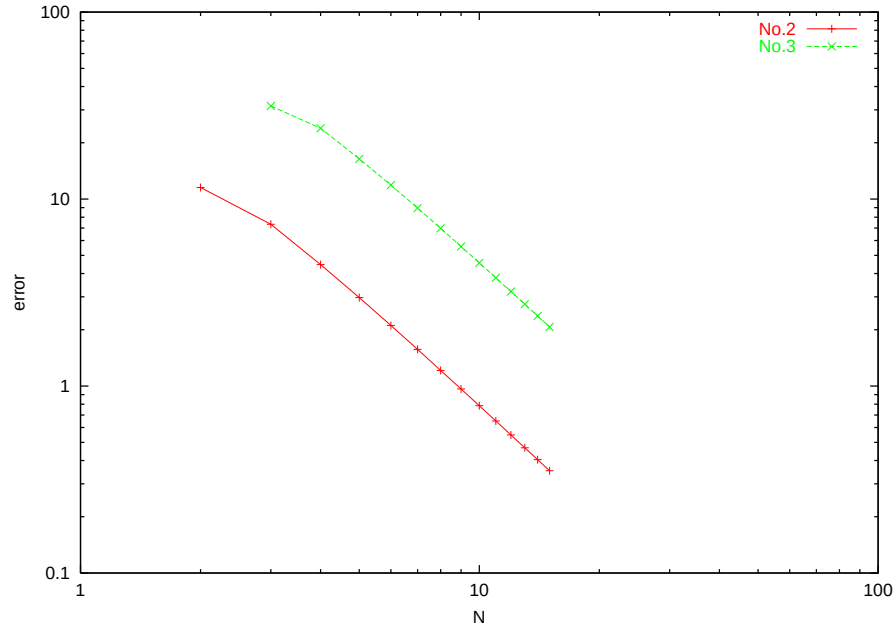


図 13: Octave による $m = 0$ における第 2 第 3 固有値の誤差の対数グラフ

4.2.2 MATLAB を用いた場合

正方領域の場合と同様に、円盤領域の場合も Octave では大きな分割数に対して解くことが難しくなる。ここでは MATLAB を用いて、大きな分割数に対して実験していく。

MATLAB で解いた時の、最小固有値に対する固有関数は図 14 のようになる ($N_r = 50,\ N_\theta = 100$ の時)。Octave に比べて、かなり分割数が細かくなっていることが図を見ても確認できる。

固有関数の誤差　固有関数についての理論値との誤差 (各格子点の誤差の L^2 ノルム) を調べた結果を示す。原点から実験で得られた各格子点 Φ の距離の中で、一番大きいところに理論値を揃えた場合の誤差を調べた。グラフは図 15 のようになった。グラフの傾きを調べると、どの直線についても誤差はおよそ N の 2 乗に比例して小さくなっていることが分かる。

固有値の誤差　固有値についての理論値との誤差を調べた結果を示す。グラフは図 16 のようになった。グラフの傾きを調べると、どの直線についても誤差はおよそ N の 2 乗に比例して小さくなっていることが分かる。

4.3 プログラムリスト

以下に実験で用いたプログラムとその使い方を示す。

4.3.1 正方領域の場合のプログラム

seihou.m (Octave 用)

```
1  clear
2  N=input('Enter N ');                %分割数 N の設定
3  A=eye((N-1)^2,(N-1)^2)*4;           %行列 A の作成開始
4  for i=1:(N-1)^2-1
5    A(i,i+1)=-1;
6    A(i+1,i)=-1;
7  endfor
```

