

球領域における熱方程式に対する差分法

田邊 雅人, 島倉 義和

2007年3月22日

目次

第 1 章 球領域における熱方程式の厳密解	3
1.1 球領域における熱方程式	3
1.2 極座標変換によって導かれた熱方程式	3
1.3 Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題	4
1.4 球領域における Laplace 作用素の固有値問題	6
1.5 球領域における熱方程式の変数分離解と一般解	8
第 2 章 球領域における差分法	9
2.1 Laplacian の極座標表示	9
2.2 z 軸上の点以外の点での Laplacian の差分近似	9
2.3 原点以外の z 軸上の点での Laplacian 差分近似	10
2.4 原点での Laplacian 差分近似	13
2.5 陽解法	14
2.6 陽解法の安定性	15
2.7 実験結果	16
2.8 結論	17
付録 A 空間極座標の Laplacian	18
付録 B Legendre 関数	21
付録 C 実験に使用したプログラム	24
C.1 GSL について	24
C.2 ベッセル関数の零点を求めるプログラム	24
C.3 陽解法で解を求めるプログラム	27

序

今まで桂田研の先輩方達は、円盤領域や円柱領域における熱方程式に対する差分法について取り組んできました。

そこで、私たちは先輩方達の卒業研究レポート等を参考にして、桂田研で始めて球領域における熱方程式に対する差分法について、取り組みました。

まず、与えられた熱方程式について、空間極座標を用いて変換し、Fourierの方法によって厳密解を求めました。厳密解を求める際には、Bessel関数やLegendre関数を利用しました。

また、空間極座標によって変換された熱方程式から陽解法の差分方程式を導き、円盤領域の陽解法のプログラムを参考にして、球領域の陽解法のプログラムを作成しました。そこで、原点($r = 0$)や z 軸上の点($\theta = 0$)で問題があることに気づき、いろいろな工夫を施したことにより、プログラムを作成することが出来ました。

今回の卒業研究レポートでは、

第1章 球領域における熱方程式の厳密解

付録A 空間極座標のLaplacian

付録B Legendre関数

を島倉が担当し、

第2章 球領域における差分法

付録C 実験に使用したプログラム

を田邊が担当しました。

第1章 球領域における熱方程式の厳密解

1.1 球領域における熱方程式

半径 $R > 0$ の球

$$\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

における熱方程式の Dirichlet 境界値初期値問題

$$u_t = \Delta u \quad ((x, y, z) \in \Omega, t > 0),$$

$$u(x, y, z, t) = 0 \quad ((x, y, z) \in \Gamma, t > 0),$$

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \bar{\Omega})$$

の解を Fourier の方法で求める。ここで、 $\Gamma = \partial\Omega$ は境界、 u_0 は初期値とする。

まず、熱方程式と境界条件を満たし、 $u(x, y, z, t) = \zeta(x, y, z)\eta(t)$ という形をしている非自明な u を求めることを目標にする。この変数分離解を熱方程式に代入すると、

$$\zeta(x, y, z)\eta'(t) = \Delta\zeta(x, y, z)\eta(t).$$

整理すると、

$$\frac{\Delta\zeta(x, y, z)}{\zeta(x, y, z)} = \frac{\eta'(t)}{\eta(t)}.$$

これは定数なので、 $-\lambda$ とおくと、

$$\Delta\zeta(x, y, z) = -\lambda\zeta(x, y, z),$$

$$\eta'(t) = -\lambda\eta(t)$$

が導かれる。

1.2 極座標変換によって導かれた熱方程式

3次元の球体

$$\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

で Dirichlet 条件付き Laplace 作用素の固有値問題

$$\Delta\zeta = -\lambda\zeta \quad (\text{in } \Omega), \quad \zeta = 0 \quad (\text{on } \Gamma)$$

の解を Fourier の方法で求める。

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

により変数を (x, y, z) から (r, θ, φ) に変換すると、 $\Delta \zeta = -\lambda \zeta$ は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S \zeta &= -\lambda \zeta, \\ \Delta_S \zeta &:= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2}\end{aligned}\quad (0 < r \leq R, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

という方程式に変換される。ここで、 Δ_S は球面 Laplace 作用素と呼ばれる微分作用素である。

そこで、

$$\zeta(r, \theta, \varphi) = U(r)v(\theta, \varphi)$$

とおいて、代入すると、

$$U''v + \frac{2}{r}U'v + \frac{1}{r^2}U\Delta_S v = -\lambda Uv.$$

両辺に $\frac{r^2}{Uv}$ をかけると、

$$r^2 \frac{U''}{U} + \frac{2}{r} \frac{U'}{U} + \lambda \frac{U}{U} = -\frac{\Delta_S v}{v}.$$

