

2007年度 卒業研究レポート

音の周波数解析

明治大学 理工学部 数学科
4年16組13番 紀太 秀文

2008年3月5日

目次

第1章	はじめに	2
第2章	信号処理の基礎知識	3
2.1	アナログ信号	3
2.1.1	アナログ信号処理	3
2.2	デジタル信号	3
2.2.1	デジタル信号処理	4
第3章	波動方程式	5
3.1	弦振動の波動方程式 (線形)	5
3.2	弦振動の波動方程式 (非線形)	6
第4章	差分方程式	7
4.1	線形波動方程式の差分方程式	7
4.2	非線形波動方程式の差分方程式	8
第5章	離散フーリエ変換	12
5.1	フーリエ級数	12
5.1.1	実数値関数のフーリエ級数	12
5.1.2	複素数値関数のフーリエ級数	12
5.2	離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform)	13
5.2.1	台形公式	13
5.2.2	高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform)	14
第6章	Wave ファイルの波形	15
6.1	分析したデータ	15
6.2	解説	15
6.3	基本周波数の求め方の裏づけ	15
第7章	その他の Wave ファイルの波形	18
7.1	考察	18
付録 A	ソースプログラム	22
A.1	sinCanvas.java	22
A.2	WaveGraphics3.java	22
A.3	非線形の差分方程式のプログラム	22

第1章 はじめに

はじめに卒業論文の目的を述べる。まず、私が卒業論文のテーマを決めるにあたって思ったことは、自分の周りに常に存在する「音」が数学的にはどういったものなのか気になったためである。その中でも特に音楽に使われる楽器の音に対して興味を惹かれ、音の周波解析をやろうと考えた。

この卒業論文ではまず、音の波動方程式とは？音を解析するのに必要な数学の知識は？実際どのようにして、音を解析したのか？が書かれている。

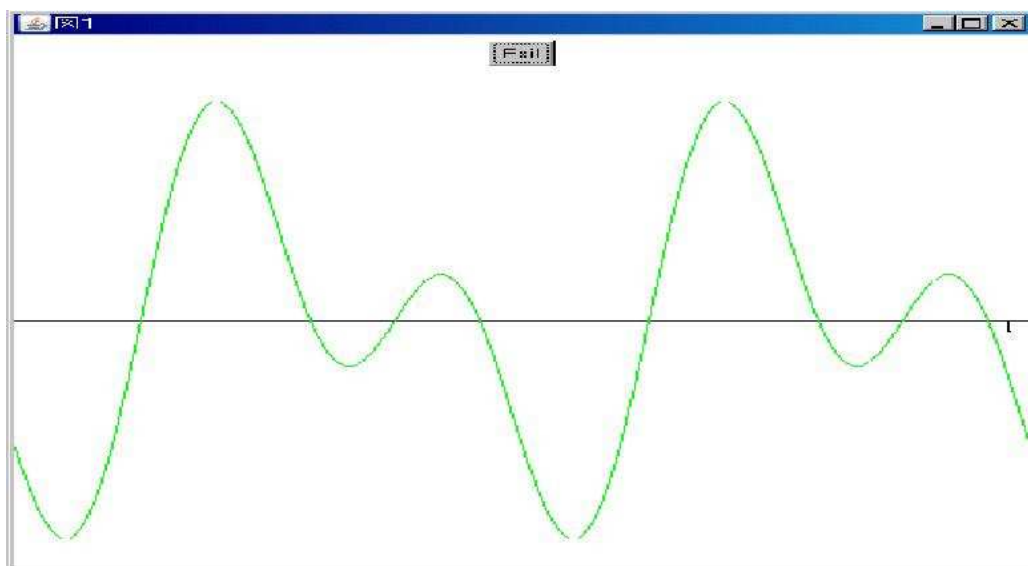
音の周波数解析という名前であるにもかかわらず、十分な周波数解析が出来なかったことを後悔しています。

第2章 信号処理の基礎知識

2.1 アナログ信号

$x(t)$ が $-\infty < t < \infty$ における任意の点で値を持つならば、 $x(t)$ はアナログ信号という。ただし、 t は時間変数とし、 $x(t)$ は時間に依存する関数とする。

つまり、アナログ信号とは図の様な時間的に連続した信号のことをいう。



2.1.1 アナログ信号処理

アナログ信号処理とは、本来のアナログ信号に対して、なんらかの処理を行い、変換することをいう。



2.2 デジタル信号

アナログ信号を標本化し、量子化した信号をデジタル信号という。

標本化（サンプリング）とは、時間間隔 Δ ごとにアナログ信号の値を求めることをいう。

ここで Δ は標本化間隔（標本化周期）と呼ばれ、その逆数 $\frac{1}{\Delta}$ は標本化周波数と呼ぶ。たとえば、音楽CDでは、 $\Delta = \frac{1}{44100}$ [秒] である。

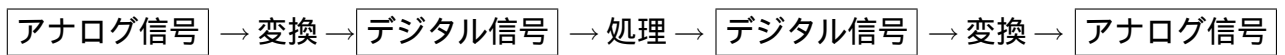
量子化とは、

$$\begin{array}{l} \hline 0 \leq x(n\Delta) < 10 \longrightarrow x(n\Delta) = q_1 \\ \hline 10 \leq x(n\Delta) < 20 \longrightarrow x(n\Delta) = q_2 \\ \hline 20 \leq x(n\Delta) < 30 \longrightarrow x(n\Delta) = q_3 \\ \hline \end{array}$$

といった具合に q_1, q_2, \dots, q_k という離散値に対応させること。このとき、 q_1, q_2, \dots, q_k は量子化レベルといい、その個数 k を量子化レベル個数という。