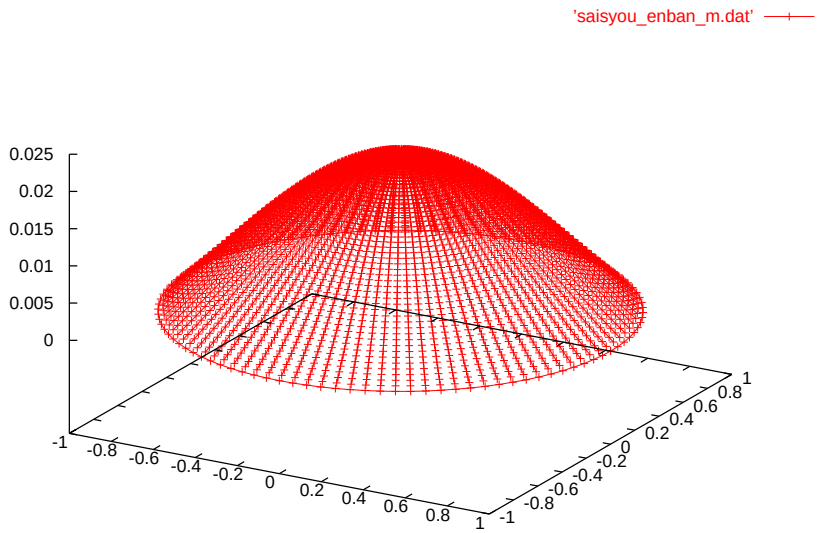


図 14: MATLAB による円盤領域における最小固有値に対する固有関数のグラフ

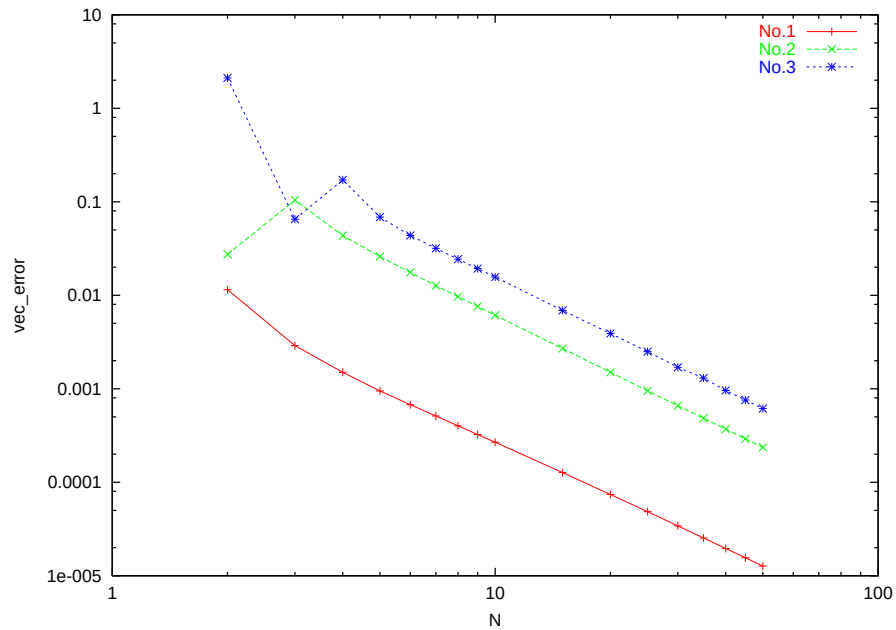


図 15: MATLAB による $m = 0$ における最小第 2 第 3 固有関数の誤差の対数グラフ

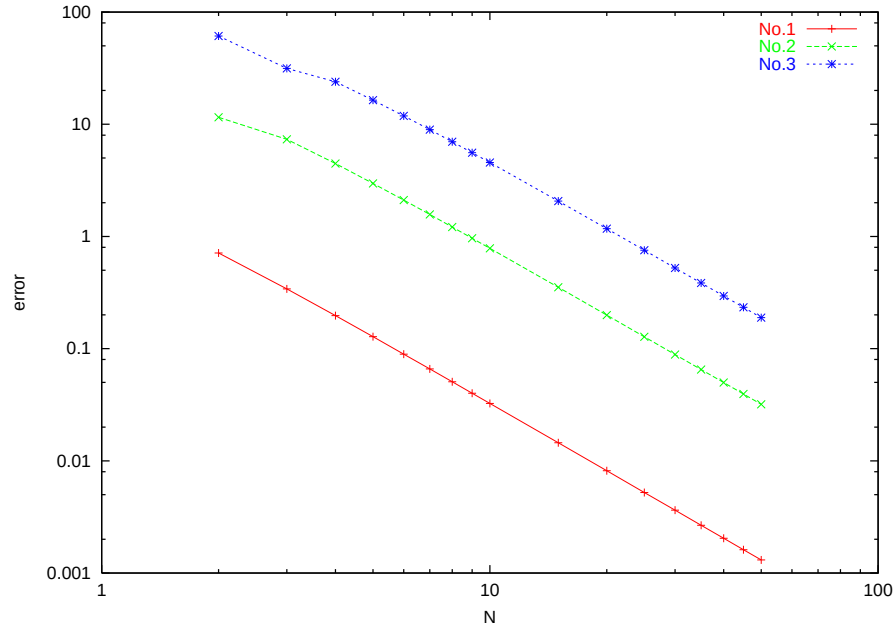


図 16: MATLAB による $m = 0$ における最小第 2 第 3 固有値の誤差の対数グラフ

```
 8  for i=N-1:N-1:(N-1)^2-(N-1)
 9    A(i,i+1)=0;
10    A(i+1,i)=0;
11  endfor
12  for i=1:(N-1)^2-(N-1)
13    A(i,i+N-1)=-1;
14    A(i+N-1,i)=-1;
15  endfor
16  A=A*N^2;                              %行列 A の作成はここまで
17  [V,lambda]=eig(A);                    %固有ベクトル V を求める
18  lambda=eig(A);                        %固有値 lambda を求める
19
20  for i=1:N-1                           %理論値 R の作成
21  for j=1:N-1
22  R(i,j)=(i^2+j^2)*pi^2;
23  endfor
24  endfor
25  R=R(:);
26  R=sort(R);                            %理論値 R を小さい順に並べる
27  for i=1:(N-1)^2
28  printf("th-lambda %d = %f\tm-lambda %d = %f\ter = %f\n",i,R(i),i,lambda(i),R(i)-lambda(i));
29                                        %理論値・実験値・誤差の出力
30  endfor
31
32  printf("\n");
33
34  printf("Enter a lambda-number from 1 to %d, so I will draw the 'phi(x,y)'.\n",(N-1)*(N-1));
35                                        %出力させたい固有関数の番号を選ぶ
36  a=input('');
37  printf("Enter another lambda-number. If you don't need another lambda, enter'0'.\n");
38                                        %重複度があり、線形結合を作りたい時はその番号を選ぶ
39  b=input('');
40  if b==0                               %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作らない時
41  printf("phi(x,y) = p*phi_%d\n",a);
42  p=input('Enter p ');                  %表示させる固有関数を定数倍させる
43  endif
44  if b~=0                               %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作る時
45  printf("phi(x,y) = p*phi_%d + q*phi_%d\n",a,b);      %表示させる固有関数を定数倍させる
46  p=input('Enter p ');
47  q=input('Enter q ');
48  endif
49
```

```
for i=1:(N-1)^2
Y(1,i)=V(i,a);                          %V の中から対応する番号の固有ベクトルを選ぶ
endfor
B=zeros(N-1,N-1);                       %選んだ固有ベクトルについてグラフが見れるように変形させる
B=reshape(Y,N-1,N-1);
B=B';
if b==0                                 %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作らない時の対応
B=p*B;
endif
if b~=0                                 %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作る時の対応
for i=1:(N-1)^2
Z(1,i)=V(i,b);
endfor
C=zeros(N-1,N-1);
C=reshape(Z,N-1,N-1);
C=C';
B=p*B+q*C;
endif

B=[zeros(1,N+1);zeros(N-1,1) B zeros(N-1,1);zeros(1,N+1)];      %境界の値を追加
x=linspace(0,1,N+1);
grid("on");
subplot(1,2,1);
mesh(x,x,B)                             %
subplot(1,2,2);                         %グラフの表示
%contour(B',5,x,x)                      %昔の version の場合
contour(x,x,B',5)                       %
```

このプログラムを実行させると、

```
Enter N
```

となるので、分割数 N を入力する。例えば 10 と入力して Enter キーを押す。すると、

```
th-lambda 1 = 19.739209 m-lambda 1 = 19.577393  er = 0.161815
th-lambda 2 = 49.348022 m-lambda 2 = 47.985298  er = 1.362724
th-lambda 3 = 49.348022 m-lambda 3 = 47.985298  er = 1.362724
th-lambda 4 = 78.956835 m-lambda 4 = 76.393202  er = 2.563633
```

$\vdots$

```
th-lambda 76 = 1263.309363      m-lambda 76 = 707.768354        er = 555.541010
th-lambda 77 = 1283.048572      m-lambda 77 = 707.768354        er = 575.280218
th-lambda 78 = 1283.048572      m-lambda 78 = 723.606798        er = 559.441774
th-lambda 79 = 1431.092638      m-lambda 79 = 752.014702        er = 679.077936
th-lambda 80 = 1431.092638      m-lambda 80 = 752.014702        er = 679.077936
th-lambda 81 = 1598.875913      m-lambda 81 = 780.422607        er = 818.453306

Enter a lambda-number from 1 to 81, so I will draw the 'phi(x,y)'.
```

と大きさの順に並べた固有値の理論値、固有値の実験値、誤差が表示される。行列はこの場合、分割数が N であるので、$(10-1)^2 = 81$ 次正方行列である。よって固有値は重複度もこめて 81 個現れる。ここで、例えば 2 つ

めと 3 つめの線形結合がみたいとすると、2 と入力して Enter キーを押す。

```
Enter another lambda-number. If you don't need another lambda, enter'0'.
```

となるので、3 と入力して Enter キーを押す。(線形結合を作りたくない時は 0 を入力する)。

```
phi(x,y) = p*phi_2 + q*phi_3
Enter p
```

となるので、p, q の値を定めて線形結合を作る。ここでは、$p = q = 1$ とする。1 と入力して Enter キーを押す。

```
Enter q
```