左辺は θ, φ によらず、右辺は r によらない定数なので、それを μ とおくと、

$$U'' + \frac{2}{r}U' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)U = 0 \quad (0 < r < R), \quad U(R) = 0, \quad U(0) \text{ は有限},$$

$$\Delta_S v = -\mu v \quad (0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

が導かれる。

1.3 Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

ここで、 $\Delta \zeta = 0$ を満たし、 $\zeta(r, \theta, \varphi) = U(r)v(\theta, \varphi)$ の形をしている非自明な解 ζ を求める。 U と v についての方程式は、

$$\begin{aligned}U''(r) + \frac{2}{r}U'(r) - \frac{\mu}{r^2}U(r) &= 0, \\ \Delta_S v &= -\mu v\end{aligned}$$

と導かれる。

まず、 U の方程式において $r = e^s$ とおくと、

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + \frac{dU}{ds} - \mu U = 0$$

が導かれる。この方程式は特性根の方法で解くことができる。

特性方程式は、

$$\nu^2 + \nu - \mu = 0$$

なので特性根は、

$$\nu = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\mu}}{2}.$$

$\mu > 0$ であるときは正の根と負の根を持ち、 $\mu = 0$ であるときは、0 と負の根を持つことがわかる。大きい根を ν_1 , 小さい根を ν_2 とすると、 $\nu_1 \geq 0$, $\nu_2 < 0$ であり、一般解は、

$$U = Ae^{\nu_1 s} + Be^{\nu_2 s} \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

これから、

$$U(r) = Ar^{\nu_1} + Br^{\nu_2}$$

となるが、 $U(r)$ は $r = 0$ で有限の値をとるので、実は $B = 0$ でなければならない。ゆえに、

$$U(r) = Ar^{\nu_1}.$$

ζ は C^∞ 級であることから、 $U(r)$ は $r = 0$ でも無限回微分可能であり、 ν_1 が整数でなければならないことがわかる。ゆえに、

$$\exists \nu \in \mathbf{N} \cup \{0\} \quad \text{s.t.} \quad \nu^2 + \nu - \mu = 0 \quad \text{すなわち} \quad \mu = \nu(\nu + 1).$$

Δ_S をさらに変数分離する。 $v(\theta, \varphi) = V(\theta)W(\varphi)$ とおくと、

$$V''(\theta)W(\varphi) + \cot \theta V'(\theta)W(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} V(\theta)W''(\varphi) = -\mu V(\theta)W(\varphi).$$

両辺に $\frac{\sin^2 \theta}{V(\theta)W(\varphi)}$ をかけると、

$$\frac{V'' + \cot \theta V' + \mu V}{V} \sin^2 \theta = -\frac{W''}{W}.$$

この等式の値は定数であるから、それを c とおくと、

$$W'' = -cW, \quad W(0) = W(2\pi), \quad W'(0) = W'(2\pi)$$

より、

$$\exists \ell \in \mathbf{N} \cup \{0\} \quad \text{s.t.} \quad c = \ell^2$$

$$W(\varphi) = A \cos \ell \varphi + B \sin \ell \varphi \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

が得られる。

$$V'' + \cot \theta V' + \left(\mu - \frac{\ell^2}{\sin^2 \theta} \right) V = 0$$

となり、ここで $\cos \theta = t$ とおくと、

$$\frac{dV}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dV}{dt}, \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = -\cos \theta \frac{dV}{dt} + \sin^2 \theta \frac{d^2V}{dt^2}$$

より、

$$-\cos\theta \frac{dV}{dt} + \sin^2\theta \frac{d^2V}{dt^2} - \cot\theta \sin\theta \frac{dV}{dt} + \left(\mu - \frac{\ell^2}{\sin^2\theta}\right)V = 0$$

であるから、

$$(1-t^2)V'' - 2tV' + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\ell^2}{1-t^2}\right)V = 0$$

となる。これを Legendre の陪微分方程式と呼び、この方程式の解で $t = \pm 1$ で連続なものは、

$$P_\nu^\ell(t) := (1-t^2)^{\ell/2} \frac{d^\ell}{dt^\ell} P_\nu(t) \quad (\ell = 0, 1, \dots, \nu)$$