2.2.1 デジタル信号処理

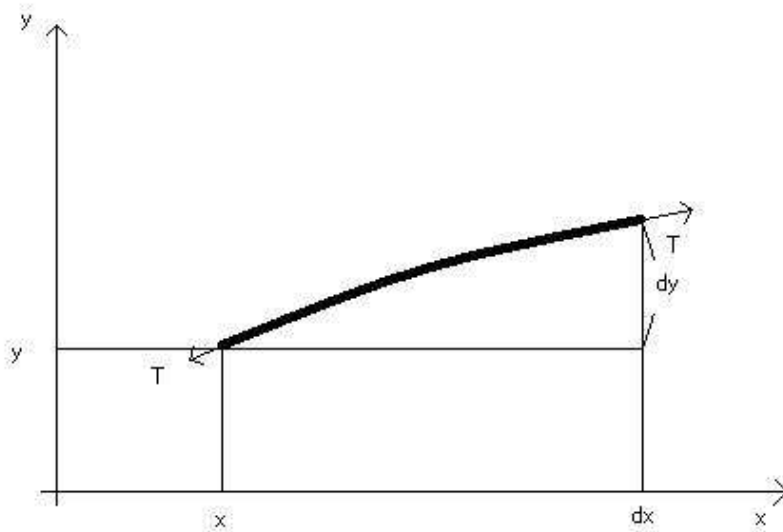
デジタル信号処理では、アナログ信号をデジタル信号に変換し、コンピュータによって処理をし、処理後のデジタル信号をアナログ信号に変換する。



第3章 波動方程式

まず、弦振動の波動方程式について線形の場合と非線形の場合を考える。

3.1 弦振動の波動方程式 (線形)



図のような綿密度 $\mu(\text{kg/m})$ を持ち、張力 $T(\text{N})$ で張られている一様な弦を考える。ただし θ はベクトル T と x 軸とのなす角とする。線分 ds をその平衡位置に戻そうとする正味の力

$$(3.1) \quad dF_y = (T \sin \theta)_{x+dx} - (T \sin \theta)_x$$

は、その線分の両端における T の y 成分の差である。

$T \sin \theta$ にテイラー展開

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx + \dots$$

を適用して、第 1 次の項だけ残すと

$$(3.2) \quad dF_y = \left[(T \sin \theta)_x + \frac{\partial (T \sin \theta)_x}{\partial x} dx \right] - (T \sin \theta)_x = \frac{\partial (T \sin \theta)_x}{\partial x} dx$$

のようになる。

小さな変位 y に対して、 $\sin \theta$ は $\tan \theta$ 、すなわち $\frac{\partial y}{\partial x}$ で置き換えることができるので

$$dF_y = \frac{\partial(T \frac{\partial y}{\partial x})}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

となる。線分 ds の質量は μds (kg) なので、運動方程式は

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (\mu ds) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

今 dy は十分に小さいから $ds \approx dx$ である。さらに、

$$c^2 = \frac{T}{\mu}$$

として、次式を得る。

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

3.2 弦振動の波動方程式 (非線形)

前節では (3.2) 式において、 $\sin \theta$ を $\tan \theta$ と置き換えた。

今回は $\sin \theta \doteq \tan \theta$ と近似しないでやってみる。まず、

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

であるから、(3.2) 式は

$$\begin{aligned} dF_y &= T \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \right) \\ &= T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2}} \right) \end{aligned}$$

のようになる。

以下、線形の波動方程式を導くやり方と同様にすれば、次式が得られる。

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2}} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

以上より、線形と非線形の波動方程式が得られた。

次章では、それぞれの波動方程式の差分方程式について考える。

第4章 差分方程式

4.1 線形波動方程式の差分方程式

(3.4) 式の波動方程式

$$(4.1) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in (0, 1), t > 0)$$

と初期条件

$$(4.2) \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (x \in [0, 1])$$

$$(4.3) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in [0, 1])$$

からなる差分方程式を求める。

まず、空間変数 x に属する区間 $[0, 1]$ を N 等分し、格子点を x_i と表す。すなわち、刻み幅

$$h = \frac{1}{N}$$

として

$$x_i = ih \quad (i = 0, \dots, N)$$

一方、時間変数 t に関する刻み幅 $\tau > 0$ を固定して、

$$t_j = j\tau$$

とおく。格子点 (x_i, t_j) において偏導関数 u_{tt}, u_{xx} をそれぞれ2階中心差分近似すると、

$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + O(\tau^2),$$
$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

である。ただし $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ である。

このことから、(4.1) 式より

$$(4.4) \quad \frac{1}{c^2} \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}$$

なる差分方程式を得る。両辺に τ^2 を掛けてから移項すると

$$U_i^{j+1} = 2(1 - \lambda^2)U_i^j + \lambda^2(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) - U_i^{j-1}$$
$$(i = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots)$$

ただし、 $\lambda = \frac{c\tau}{h}$ とした。
初期条件からは

$$U_i^0 = \phi(x_i)$$

を得る。また、 $u(x, t)$ の滑らかさを C^3 級とすると、

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)\tau + \frac{u_{tt}(x_i, 0)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3) \\ &= u(x_i, 0) + \psi(x_i)\tau + \frac{u_{tt}(x_i, 0)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3) \end{aligned}$$

$t = 0$ でも波動方程式が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + \psi(x_i)\tau + c^2 \frac{u_{xx}(x_i, 0)}{2!} + O(\tau^3) \\ &= u(x_i, 0) + \psi(x_i)\tau + \frac{c^2}{2!} \frac{u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}}{h^2} \tau^2 + O(h^2) + O(\tau^3) \end{aligned}$$