となるので、また 1 と入力して Enter キーを押す。すると、グラフが表示される。そのグラフを図 17 に示した。

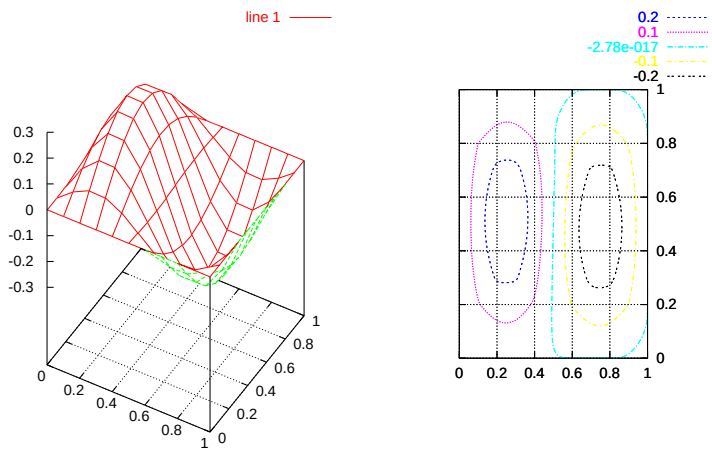


図 17: seihou.m の実験例

seihou_vec_er.m (Octave 用)

```
 1  clear
 2  N=input('Enter N ');                 %分割数 N の設定
 3  A=eye((N-1)^2,(N-1)^2)*4;            %行列 A の作成開始
 4  for i=1:(N-1)^2-1
 5    A(i,i+1)=-1;
 6    A(i+1,i)=-1;
 7  endfor
 8  for i=N-1:N-1:(N-1)^2-(N-1)
 9    A(i,i+1)=0;
10    A(i+1,i)=0;
11  endfor
12  for i=1:(N-1)^2-(N-1)
13    A(i,i+N-1)=-1;
14    A(i+N-1,i)=-1;
15  endfor
16  A=A*N^2;                             %行列 A の作成はここまで
17  [V,lambda]=eig(A);                   %固有ベクトル V を求める
```

```
18 lambda=eig(A);                        %固有値 lambda を求める
19
20 for i=1:N-1                           %理論値 R の作成
21 for j=1:N-1
22 R(i,j)=(i^2+j^2)*pi^2;
23 endfor
24 endfor
25 R=R(:);
26 R=sort(R);                            %理論値 R を小さい順に並べる
27 for i=1:(N-1)^2
28 printf("th-lambda %d = %f\tm-lambda %d = %f\ter = %f\n",i,R(i),i,lambda(i),R(i)-lambda(i));
29                                       %理論値・実験値・誤差の出力
30 endfor
31
32 printf("\n");
33
34 printf("Enter a lambda-number from 1 to %d.\n",(N-1)*(N-1));
35                                       %出力させたい固有関数の番号を選ぶ
36 a=input('');
37 printf("Enter another lambda-number. If you don't need another lambda, enter'0'.\n");
38                                       %重複度があり、線形結合を作りたい時はその番号を選ぶ
39 b=input('');
40 if b==0                               %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作らない時
41 printf("phi(x,y) = p*phi_%d\n",a);
42 p=input('Enter p ');                  %表示させる固有関数を定数倍させる
43 endif
44 if b~=0                               %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作る時
45 printf("phi(x,y) = p*phi_%d + q*phi_%d\n",a,b);     %表示させる固有関数を定数倍させる
46 p=input('Enter p ');
47 q=input('Enter q ');
48 endif
49
50 for i=1:(N-1)^2
51 Y(1,i)=V(i,a);                        %V の中から対応する番号の固有ベクトルを選ぶ
52 endfor
53
54 if b~=0                               %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作る時の対応
55 for i=1:(N-1)^2
56 Z(1,i)=V(i,b);
57 endfor
58 endif
59
60 %ここからベクトルの比較
61
62 if b==0
63 MB=p*Y;
64 endif
65
66 if b~=0
67 MB=p*Y+q*Z;
68 endif
69
70 MB=MB';      %MB は実験値
71
72 printf("Enter the theory lambda-number.\n");
73 m=input('Enter m ');
74 n=input('Enter n ');
75
76 for i=1:N-1
77 for j=1:N-1
78 l=i+(N-1)*(j-1);
79 RB(l)=sin(m*pi*i/N)*sin(n*pi*j/N);      %RB は理論値
80 endfor
81 endfor
82
83 %絶対値が最大の所を合わせる
84
85 MB_max=MB(1);
86 max_num=1;
87
88 for j=1:N-1
89 for i=1:N-1
90 l=i+(N-1)*(j-1);
```

```
 91  if abs(MB_max) < abs(MB(l))
 92  MB_max=MB(l);
 93  max_num=l;
 94  endif
 95  endfor
 96  endfor
 97
 98  norm(MB(max_num)/RB(max_num)*RB-MB)                %各格子点の誤差の L^2 ノルム
 99
100  sum(abs(MB(max_num)/RB(max_num)*RB-MB))/(N-1)^2    %格子点 1 つあたりの平均誤差
```

正方領域における固有ベクトルの誤差を調べるプログラムである。使い方は、ほとんど seihou.m と同じであるが、固有値の理論値 m, n を入力する必要がある。最初に出力されるほうが各格子点の誤差の L^2 ノルムであり、後に出力されるほうが格子点一つあたりの平均誤差である。

seihou_matlab.m (MATLAB 用)

```
 1  clear
 2  N=input('Enter N ');
 3  M=input('Enter the number of eigenvalues ');
 4  A=speye((N-1)^2,(N-1)^2)*4;
 5  for i=1:(N-1)^2-1
 6  if i~=N-1:N-1:(N-1)^2-(N-1)
 7    A(i,i+1)=-1;
 8    A(i+1,i)=-1;
 9  end
10  end
11  for i=1:(N-1)^2-(N-1)
12    A(i,i+N-1)=-1;
13    A(i+N-1,i)=-1;
14  end
15  A=A*N^2;
16
17  [V,lambda]=eigs(A,M,'sa');
18  lambda=eigs(A,M,'sa');
19
20  for i=1:M
21  for j=1:M
22  R(i,j)=(i^2+j^2)*pi^2;
23  end
24  end
25
26  R=R(:);
27  R=sort(R);
28
29  for i=1:M
30  fprintf('th-lambda %d = %f\tm-lambda %d = %f\ter = %f\n',i,R(i),i,lambda(i),R(i)-lambda(i));
31  end
32
33  fprintf('\n');
34
35  fprintf('Enter a lambda-number from 1 to %d, so I will draw the "phi(x,y)".\n',M);
36  a=input('');
37  fprintf('Enter another lambda-number. If you don''t need another lambda, enter"0".\n');
38  b=input('');
39  if b==0
40  fprintf('phi(x,y) = p*phi_%d\n',a);
41  p=input('Enter p ');
42  end
43  if b~=0
44  fprintf('phi(x,y) = p*phi_%d + q*phi_%d\n',a,b);
45  p=input('Enter p ');
46  q=input('Enter q ');
47  end
48
49  for i=1:(N-1)^2
50  Y(1,i)=V(i,a);
51  end
52  B=zeros(N-1,N-1);
53  B=reshape(Y,N-1,N-1);
54  B=B';
55  if b==0
```

```
56  B=p*B;
57  end
58  if b~=0
59  for i=1:(N-1)^2
60  Z(1,i)=V(i,b);
61  end
62  C=zeros(N-1,N-1);
63  C=reshape(Z,N-1,N-1);
64  C=C';
65  B=p*B+q*C;
66  end
67
68  B=[zeros(1,N+1);zeros(N-1,1) B zeros(N-1,1);zeros(1,N+1)];
69  x=linspace(0,1,N+1);
70  grid('on');
71  subplot(1,2,1);
72  mesh(x,x,B)
73  subplot(1,2,2);
74  contour(x,x,B',5)
75
```