の定数倍に限られることが知られている。これを Legendre の陪関数と呼ぶ。ここで $P_\nu(t)$ は Legendre 多項式と呼ばれる ν 次多項式

$$P_\nu(t) := \frac{1}{2^\nu \nu!} \frac{d^\nu}{dt^\nu} (t^2 - 1)^\nu$$

で与えられる (この式を Rodrigues の公式と呼ぶ)。ここで $P_\nu(t)$ は ν 次多項式であるから、 $\ell > \nu$ となる ℓ に対して、 $P_\nu^\ell(t) \equiv 0$ となることに注意する。

以上を合わせると、 $\Delta_s v = -\nu(\nu+1)v$ の変数分離解として、

$$P_\nu^\ell(\cos\theta)(A \cos \ell\varphi + B \sin \ell\varphi) \quad (\ell = 0, 1, \dots, \nu)$$

が得られる。これらを Legendre の球関数と呼ぶ。 $\Delta_s v = -\nu(\nu+1)v$ の一般解はこれらの線形結合として得られる。

1.4 球領域における Laplace 作用素の固有値問題

以上により、もとの Laplace 作用素の固有値問題 $\Delta\zeta = -\lambda\zeta$ は、

$$U'' + \frac{2}{r}U' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)U = 0$$

に $\mu = \nu(\nu+1)$ を代入して得られる常微分方程式

$$U'' + \frac{2}{r}U' + \left(\lambda - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\right)U = 0$$

の $U(R) = 0$ を満たし、かつ原点で $P_\nu^\ell(\cos\theta)(A \cos \ell\varphi + B \sin \ell\varphi)$ の関数 $v(\theta, \varphi)$ をかけたものが滑らかな関数となるような解を探すことに帰着された。 $\sqrt{\lambda}r = s$ なる変換で、

$$U\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right) = j(s)$$

とおくと、

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}U'\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right) = j'(s), \quad \frac{1}{\lambda}U''\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right) = j''(s).$$

よって、

$$\lambda j''(s) + \frac{2\sqrt{\lambda}}{s}\sqrt{\lambda}j'(s) + \left(\lambda - \frac{\lambda\nu(\nu+1)}{s^2}\right)j(s) = 0$$

整理すると、

$$j''(s) + \frac{2}{s}j'(s) + \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{s^2}\right)j(s) = 0, \quad j(\sqrt{\lambda}R) = 0, \quad j(0) \text{ は有限}$$

という微分方程式が導かれる。この方程式の解を一般に球 Bessel 関数と呼ぶ。

ここで、Bessel 関数について必要なものを挙げていく。

$$J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + \left(1 - \frac{n^2}{s^2}\right)J(s) = 0 \quad (n \in \mathbf{R})$$

を n 次の Bessel の微分方程式という。この一般解は、

$$J(s) = AJ_n(s) + BY_n(s) \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

である。ここで J_n は n 次の Bessel 関数、 Y_n は n 次の Neumann 関数である。

$$\begin{cases} J_n(s) := \left(\frac{s}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k} \\ Y_n(s) := \frac{J_n(s) \cos \nu\pi - J_{-n}(s)}{\sin \nu\pi} \quad (\nu \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}), \quad Y_n(s) := \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(s) \end{cases}$$

この J_ν, Y_ν の原点の近くでの挙動は以下のようにになっている。

$$\begin{cases} J_\nu(s) \sim \left(\frac{s}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \\ Y_\nu(s) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log s & (\nu = 0) \\ -\left(\frac{2}{s}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} & (\nu \neq 0) \end{cases} \end{cases}$$

先程導かれた微分方程式

$$j''(s) + \frac{2}{s}j'(s) + \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{s^2}\right)j(s) = 0$$

の一般解は、

$$j(s) = Aj_\nu(s) + By_\nu(s) \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

である。ただし j_ν, y_ν は、

$$j_\nu(s) := \sqrt{\frac{\pi}{2s}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(s), \quad y_\nu(s) := \sqrt{\frac{\pi}{2s}} Y_{\nu+\frac{1}{2}}(s)$$

で与えられる。

原点で j は有界であることから、 $B = 0$ でなければならない。

$$j(s) = Aj_\nu(s).$$

ゆえに、

$$U(r) = Aj_\nu(\sqrt{\lambda}r).$$

$U(R) = 0$ であることから、 $\sqrt{\lambda}$ は j_ν の零点である必要がある。 j_ν の正の零点は、 $J_{\nu+\frac{1}{2}}$ の正の零点と一致する。小さい方から順に並べることができることが知られている。それを、

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu,2} < \cdots < \mu_{\nu,k} < \cdots$$

とおくと、

$$\exists k \in \mathbf{N} \text{ s.t. } \sqrt{\lambda} = \frac{\mu_{\nu,k}}{R}.$$