故に

$$U_i^1 = U_i^0 + \psi(ih)\tau + \frac{c^2}{2!} \frac{U_{i+1}^0 - 2U_i^0 + U_{i-1}^0}{\tau^2}$$

なる差分方程式を得る。整理して

$$U_i^1 = (1 - \lambda^2)U_i^0 + \psi(ih)\tau + \frac{\lambda^2}{2}(U_{i+1}^0 + U_{i-1}^0)$$

以上から、(4.1),(4.2),(4.3) 式に対応して、未知数列 $\{U_i^j; 0 \leq i \leq N, 0 \leq j\}$ に関する方程式系

$$(4.5) \quad U_i^{j+1} = 2(1 - \lambda^2)U_i^j + \lambda^2(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) - U_i^{j-1} \quad (1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j),$$

$$(4.6) \quad U_i^0 = \phi(x_i) \quad (0 \leq i \leq N),$$

$$(4.7) \quad U_i^1 = (1 - \lambda^2)U_i^0 + \psi(ih)\tau + \frac{\lambda^2}{2}(U_{i+1}^0 + U_{i-1}^0) \quad (0 \leq i \leq N)$$

が得られた。これらの式と境界条件により、波動方程式の差分解を得ることができる。

4.2 非線形波動方程式の差分方程式

3.1 節では、(4.1) 式の差分方程式について考えた。

今節では、(3.4) の差分解について考えてみる。すなわち、波動方程式

$$(4.8) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2}} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

と初期条件

$$(4.9) \quad u(x, 0) = \phi(x) (x \in [0, 1])$$

$$(4.10) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) (x \in [0, 1])$$

からなる差分方程式を求める。

空間変数 x に属する区間 $[0, 1]$ を N 等分し、格子点を x_i と表す。すなわち、刻み幅

$$h = \frac{1}{N}$$

として

$$x_i = ih$$

一方、時間に関する刻み幅 $\tau > 0$ を固定して、

$$t_j = j\tau$$

とおく。格子点 (x_i, t_j) においてまず、式 (4.8) の右辺の偏導関数 u_{tt} を 2 階中心差分近似すると、

$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + O(\tau^2)$$

次に式 (4.8) の左辺を差分近似する。

まず、偏導関数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ を中心差分近似すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h} + O(h^2)$$

となる。また (4.8) 式の左辺は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2}} \right) = \frac{\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2}} \Big|_{x+h/2} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2}} \Big|_{x-h/2}}{h} + O(h^2)$$

となる。よって

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2}} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}\right)^2}} \right) - \frac{1}{h^2} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}\right)^2}} \right) + O(h^2).$$

ただし $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ である。

よって以上から

$$\frac{1}{h^2} \left(\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}\right)^2}} \right) - \frac{1}{h^2} \left(\frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}\right)^2}} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2}$$

なる差分方程式を得る。 $\lambda = \frac{c\tau}{h}$ として、 U_i^{j+1} を左辺に移項し、整理すると、

$$U_i^{j+1} = \lambda^2 \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}\right)^2}} - \lambda^2 \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}\right)^2}} + 2U_i^j - U_i^{j+1}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots)$$

初期条件から、

$$U_i^0 = \phi(x_i)$$

を得る。

また、 $u(x, t)$ の滑らかさを C^3 級とすると、

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)\tau + \frac{u_{tt}(x_i, 0)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3)$$

$$= u(x_i, 0) + \psi(x_i)\tau + \frac{u_{tt}(x_i, 0)}{2!}\tau^2 + O(\tau^3)$$

$t = 0$ でも波動方程式が成り立っているとすると、

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + \psi(x_i)\tau + \frac{c^2}{2!} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \right) \tau^2 + O(\tau^3)$$

$$= u(x_i, 0) + \psi(x_i)\tau + \frac{\tau^2}{h^2} \left(\frac{u_{i+1,0} - u_{i,0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{u_{i+1,0} - u_{i,0}}{h}\right)^2}} - \frac{u_{i,0} - u_{i-1,0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{u_{i,0} - u_{i-1,0}}{h}\right)^2}} \right) + O(\tau^2) + O(\tau^3)$$

故に、

$$U_i^1 = U_i^0 + \psi(x_i)\tau + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{U_{i+1}^0 - U_i^0}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_{i+1}^0 - U_i^0}{h}\right)^2}} - \frac{U_i^0 - U_{i-1}^0}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_i^0 - U_{i-1}^0}{h}\right)^2}} \right)$$

以上から、(4.8),(4.9),(4.10) 式に対応して、未知数列 $\{U_i^j; 0 \leq i \leq N, 0 \leq j\}$ に関する方程式系

$$(4.11) \quad U_i^{j+1} = \lambda^2 \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}\right)^2}} - \lambda^2 \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}\right)^2}} + 2U_i^j - U_i^{j+1}$$

$$(1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j)$$

$$(4.12) \quad U_i^0 = \phi(x_i) \quad (0 \leq i \leq N)$$

$$(4.13) \quad U_i^1 = U_i^0 + \psi(x_i)\tau + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{U_{i+1}^0 - U_i^0}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_{i+1}^0 - U_i^0}{h}\right)^2}} - \frac{U_i^0 - U_{i-1}^0}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_i^0 - U_{i-1}^0}{h}\right)^2}} \right)$$

$$(1 \leq i \leq N-1)$$

が得られた。これらの式と境界条件から、波動方程式の差分解を得ることができる。

第5章 離散フーリエ変換

5.1 フーリエ級数

離散フーリエ変換について述べる前にフーリエ級数及び、フーリエ変換について触れておく。

5.1.1 実数値関数のフーリエ級数

$f(x)$ を実数値関数とし、周期 2π の周期関数とする。

このとき α_n, β_n を

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt$$
$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt$$