使い方は、ほとんど Octave の場合と同じであるが、分割数を入力させたあとに、求める固有値の数 (最小固有値からの数) を入力する必要がある。この数が少ないほど計算が速くなる。

seihou_matlab_vec_er.m (MATLAB 用)

```
 1  clear
 2  N=input('Enter N ');                %分割数 N の設定
 3  M=input('Enter the number of eigenvalues ');
 4  A=speye((N-1)^2,(N-1)^2)*4;          %行列 A の作成開始
 5  for i=1:(N-1)^2-1
 6    A(i,i+1)=-1;
 7    A(i+1,i)=-1;
 8  end
 9  for i=N-1:N-1:(N-1)^2-(N-1)
10    A(i,i+1)=0;
11    A(i+1,i)=0;
12  end
13  for i=1:(N-1)^2-(N-1)
14    A(i,i+N-1)=-1;
15    A(i+N-1,i)=-1;
16  end
17  A=A*N^2;                            %行列 A の作成はここまで
18
19  [V,lambda]=eigs(A,M,'sa');
20  lambda=eigs(A,M,'sa');
21
22  for i=1:M                          %理論値 R の作成
23  for j=1:M
24  R(i,j)=(i^2+j^2)*pi^2;
25  end
26  end
27  R=R(:);
28  R=sort(R);                          %理論値 R を小さい順に並べる
29  for i=1:M
30  fprintf('th-lambda %d = %f\tm-lambda %d = %f\ter = %f\n',i,R(i),i,lambda(i),R(i)-lambda(i));
31                                      %理論値・実験値・誤差の出力
32  end
33
34  fprintf('\n');
35
36  fprintf('Enter a lambda-number from 1 to %d.\n',M);
37                                      %出力させたい固有関数の番号を選ぶ
38  a=input('');
39  fprintf('Enter another lambda-number. If you don''t need another lambda, enter"0".\n');
40                                      %重複度があり、線形結合を作りたい時はその番号を選ぶ
41  b=input('');
42  if b==0                             %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作らない時
43  fprintf('phi(x,y) = p*phi_%d\n',a);
44  p=input('Enter p ');                %表示させる固有関数を定数倍させる
45  end
46  if b~=0                             %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作る時
```

```
47  printf('phi(x,y) = p*phi_%d + q*phi_%d\n',a,b);      %表示させる固有関数を定数倍させる
48  p=input('Enter p ');
49  q=input('Enter q ');
50  end
51
52  for i=1:(N-1)^2
53  Y(1,i)=V(i,a);                        %V の中から対応する番号の固有ベクトルを選ぶ
54  end
55
56  B=zeros(N-1,N-1);                     %選んだ固有ベクトルについてグラフが見れるように変形させる
57  B=reshape(Y,N-1,N-1);
58  B=B';
59  if b==0                               %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作らない時の対応
60  B=p*B;
61  end
62  if b~=0                               %2 つの固有ベクトルによる線形結合を作る時の対応
63  for i=1:(N-1)^2
64  Z(1,i)=V(i,b);
65  end
66  C=zeros(N-1,N-1);
67  C=reshape(Z,N-1,N-1);
68  C=C';
69  B=p*B+q*C;
70  end
71
72  B=[zeros(1,N+1);zeros(N-1,1) B zeros(N-1,1);zeros(1,N+1)];      %境界の値を追加
73
74  %ここからベクトルの比較 ( まだ途中 )
75
76  if b==0
77  MB=p*Y;
78  end
79
80  if b~=0
81  MB=p*Y+q*Z;
82  end
83
84  MB=MB';       %MB は実験値
85
86  fprintf('Enter the theory lambda-number.\n');
87  m=input('Enter m ');
88  n=input('Enter n ');
89
90  for i=1:N-1
91  for j=1:N-1
92  l=i+(N-1)*(j-1);
93  RB(l)=sin(m*pi*j/N)*sin(n*pi*i/N);       %RB は理論値
94  end
95  end
96
97  %絶対値が最大の所を合わせる
98
99  MB_max=MB(1);
100 max_num=1;
101
102 for j=1:N-1
103 for i=1:N-1
104 l=i+(N-1)*(j-1);
105 if abs(MB_max) < abs(MB(l))
106 MB_max=MB(l);
107 max_num=l;
108 end
109 end
110 end
111
112 norm(MB(max_num)/RB(max_num)*RB-MB')
113
114 sum(abs(MB(max_num)/RB(max_num)*RB-MB'))/(N-1)^2
115
```

正方領域における固有ベクトルの誤差を調べるプログラムである。使い方は、ほとんど seihou_matlab.m と同じ

である。最初に出力されるほうが各格子点の誤差の L^2 ノルムであり、後に出力されるほうが格子点一つあたりの平均誤差である。

4.3.2 円盤領域の場合のプログラム

enban.m (Octave 用)

```
clear
Nr=input('Enter N_r ');                 %分割数 N_r の設定
Nt=input('Enter N_theta ');             %分割数 N_theta の設定
hr=1/Nr;                                %h_r の設定
ht=1/Nt;                                %h_theta の設定

A=zeros((Nr-1)*Nt+1,(Nr-1)*Nt+1);       %行列 A の作成開始
A(1,1)=4/hr^2;
for j=0:Nt-1
A(1,2+(Nr-1)*j)=-4/(hr^2*Nt);
endfor
for j=0:Nt-1
for i=1:Nr-1
l=1+i+(Nr-1)*j;
A(l,l)=2/(hr^2*ht^2)*(ht^2+1/i^2);
if i==1
A(l,1)=1/(2*hr^2)*(1/i-2);
else
A(l,l-1)=1/(2*hr^2)*(1/i-2);
endif
if j==0
j=Nt-1;
m=1+i+(Nr-1)*j;
A(l,m)=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
j=0;
else
A(l,l-(Nr-1))=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
endif
if i~=Nr-1
A(l,l+1)=-1/(2*hr^2)*(2+1/i);
endif
if j==Nt-1
m=1+i;
A(l,m)=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
else
A(l,l+(Nr-1))=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
endif
endfor
endfor                                  %行列 A の作成はここまで

[phi,lambda]=eig(A);                    %固有ベクトル phi を求める
lambda=eig(A);                          %固有値 lambda を求める

for i=1:Nt*(Nr-1)+1
if imag(lambda(i))>=0
printf("%d\t%f + %fi\n",i ,real(lambda(i)), imag(lambda(i)));   %実験値の出力
else
printf("%d\t%f %fi\n",i ,real(lambda(i)), imag(lambda(i)));
endif
endfor

eignumber=input('Enter a eig_number ');   %出力させたい固有関数の番号を選ぶ
phi=phi(:,eignumber);                   %phi の中から対応する番号の固有ベクトルを選ぶ

phi00=phi(1);                           %ここで、phi_00 を取り出す
phi(1,:)=[];                            %

for j=0:Nt-1                            %gnuplot 用のデータの生成開始
for i=1:Nr-1
theta(i+(Nr-1)*j)=(2*pi*j)/Nt;          %theta ベクトルの生成
r(i+(Nr-1)*j)=i/Nr;                     %r(半径) ベクトルの生成
endfor
endfor
```

```
64
65  for j=0:Nt
66  ensyuu_theta(j+1)=2*pi*j/Nt;              %境界の設定
67  ensyuu_r(j+1)=1;                          %
68  ensyuu_z(j+1)=0;                          %
69  endfor
70
71  printf("#");                              %gnuplot をだます為の設定
72  [0 phi00 0]                               %phi_00 の出力
73  printf("#");                              %gnuplot をだます為の設定
74  [ensyuu_theta ensyuu_z ensyuu_r]          %境界条件の出力
75  for j=0:Nt-1
76  printf("#");                              %gnuplot をだます為の設定
77  i=1+(Nr-1)*j;
78  [theta(i:i+(Nr-2),:) phi(i:i+(Nr-2),:) r(i:i+(Nr-2),:)]
79  endfor                                    %円盤領域内の出力
```

このプログラムを実行させると、

```
Enter N_r
```

となる。ここで、N_r を入力する。ここでは、10 を入力して Enter キーを打つ。すると、

```
Enter N_theta
```

となるので、今度は N_θ を入力する。ここでは、20 を入力して Enter キーを打つ。すると、

```
1       160200.093750 + 0.000000i
2       156284.617405 + 0.000000i
3       156284.617405 + 0.000000i
4       144921.463197 + 0.000000i
5       144921.463197 + 0.000000i
           ⋮
           ⋮
           ⋮


87      3158.572308 + 0.000000i
88      3114.080530 + 0.000000i
89      3114.080530 + 0.000000i
90      5.750684 + 0.000000i
91      29.686847 + 0.000000i
92      70.326487 + 0.000000i
93      123.802770 + 0.000000i
94      2798.083133 + 0.000000i
           ⋮
           ⋮
           ⋮
```

```
178     1745.268238 + 0.000000i
179     1745.268238 + 0.000000i
180     1744.859201 + 0.000000i
181     1744.859201 + 0.000000i
Enter a eig_number
```

となる。ここで、最小固有値である 90 番目を選ぶことにする。90 を入力して Enter キーを打つと、

```
#ans =

   0.000000000000000  -0.108015920964769   0.000000000000000

#ans =

  0.000000000000000  0.000000000000000  1.000000000000000
  0.314159265358979  0.000000000000000  1.000000000000000
  0.628318530717959  0.000000000000000  1.000000000000000
  0.942477796076938  0.000000000000000  1.000000000000000
  1.256637061435917  0.000000000000000  1.000000000000000
  1.570796326794897  0.000000000000000  1.000000000000000
  1.884955592153876  0.000000000000000  1.000000000000000
  2.199114857512855  0.000000000000000  1.000000000000000
  2.513274122871834  0.000000000000000  1.000000000000000
  2.827433388230814  0.000000000000000  1.000000000000000
  3.141592653589793  0.000000000000000  1.000000000000000
  3.455751918948772  0.000000000000000  1.000000000000000
  3.769911184307752  0.000000000000000  1.000000000000000
  4.084070449666731  0.000000000000000  1.000000000000000
  4.398229715025710  0.000000000000000  1.000000000000000
  4.712388980384690  0.000000000000000  1.000000000000000
  5.026548245743669  0.000000000000000  1.000000000000000
  5.340707511102648  0.000000000000000  1.000000000000000
```

⋮

と出てくる。この値は、左から $\theta,\ \Phi,\ r$ を表している。ここで、値が全て流れきらないうちに's' を押してこのデータを適当なファイル名を指定して保存する。ここでは、'enban-test.dat' というファイル名に保存する。ここで、Octave は終了させて、gnuplot を起動する。そして、

```
set mapping cylindrical
splot 'enban-test.dat' with linespoints
```

と打てば固有関数が表示される。そのグラフを図 18 に示した。

eig_vec_er_enban.m (Octave 用)

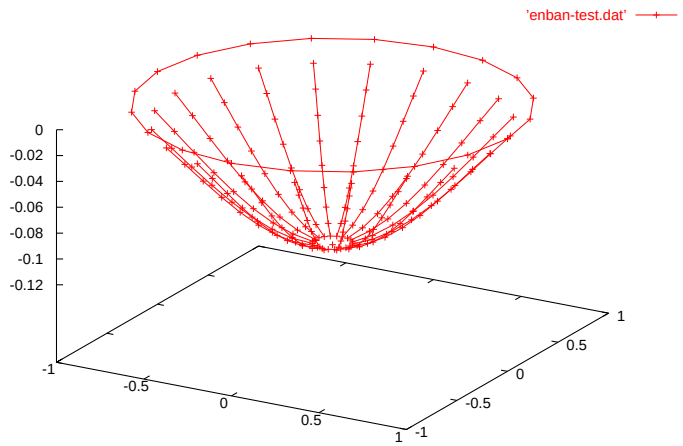


図 18: enban.m の実験例

```
 1  clear
 2  Nr=input('Enter N_r ');
 3  Nt=input('Enter N_theta ');
 4  hr=1/Nr;
 5  ht=1/Nt;
 6
 7  A=zeros((Nr-1)*Nt+1,(Nr-1)*Nt+1);
 8  A(1,1)=4/hr^2;
 9  for j=0:Nt-1
10  A(1,2+(Nr-1)*j)=-4/(hr^2*Nt);
11  endfor
12  for j=0:Nt-1
13  for i=1:Nr-1
14  l=1+i+(Nr-1)*j;
15  A(l,l)=2/(hr^2*ht^2)*(ht^2+1/i^2);
16  if i==1
17  A(l,1)=1/(2*hr^2)*(1/i-2);
18  else
19  A(l,l-1)=1/(2*hr^2)*(1/i-2);
20  endif
21  if j==0
22  j=Nt-1;
23  m=1+i+(Nr-1)*j;
24  A(l,m)=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
25  j=0;
26  else
27  A(l,l-(Nr-1))=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
28  endif
29  if i~=Nr-1
30  A(l,l+1)=-1/(2*hr^2)*(2+1/i);
31  endif
32  if j==Nt-1
33  m=1+i;
34  A(l,m)=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
35  else
36  A(l,l+(Nr-1))=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
37  endif
38  endfor
39  endfor
40
41  [phi,lambda]=eig(A);
42  lambda=eig(A);
43
44  for i=1:Nt*(Nr-1)+1
45  if imag(lambda(i))>=0
46  printf("%d\t%f + %fi\n",i ,real(lambda(i)), imag(lambda(i)));   %実験値の出力
```

```
47  else
48  printf("%d\t%f %fi\n",i ,real(lambda(i)), imag(lambda(i)));
49  endif
50  endfor
51
52  eignumber=input('Enter a eig_number ');   %出力させたい固有関数の番号を選ぶ
53  phi=phi(:,eignumber);                     %phi の中から対応する番号の固有ベクトルを選ぶ
54
55  m0num=input('Enter a eig_number,from 1 to 3,when "m=0". ');
56
57  % m=0 における固有値と固有関数の理論値 (固有値は Mathematica による)
58
59  if m0num==1
60  riron_eig(1)=besselj(0,0)*(cos(0)+sin(0));
61  riron_lambda=5.783185962946784521175995758455807035071441806424;
62  endif
63
64  if m0num==2
65  riron_eig(1)=besselj(0,0)*(cos(0)+sin(0));
66  riron_lambda=30.471262343662086399078163175022755848420833708554;
67  endif
68
69  if m0num==3
70  riron_eig(1)=besselj(0,0)*(cos(0)+sin(0));
71  riron_lambda=74.887006790695183444889041310136808274810907187323;
72  endif
73
74  for j=0:Nt-1
75  for i=1:Nr-1
76  riron_eig(1+i+(Nr-1)*j)=besselj(0,sqrt(riron_lambda)*i/Nr)*(cos(0*2*pi*j/Nt)+sin(0*2*pi*j/Nt));
77  endfor
78  endfor
79
80  %絶対値が最大の所を合わせる
81
82  phi_dist(1)=abs(phi(1));
83  for j=0:Nt-1
84  for i=1:Nr-1
85  l=1+i+(Nr-1)*j;
86  phi_dist(l)=sqrt(phi(l)^2+(i/Nr)^2);
87  endfor
88  endfor
89
90  max_phi=abs(phi_dist(1));
91  max_num=1;
92  for j=0:Nt-1
93  for i=1:Nr-1
94  if abs(phi_dist(1+i+(Nr-1)*j))>max_phi
95  max_phi=abs(phi_dist(1+i+(Nr-1)*j));
96  max_num=1+i+(Nr-1)*j;
97  endif
98  endfor
99  endfor
100
101 q=riron_eig(max_num)/phi(max_num);
102 norm(1/q*riron_eig-phi)
103
```