とおき、それぞれフーリエ余弦係数、フーリエ正弦係数と呼ぶ。

これらを用いた三角級数

$$(5.1) \quad f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

をフーリエ級数という。

5.1.2 複素数値関数のフーリエ級数

適度な滑らかさを持つ周期 T の関数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は次のように級数展開できる

$$(5.2) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi int}{T}\right)$$

ただし、 i は虚数 ($i^2 = -1$) とし、

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp\left(\frac{-2\pi int}{T}\right) dt$$

とする。このとき c_n をフーリエ係数と呼ぶ。

5.2 離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform)

x を周期 T の関数とすると、 $N \in \mathbb{N}$ を固定して、

$$\omega = \omega_N := \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$$

さらに、 $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$t_j := j\frac{T}{N}, \quad x_j := x(t_j)$$

とおく。 x_j は周期 N の数列である。フーリエ係数 c_n を台形公式で近似したものを離散フーリエ係数 C_n とすると、

$$(5.3) \quad C_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \exp\left(\frac{-2\pi i n}{T} t_j\right) \frac{T}{N}$$

$$(5.4) \quad = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-jn} x_j$$

が成り立つ。 C_n も n について周期 N の数列である。

写像 $\{x_j\} \mapsto \{C_n\}$ を、離散フーリエ変換 (DFT (Discrete Fourier Transform)) という。逆に

$$(5.5) \quad x_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{jn}$$

も成り立つ。写像 $\{C_n\} \mapsto \{x_j\}$ を逆離散フーリエ変換と呼ぶ。

5.2.1 台形公式

$$\int_0^T U(t) dt \doteq \left(\frac{1}{2}U(0) + \sum_{j=1}^{N-1} U(t_j) + \frac{1}{2}U(T)\right) \frac{T}{N}$$

と近似するものを台形公式と呼ぶ。これは小区間 $[t_j, t_{j+1}]$ で次の近似をしたものである。

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} U(t) dt \doteq \frac{1}{2}(U(t_j) + U(t_{j+1})) \frac{T}{N}$$

周期関数では $U(0) = U(T)$ なので、台形公式は、

$$\int_0^T U(t) dt \doteq \sum_{j=0}^{N-1} U(t_j) \frac{T}{N}$$

周期関数の 1 周期の積分は台形公式で非常に高精度に求まることが知られている。

5.2.2 高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform)

高速フーリエ変換 (FFT(Fast Fourier Transform)) とは、離散フーリエ変換の計算をより速く計算させるためのアルゴリズムである。

第6章 Wave ファイルの波形

WaveGraphics3.java によって音データの再生、音データの波形及びまたそれを FFT したグラフを描画する。これによって、何番目にピークに達するのかを調べることで、基本周波数及び、倍音周波数の解析が行えるだろう。

WaveGraphics3.java によって得られる音データの波形は 1 秒後の波形である。また、FFT した図は 0 ~ 1000 番目の図である。

6.1 分析したデータ

- ・扱った音データは piano.wav
- ・今回扱ったピアノの音はドの音で、約 261Hz である。
- ・サンプリング周波数は 44100Hz
- ・量子化ビット数は 16 ビット

6.2 解説

piano.wav の波形は図 6.1 のようになる。

FFT した図 6.2 の 1 回目のピークは 261 番目、2 回目のピークは 521 番目、3 回目のピークは 782 番目にきている。今回扱ったピアノの音の周波数は約 261Hz である。つまり、一回目のピークが何番目か分かれば音程も分かるということである。なぜピークの最大が何番目か分かれば、周波数が求まるのか、次に考える。

6.3 基本周波数の求め方の裏づけ

正弦波

$$(6.1) \quad u(t) = \exp(2\pi i f t)$$

を考える。ただし、 f は周波数とする。

時間 T で記録して、Fourier 級数展開する。

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \exp(2\pi int) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp(2\pi ift) \exp(2\pi int) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left(2\pi it\left(f - \frac{n}{T}\right)\right) dt \end{aligned}$$

ここで

$$(6.2) \quad A = A_n = 2\pi\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \exp(iA_n t) dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{iA_n} [\exp(iA_n t)]_0^T \\ &= \frac{1}{iA_n T} (\exp(iA_n T) - 1) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} |C_n| &= \frac{1}{|A_n|T} |\exp(iA_n T) - 1| \\ &= \frac{1}{|A_n|T} |\cos A_n T + i \sin A_n T - 1| \\ &= \frac{1}{|A_n|T} \sqrt{(1 - \cos A_n T)^2 + \sin^2 A_n T} \\ &= \frac{1}{|A_n|T} \sqrt{2(1 - \cos A_n T)} \end{aligned}$$

ところで、

$$(1 - \cos A_n T) = 2 \sin^2 \frac{A_n T}{2}$$

より、

$$|C_n| = \frac{1}{|A_n|T} \cdot 2 \left| \sin \frac{A_n T}{2} \right| = \left| \frac{\sin \frac{A_n T}{2}}{\frac{A_n T}{2}} \right|$$