固有ベクトルの誤差を求めるプログラムである。$m=0$ における最小第 2 第 3 固有関数しか求めることは出来ない。使い方は enban.m とほぼ同じだが、最小第 2 第 3 固有関数のどれについて調べるか入力する必要がある。

enban_matlab.m (MATLAB 用)

```
1   clear
2   Nr=input('Enter N_r ');
3   Nt=input('Enter N_theta ');
4   fprintf('From 1 to %d ,',(Nr-1)*Nt+1);
5   M=input('enter the number of eigenvalues ');
6   hr=1/Nr;
7   ht=1/Nt;
8
9   A=sparse(zeros((Nr-1)*Nt+1,(Nr-1)*Nt+1));
10  A(1,1)=4/hr^2;
```

```
11  for j=0:Nt-1
12  A(1,2+(Nr-1)*j)=-4/(hr^2*Nt);
13  end
14  for j=0:Nt-1
15  for i=1:Nr-1
16  l=1+i+(Nr-1)*j;
17  A(l,l)=2/(hr^2*ht^2)*(ht^2+1/i^2);
18  if i==1
19  A(l,1)=1/(2*hr^2)*(1/i-2);
20  else
21  A(l,l-1)=1/(2*hr^2)*(1/i-2);
22  end
23  if j==0
24  j=Nt-1;
25  m=1+i+(Nr-1)*j;
26  A(l,m)=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
27  j=0;
28  else
29  A(l,l-(Nr-1))=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
30  end
31  if i~=Nr-1
32  A(l,l+1)=-1/(2*hr^2)*(2+1/i);
33  end
34  if j==Nt-1
35  m=1+i;
36  A(l,m)=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
37  else
38  A(l,l+(Nr-1))=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
39  end
40  end
41  end
42
43  [phi,lambda]=eigs(A,M,6);
44  lambda=eigs(A,M,6);
45
46  for i=1:M
47  if imag(lambda(i))>=0
48  fprintf('%d\t%f + %fi\n',i ,real(lambda(i)), imag(lambda(i)));
49  else
50  fprintf('%d\t%f %fi\n',i ,real(lambda(i)), imag(lambda(i)));
51  end
52  end
53
54  eignumber=input('Enter a eig_number ');
55  phi=phi(:,eignumber);
56
57  phi00=phi(1);
58  phi(1,:)=[];
59
60  for j=0:Nt-1
61  for i=1:Nr-1
62  theta(i+(Nr-1)*j)=(2*pi*j)/Nt;
63  r(i+(Nr-1)*j)=i/Nr;
64  end
65  end
66
67  for j=0:Nt
68  ensyuu_theta(j+1)=2*pi*j/Nt;
69  ensyuu_r(j+1)=1;
70  ensyuu_z(j+1)=0;
71  end
72
73  fid=fopen('test.dat','w')
74
75  fprintf(fid,'%f\t%f\t%f\n\n',0 ,real(phi00) ,0);
76
77  for j=0:Nt
78  fprintf(fid,'%f\t%f\t%f\n',ensyuu_theta(j+1),ensyuu_z(j+1),ensyuu_r(j+1));
79  end
80
81  fprintf(fid,'\n\n');
82
83  theta=theta';
```

```
r=r';

for j=0:Nt-1
i=1+(Nr-1)*j;
for k=1:Nr-1
THETA=theta(i:i+(Nr-2),:);
PHI=phi(i:i+(Nr-2),:);
RR=r(i:i+(Nr-2),:);
fprintf(fid,'%f\t%f\t%f\n',THETA(k), real(PHI(k)), RR(k));
end
fprintf(fid,'\n\n');
end
fclose(fid)
```

使い方は enban.m と同じだが、分割数を入力させたあとに、求める固有値の数 (最小固有値からの数) を入力する必要がある。この数が少ないほど計算が速くなる。このプログラムでは、自動的に計算結果を'test.dat' というファイル名に保存することに注意しておく。違うファイル名にしたいときは、もちろんその部分を変えればよい。固有関数の表示は、gnuplot を使い、

```
set mapping cylindrical
splot 'test.dat' with linespoints
```

などとすればよい。

eig_vec_er_enban_matlab.m (MATLAB 用)

```
clear
Nr=input('Enter N_r ');
Nt=input('Enter N_theta ');
fprintf('From 1 to %d ,',(Nr-1)*Nt+1);
M=input('enter the number of eigenvalues ');
hr=1/Nr;
ht=1/Nt;

A=sparse(zeros((Nr-1)*Nt+1,(Nr-1)*Nt+1));
A(1,1)=4/hr^2;
for j=0:Nt-1
A(1,2+(Nr-1)*j)=-4/(hr^2*Nt);
end
for j=0:Nt-1
for i=1:Nr-1
l=1+i+(Nr-1)*j;
A(l,l)=2/(hr^2*ht^2)*(ht^2+1/i^2);
if i==1
A(l,1)=1/(2*hr^2)*(1/i-2);
else
A(l,l-1)=1/(2*hr^2)*(1/i-2);
end
if j==0
j=Nt-1;
m=1+i+(Nr-1)*j;
A(l,m)=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
j=0;
else
A(l,l-(Nr-1))=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
end
if i~=Nr-1
A(l,l+1)=-1/(2*hr^2)*(2+1/i);
end
if j==Nt-1
m=1+i;
A(l,m)=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
else
A(l,l+(Nr-1))=-1/(i^2*hr^2*ht^2);
end
end
end