ここで、 $y = \frac{\sin x}{x}$ を考えるとき、 $x = 0$ で最大となる。

したがって (6.2) の A_n つまり $|f - \frac{n}{T}|$ がもっとも小さくなるとき、 C_n が最大となる。

$$\therefore f = \frac{n}{T}$$

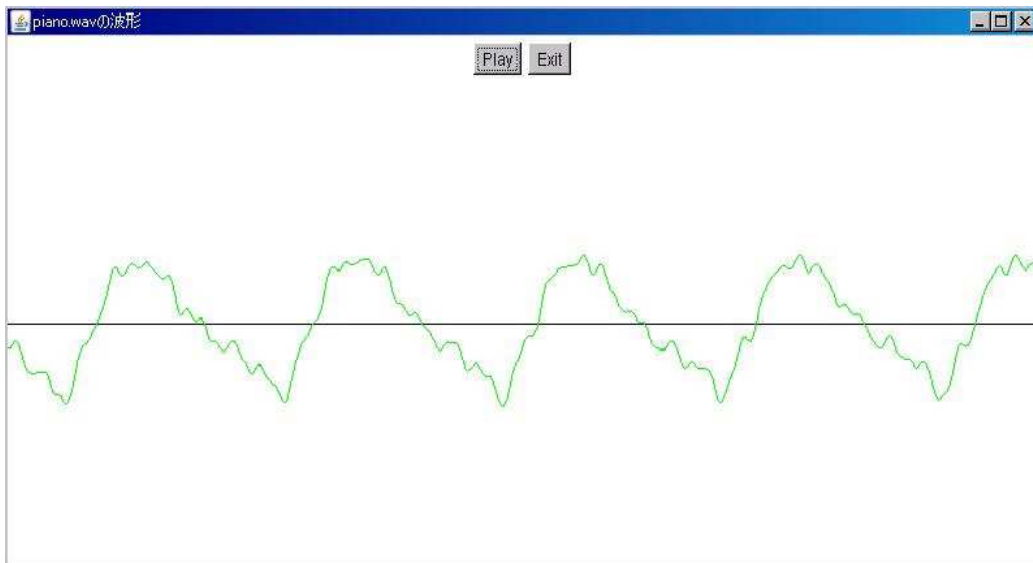


図 6.1: piano.wav の波形

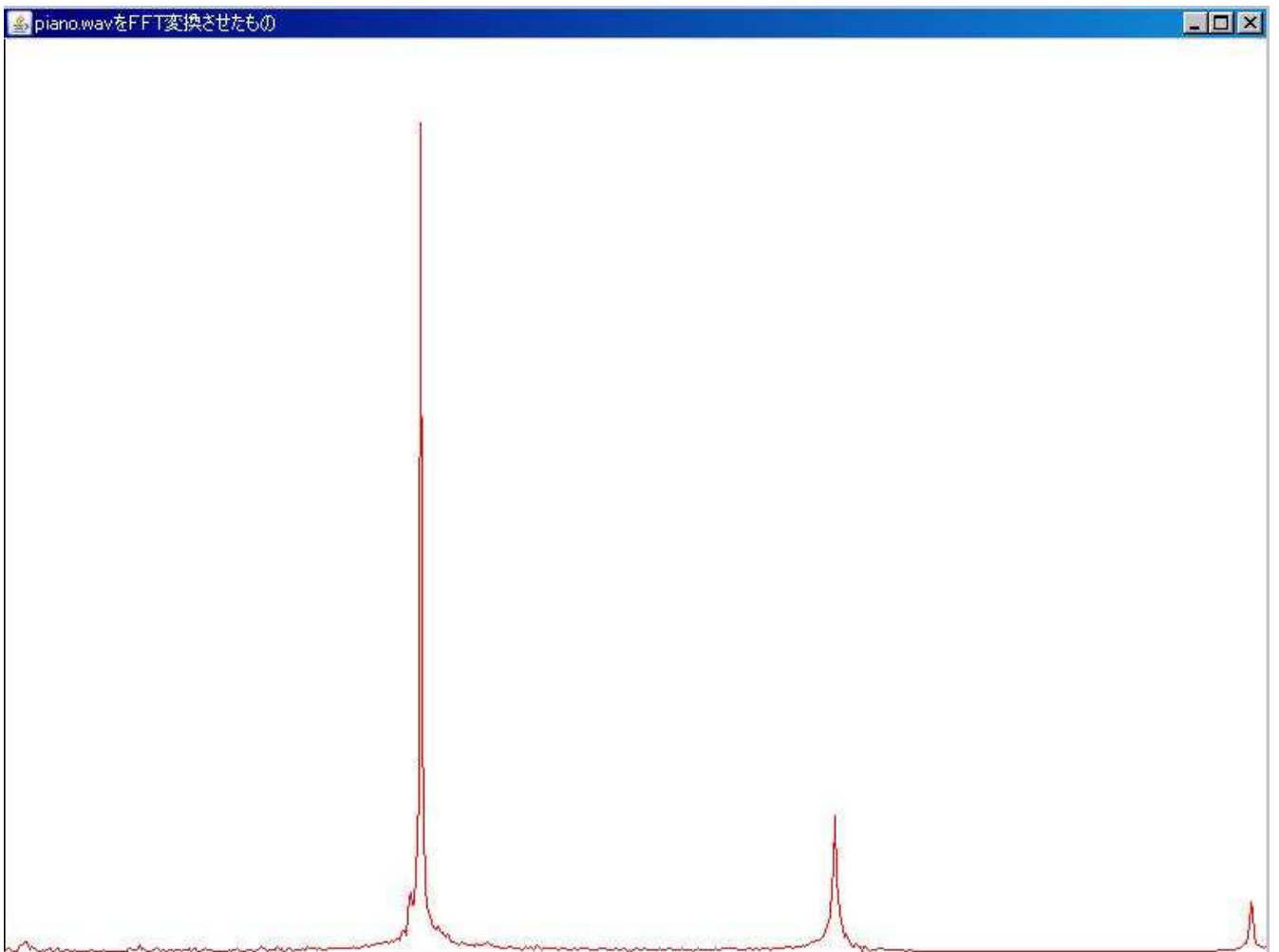


図 6.2: piano.wav を FFT したグラフ

第7章 その他のWaveファイルの波形

ギターのドの音（周波数は131Hz）(波形は図7.1)(FFTした図は図7.2)。1回目のピークは131番目、2回目のピークは262番目、3回目のピークは393番目であった。

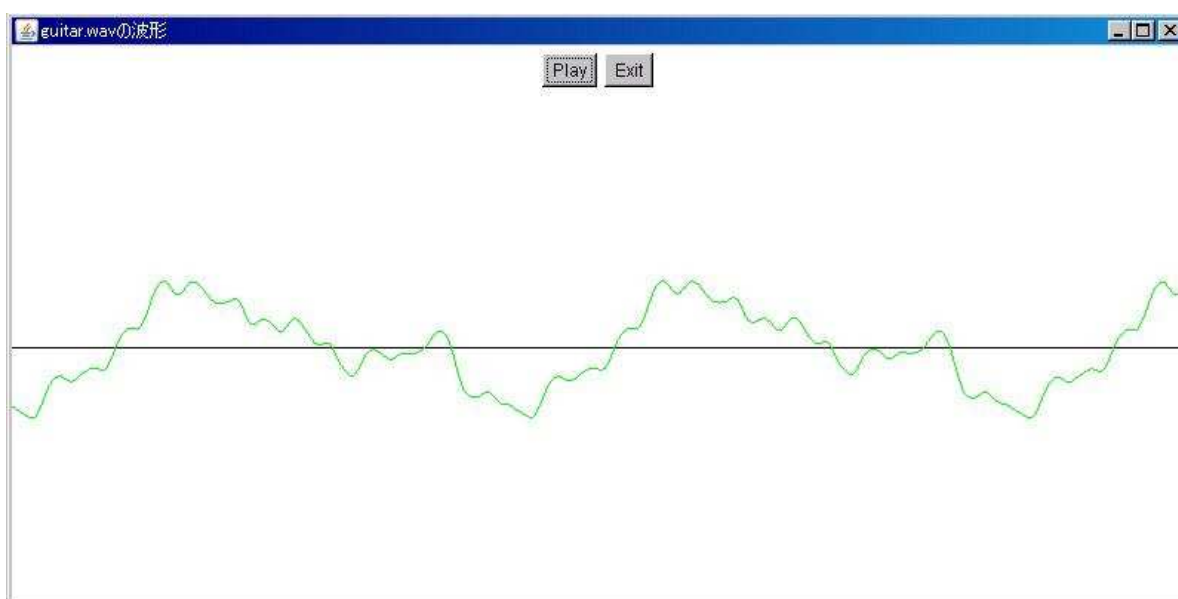


図 7.1: guitar.wav の波形

ヴァイオリンのドの音（周波数は261Hz）(波形は図7.3)(FFTした図は図7.4) 1回目のピークは261番目、2回目のピークは523番目、3回目のピークは784番目であった。

7.1 考察

以上のデータから何番目にピークを迎えるかが分かった。第3倍音までのピークを測ったが、第1倍音の約2倍、3倍の番号で次のピークを迎えることが予想できる。これらの倍音成分を分析してみたかったが、時間がなかったため出来なかったことを後悔する。