```

```
43  [phi,lambda]=eigs(A,M,6);
44  lambda=eigs(A,M,6);
45
46  for i=1:M
47  if imag(lambda(i))>=0
48  fprintf('%d\t%f + %fi\n',i ,real(lambda(i)), imag(lambda(i)));   %実験値の出力
49  fprintf('%d\t%f %fi\n',i ,real(lambda(i)), imag(lambda(i)));
50  end
51  end
52
53  eignumber=input('Enter a eig_number ');   %出力させたい固有関数の番号を選ぶ
54  phi=phi(:,eignumber);                     %phi の中から対応する番号の固有ベクトルを選ぶ
55
56  m0num=input('Enter a eig_number,from 1 to 3,when "m=0". ');
57
58  % m=0 における固有値と固有関数の理論値（固有値は Mathematica による）
59
60  if m0num==1
61  riron_eig(1)=besselj(0,0)*(cos(0)+sin(0));
62  riron_lambda=5.783185962946784521175995758455807035071441806424;
63  end
64
65  if m0num==2
66  riron_eig(1)=besselj(0,0)*(cos(0)+sin(0));
67  riron_lambda=30.471262343662086399078163175022755848420833708554;
68  end
69
70  if m0num==3
71  riron_eig(1)=besselj(0,0)*(cos(0)+sin(0));
72  riron_lambda=74.887006790695183444889041310136808274810907187323;
73  end
74
75  for j=0:Nt-1
76  for i=1:Nr-1
77  riron_eig(1+i+(Nr-1)*j)=besselj(0,sqrt(riron_lambda)*i/Nr)*(cos(0*2*pi*j/Nt)+sin(0*2*pi*j/Nt));
78  end
79  end
80
81  %絶対値が最大の所を合わせる
82
83  phi_dist(1)=abs(phi(1));
84  for j=0:Nt-1
85  for i=1:Nr-1
86  l=1+i+(Nr-1)*j;
87  phi_dist(l)=sqrt(phi(l)^2+(i/Nr)^2);
88  end
89  end
90
91  max_phi=abs(phi_dist(1));
92  max_num=1;
93  for j=0:Nt-1
94  for i=1:Nr-1
95  if abs(phi_dist(1+i+(Nr-1)*j))>max_phi
96  max_phi=abs(phi_dist(1+i+(Nr-1)*j));
97  max_num=1+i+(Nr-1)*j;
98  end
99  end
100 end
101
102 q=riron_eig(max_num)/phi(max_num);
103 norm(1/q*riron_eig-phi')
104
```

固有ベクトルの誤差を求めるプログラムである。$m=0$ における最小第 2 第 3 固有関数しか求めることは出来ない。使い方は enban_matlab.m とほぼ同じだが、最小第 2 第 3 固有関数のどれについて調べるか入力する必要がある。

4.4 実験についてのメモ

ここでは、実験で用いたテクニックなどのメモを載せておく。

・Bessel 関数 $J_m(x)$ の零点を Mathematica により求める

```
Mathematica では BesselJ[n,x] で n 次の Bessel 関数が計算できる。

Plot[BesselJ[0,x],{x,0,10}]
Plot[Evaluate[Table[BesselJ[n, x], {n, 10}]],{x,0,10}]

FindRoot[BesselJ[0,x]==0,{x,2},WorkingPrecision->50]
FindRoot[BesselJ[0,x]==0,{x,2},WorkingPrecision->50,AccuracyGoal->40]
Table[FindRoot[BesselJ[0,x]==0,{x,m},WorkingPrecision->50],{m,2,20}]

----------------------------------------------------------------
Bessel 関数の零点とその 2 乗
（上が零点、下がその 2 乗 ( 固有値 ) ）

m=0 の時

2.404825557695772768621631879326454643124244909146 0
5.783185962946784521175995758455807035071441806424

5.520078110286310649596604112813027425221865478782 9
30.471262343662086399078163175022755848420833708554

8.653727912911012216954198712660946685565795231275 4
74.887006790695183444889041310136808274810907187323

11.791534439014281613743044911925458922022924699695
139.040284426459849001591423515876646889125857007 4

14.930917708487785947762593997388682207915850115633
222.932303617634156954562090522085013953877665891 4

m=1 の時

3.831705970207512315614435886308160766564545274287 8
14.681970642123893257219777768630106989681586982155

7.015586669815618753537049981476524743276311502869 4
49.218456321694603670267082846388138932425411828 42

10.173468135062722077185711776775844069819512500192
103.499453895136580332223632535613055749835022714 9

13.323691936314223032393684126947876751216644731358
177.520766813804649861717128073179933789208831861 6

m=2 の時

5.135622301840682556301401690137765456973772347500 5
26.374616427163390770113080355330659508870238771654

8.417244140399864857783613676153884673766992080498 1
70.849998919095859862102003111750596607733136833594

11.619841172149059427094144986755334885262709284325
135.020708865970427320068775187279704705417259649 4

14.795951782351260746661471320227965272576210042807
218.920189145663449665148278374682885177255485678 3

m=3 の時

6.380161895923983506236614641942703305326303691903 1
40.706465818200319742052432704441116892789160503 68

9.761023129981669678545388500085848259503666126913 0
```

```
95.277572544037151516602739809032573084025162132 74

13.015200721698434419832684382879382028634814211824
169.395449826099448170642951597641364498271385900 9

16.223466160318768122228024524950161878446319399102
263.200854255008193287807812484106834626220397970 9
```

・**Octave** で書いたプログラムを **MATLAB** 仕様にする (ただし、他にもっと修正する必要がある可能性も考えられる)

- for ··· endfor, if ··· endif, while ··· endwhile は、for ··· end, if ··· end, while ··· end に修正する。
- printf(" "); は、fprintf(' '); に直す。『' 』を fprintf 文の中に用いたい時は『' 』と 2 つ打てばよい。%d や %f 等は直さなくてよかった。
- contour(Z,n,X,Y) は、contour(X,Y,Z,n) と直す。
- 疎行列にするには、eye(n,m) は speye(n,m) と直す。疎行列の n 次の単位行列を作る例として、
  - sparse(eye(n,n))
  - speye(n,n)
  - sparse(1:n,1:n,ones(1,n))
  - sparse(1:n,1:n,ones(n,1))
  - sparse(1:n,1:n,1)

  がある。
- eig の疎行列用の命令は eigs である。eigs については色々な設定が出来る。実際に用いたのも含めて少しだけ紹介する。
  - d=eigs(A) は A の大きい順に 6 番目までの固有値をベクトルとして出力する。
  - [V,D]=eigs(A) は A の中の大きい順に 6 番目までの固有値からなる対角行列 D と、対応する固有ベクトルからなる行列 V を出力する。
  - eigs(A,k) は大きい順に k 個の固有値を出力する。
  - eigs(A,k,sigma) は sigma をベースに k 個の固有値を出力する。sigma の部分には以下のいずれかを用いる。
    - 適当な数字
    - 『'lm'』最大固有値 (デフォルト)
    - 『'sm'』最小固有値

    実対称問題については次のオプションがある。
    - 『'la'』固有値の実数部で最大
    - 『'sa'』固有値の実数部で最小
    - 『'be'』両端 (k が奇数の場合、大きいほうの端を一つ余分にとる)

    非対称、複素数問題については次のオプションがある
    - 『'lr'』固有値の実数部で最大
    - 『'sr'』固有値の実数部で最小
    - 『'li'』固有値の虚数部で最大
    - 『'si'』固有値の虚数部で最小

- 疎行列 A を普通の行列に直すには full(A) とする。
- 零非零パターンを見る spy() とメモリー使用量を見る whos がある。
- spconvert() は各行が $i,\ j,\ a_{ij}$ という 3 数である行列を入力する命令。
  sdata=[1 1 5 ; 1 2 1 ; $\cdots$]
  s=spconvert(sdata)
- MATLAB ではファイル名に『-』(ハイフン) は使えなかった。

・**seihou.m の eps 画像を得る**

あらかじめ gnuplot を起動する。そして、

```
>set term postscript eps color
>set output '***.eps'
```

としておく。そして Octave で『seihou』を実行する。そして、gnuplot で一連の処理が終わったあとに (ただし画像は表示されない)、

```
>replot
```

とすればよい。enban.m の eps 画像を得るには、Octave の gnuplot によるグラフ表示機能を使っていないので、画像が表示された後に上の作業を行えばよい。

・**seihou_matlab.m の eps 画像を得る**

figure No.1 に固有関数のグラフが表示されたら、

```
>print -depsc -f1 ***.eps
```

とすればよい。figure No.2 だったら、`-f1` を`-f2` にすればよい。

・円盤領域における固有関数の可視化について

今回は gnuplot での円柱座標におけるデータファイルのプロットを用いている。つまり (x_i, y_i, z_i) 上にあるデータが

$$x_i = r_i \cos\theta_i$$
$$y_i = r_i \sin\theta_i$$
$$z_i = z_i$$

によって (r_i, θ_i, z_i) と変換されている時に、データファイルにデータを

$$\theta_i,\ z_i,\ r_i$$

という順に並べて、

```
>set mapping cylindrical
>splot '***.dat' with linespoints
```

などとすればよい。ここで、with linespoints とするのは、データファイルにおいて、データにポイントが付けられ、改行で区切られていないまとまったデータ同士についてだけ線が結ばれるためである。

例として次を挙げる。次のようなデータファイルがあるとする。

```
 0.00000  0.22530  0.00000

 0.00000  0.00000  1.00000
 0.62832  0.00000  1.00000
 1.25664  0.00000  1.00000
 1.88496  0.00000  1.00000
 2.51327  0.00000  1.00000
 3.14159  0.00000  1.00000
 3.76991  0.00000  1.00000
 4.39823  0.00000  1.00000
 5.02655  0.00000  1.00000
 5.65487  0.00000  1.00000
 6.28319  0.00000  1.00000

 0.00000  0.21255  0.20000
 0.00000  0.17625  0.40000
 0.00000  0.12257  0.60000
 0.00000  0.06046  0.80000

 0.628319  0.212554  0.200000
 0.628319  0.176252  0.400000
 0.628319  0.122573  0.600000
 0.628319  0.060465  0.800000

 1.256637  0.212554  0.200000
 1.256637  0.176252  0.400000
 1.256637  0.122573  0.600000
 1.256637  0.060465  0.800000

 1.884956  0.212554  0.200000
 1.884956  0.176252  0.400000
 1.884956  0.122573  0.600000
 1.884956  0.060465  0.800000

 2.513274  0.212554  0.200000
 2.513274  0.176252  0.400000
 2.513274  0.122573  0.600000
 2.513274  0.060465  0.800000

 3.141593  0.212554  0.200000
 3.141593  0.176252  0.400000
 3.141593  0.122573  0.600000
 3.141593  0.060465  0.800000

 3.769911  0.212554  0.200000
 3.769911  0.176252  0.400000
 3.769911  0.122573  0.600000
 3.769911  0.060465  0.800000

 4.398230  0.212554  0.200000
 4.398230  0.176252  0.400000
 4.398230  0.122573  0.600000
 4.398230  0.060465  0.800000

 5.026548  0.212554  0.200000
 5.026548  0.176252  0.400000
 5.026548  0.122573  0.600000
 5.026548  0.060465  0.800000

 5.654867  0.212554  0.200000
 5.654867  0.176252  0.400000
 5.654867  0.122573  0.600000
 5.654867  0.060465  0.800000
```

このデータに対して、上のコマンドを実行すると 図 19 が得られる。

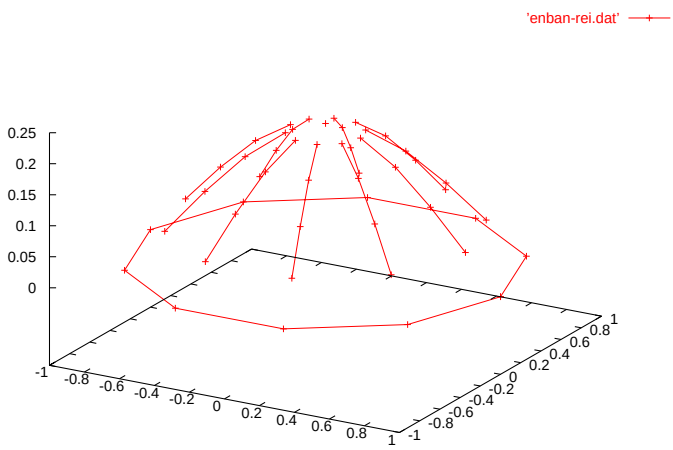


図 19: 円盤領域における固有関数の可視化についての例

5 最後に

今回の卒業研究で、主に心残りだったことは、

1. Neumann 境界条件における固有値問題について、数値実験が出来なかった。
2. 円環領域における固有値問題について、理論値の導出や数値実験が出来なかった。
3. 差分法における解法で、円盤領域の場合に現れる行列について実対称行列にすることは出来るか、という問題に取り組めなかった。
4. プログラムに改良の余地がたくさんあること。

ということです。1,2 については、卒業研究を始めた最初の段階では、目標としていたことなので残念です。3 については、極座標変換しないで xy 座標系のまま格子に切るとか、出来上がった行列にうまく変形を施すなど色々と工夫が出来そうだったので残念です。4 については、プログラムをもっと簡潔にしたり計算量を減らすことがまだまだ可能であったし、読みづらい (分かりづらい) プログラムになってしまったことが残念です。

また、今回卒業研究を行ってみて、実験から話が膨らんでいくことの面白さを味わえたことは本当によかったと思います。また、数学的な議論や実験、論文の書き方等においては反省する部分が多かったので、次に生かしていきたいと思います。

最後になりましたが、この卒業論文を書くにあたり、丁寧な指導と適切な助言を与えて下さった桂田祐史先生に、深い感謝の意を表します。

参考文献

[1] 菊地 文雄、山本 昌宏『微分方程式と計算機演習』(山海堂、1991 年)

[2] 俣野 博『微分方程式 II』(岩波書店、1994 年)

[3] 金子 尚武、松本 道男『特殊関数』(培風館、1984 年)

[4] 戸田 盛和『特殊関数』(朝倉書店、1981 年)

[5] 藤田 宏『三訂版 応用数学』(放送大学教育振興会、1999 年)