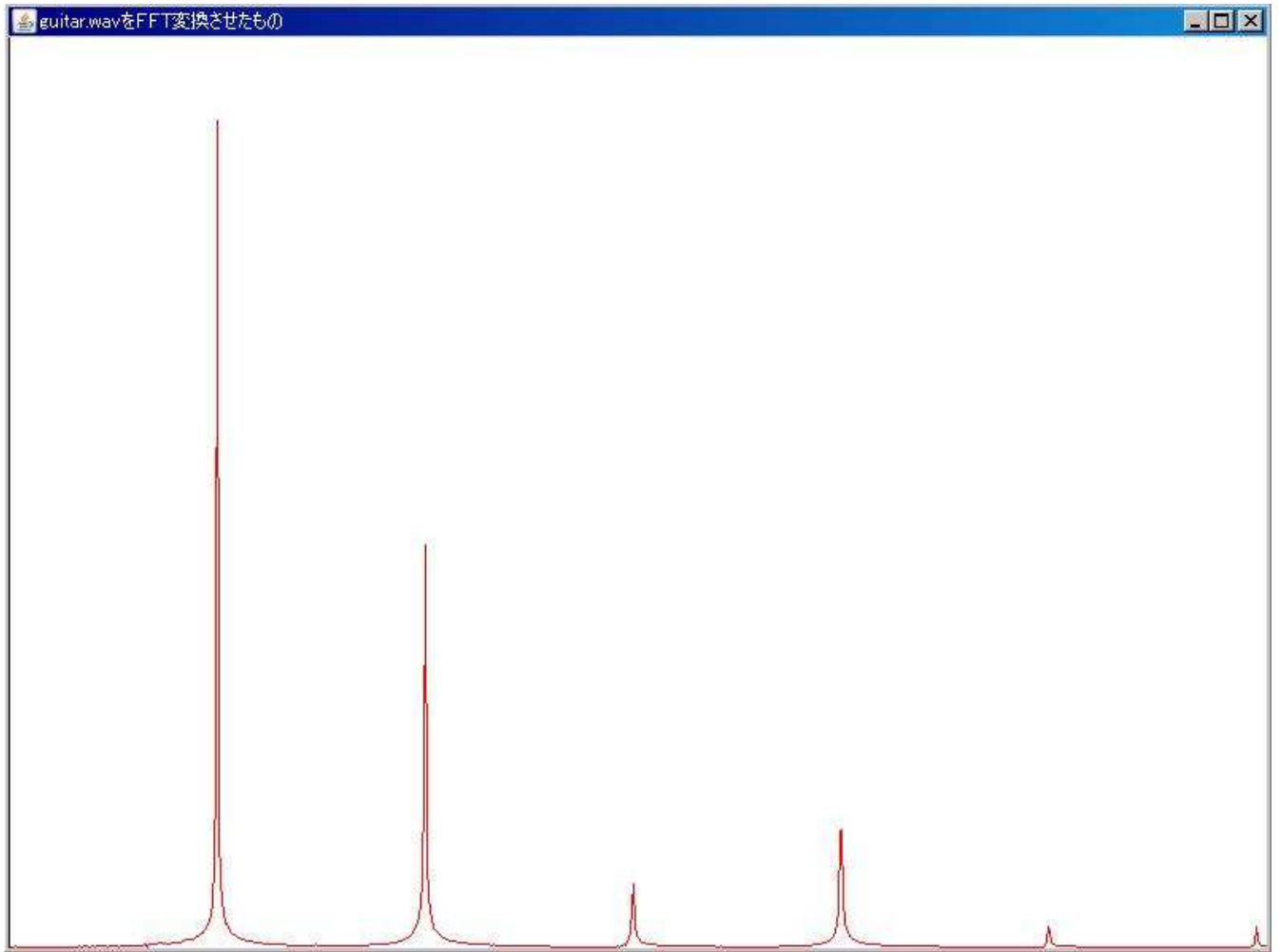


図 7.2: guitar.wav を FFT した図

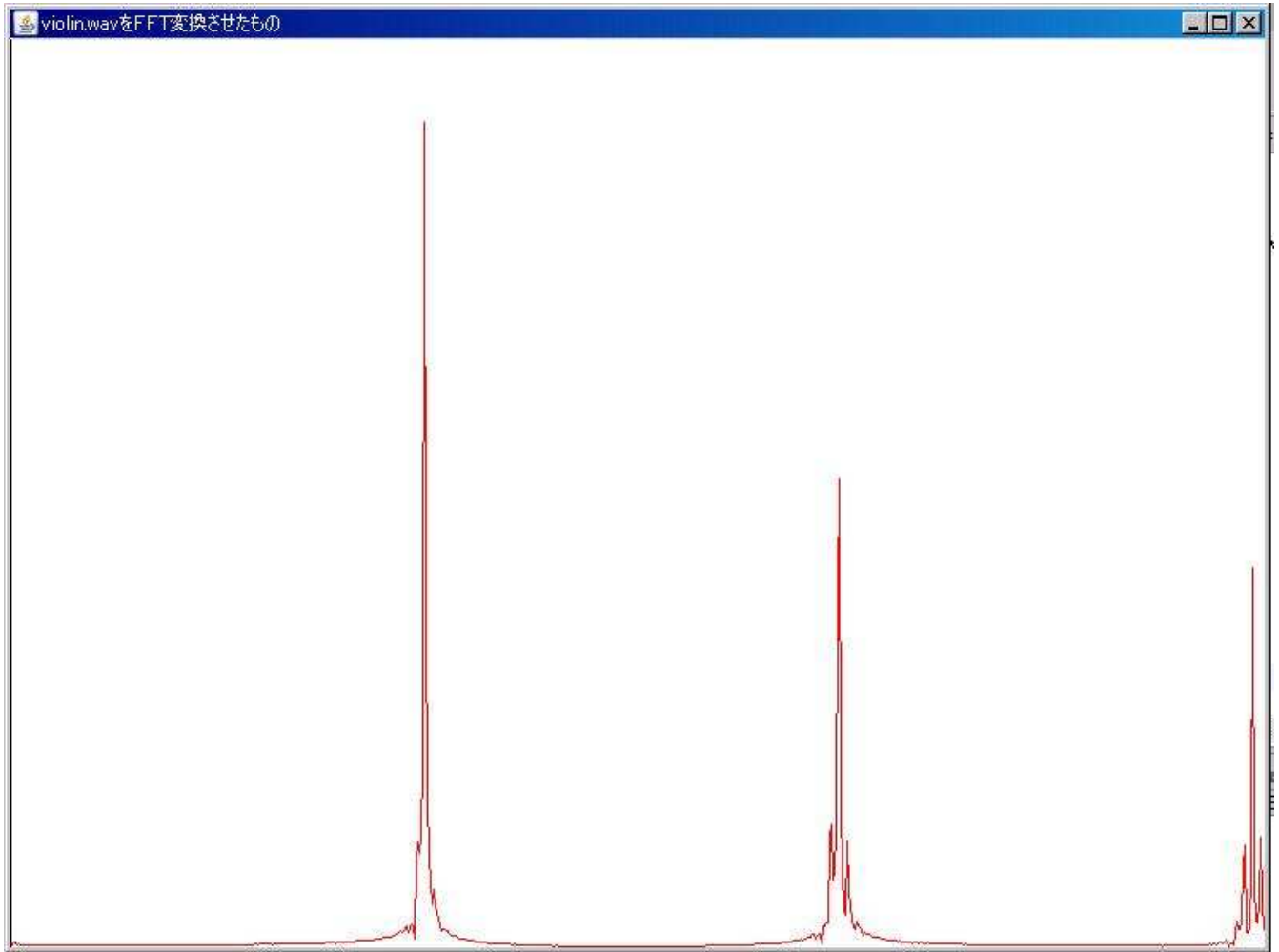


図 7.3: violin.wav の波形

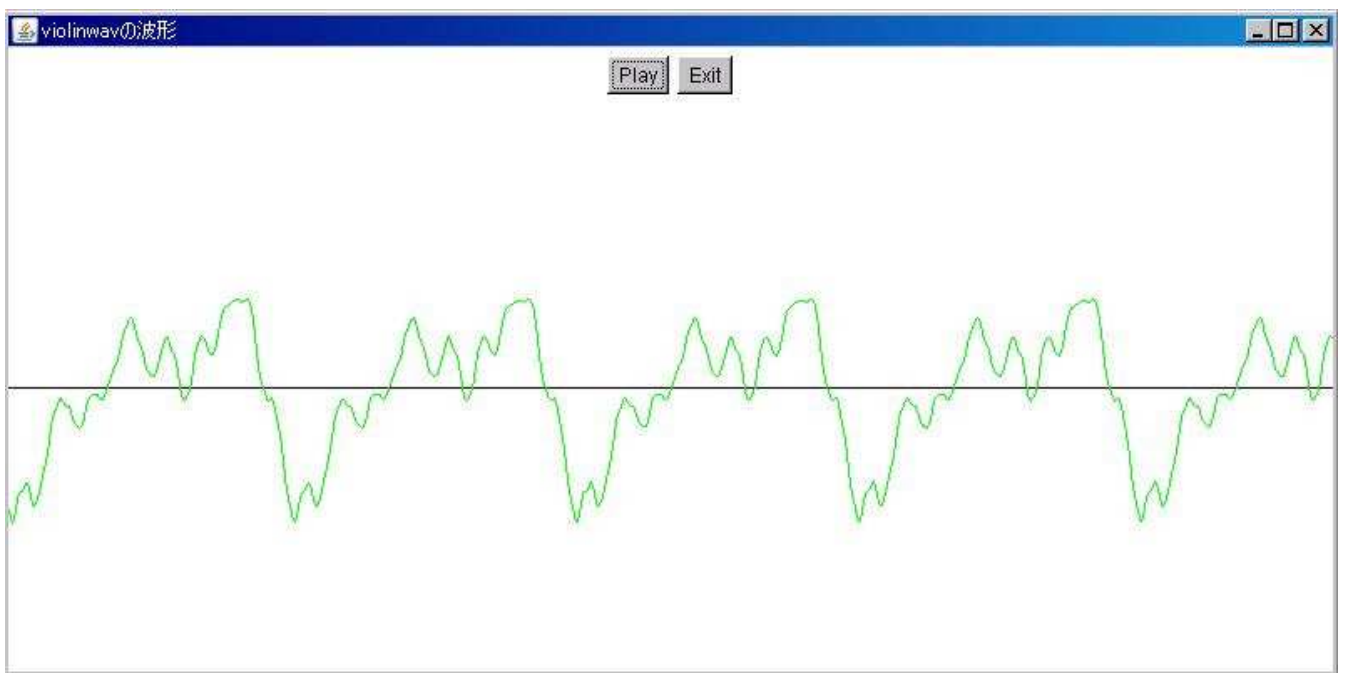


図 7.4: violin.wav を FFT した図

付録A ソースプログラム

A.1 sinCanvas.java

3ページの図を出力するプログラムについて。図の関数は $\sin(x) + \sin(2x)$ である。Canvasクラスを用いたプログラムで、関数値を変えれば様々なグラフが描けるので一応ここに載せておく。

コンパイルはコマンドプロンプトから

```
javac sinCanvas.java
java sinCanvas
```

によってできる。

A.2 WaveGraphics3.java

・FFT変換のプログラムには、jfftpackを使用した。P. N. Swartztaruber の FFTPACK(<http://www.netlib.org/fftpack/>) は古くからあるライブラリだが、Java への移植である jfftpack (byBaosheZhang) がある。

このプログラムは前述したが、音データの再生、音データの波形及びまたそれをFFTしたグラフを描画する、といった事が出来るプログラムである。しかし、一応その機能は使えるものの、使い勝手はまだまだ悪く改良の余地がたくさんある。

コンパイルはコマンドプロンプトから

```
javac -cp jfftpack.jar WaveGraphics3.java
java -cp jfftpack.jar;. WaveGraphics3
```

によってできる。

A.3 非線形の差分方程式のプログラム

あまり、今回の卒業論文とは関係ないが(本当はこちらも深くやりたかったが)、非線形の差分方程式のプログラムを MitsuiWorld を使って作ったのでここに載せておく。

線形の波動方程式と、非線形の波動方程式では、最初こそ違いは見られにくいですが、時間が経つと明らかな違いがみえてくる。この違いは安定条件から来るか等いろいろと研究できそうだが、今回はこの感想までとしておく。

MitsuiWorld は <http://www.math.meiji.ac.jp/~ee88010/> においてある。

参考文献

- [1] 松山 周五郎, 音の Fourier 解析, 2003 年度桂田研卒業研究
- [2] 三井 康之, Java による波動方程式の数値解析, 2001 年度桂田研卒業研究
- [3] 高橋 信, 入門 信号処理のための数学, オーム社 (2007)
- [4] N・H・フレッチャー、T・D・ロッシング [著]、岸 憲史、久保田 秀美 [訳], 楽器の物理学, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002)
- [5] 河西 朝雄, Java 言語, ナツメ社 (2003)
- [6] 小国 力、三井 栄慶, 理工系の Java, 朝倉書店 (2004)