以上より、対応する固有関数は極座標表示で、

$$j_\nu\left(\frac{\mu_{\nu,k}}{R}r\right)P_\nu^\ell(\cos\theta)(A \cos \ell\varphi + B \sin \ell\varphi)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots; \ell = 0, \dots, \nu; k = 1, 2, \dots)$$

である。

1.5 球領域における熱方程式の変数分離解と一般解

ここで取り扱う t は、時間に対するものとし、また、半径を $R = 1$ とする。以上より熱方程式の変数分離解は、

$$u(r, \theta, \varphi, t) = e^{-\mu_{\nu,k}^2 t} j_\nu(\mu_{\nu,k} r) P_\nu^\ell(\cos \theta) (A \cos \ell \varphi + B \sin \ell \varphi)$$

となり、熱方程式の一般解は、

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_{0,k,0} e^{-\mu_{0,k}^2 t} j_0(\mu_{0,k} r) P_0^0(\cos \theta)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_{\nu,k}^2 t} j_\nu(\mu_{\nu,k} r) P_\nu^\ell(\cos \theta) (A_{\nu,k,\ell} \cos \ell \varphi + B_{\nu,k,\ell} \sin \ell \varphi).$$

係数 $A_{\nu,k,\ell}$, $B_{\nu,k,\ell}$ は直交性から決定することができる。

第2章 球領域における差分法

2.1 Laplacian の極座標表示

3次元における Laplacian は、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

である。

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

とにおいて極座標変換すると、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.2)$$

2.2 z 軸上の点以外の点での Laplacian の差分近似

$\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ という領域を極座標変換すると, $B = \{(r, \theta, \varphi); 0 \leq r < R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ が対応する。 $N_r, N_\theta, N_\varphi \in \mathbf{N}$ に対して,

$$h_r := \frac{R}{N_r}, \quad h_\theta := \frac{\pi}{N_\theta}, \quad h_\varphi := \frac{2\pi}{N_\varphi},$$

$$r_i := ih_r \quad (i = 0, 1, \dots, N_r),$$

$$\theta_j := jh_\theta \quad (j = 0, 1, \dots, N_\theta),$$

$$\varphi_k := kh_\varphi \quad (k = 0, 1, \dots, N_\varphi),$$

$$u_{i,j,k} := u(r_i, \theta_j, \varphi_k)$$

と定義する。(2.2) の各項を中心差分近似すると,

$$\begin{aligned} \Delta u(r_i, \theta_j, \varphi_k) &= \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h_r^2} + \frac{2}{r_i} \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2h_r} \\ &+ \frac{\cot \theta_j}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}}{2h_\theta} + \frac{1}{r_i^2} \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h_\theta^2} \\ &+ \frac{1}{r_i^2 \sin^2 \theta_j} \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{h_\varphi^2} + O(h_r^2 + h_\theta^2 + h_\varphi^2) \\ &\quad (N_r, N_\theta, N_\varphi \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.3 原点以外の z 軸上の点での Laplacian 差分近似

z 軸上の点 $(0, 0, z)$ 、 $(|z| = r_i)$ の場合 $r = 0, \sin \theta = 0$ では, Laplacian の表示式 (2.2) は, 分母に $r, \sin \theta$ があるため使えない。そこで次のような図を利用して考える。

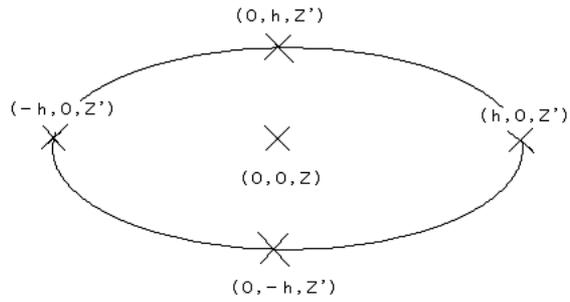


図 2.1: 4点を使った近似

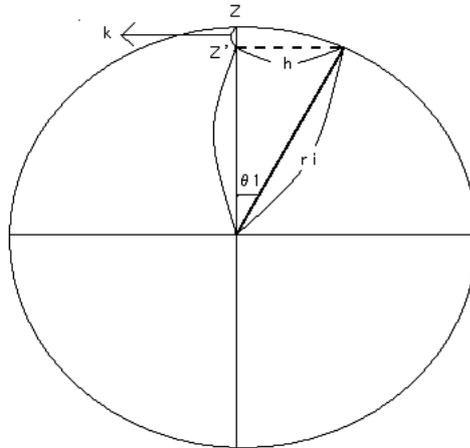


図 2.2: z' の位置

まず, 球面 $|z| = r_i$ 上の点 $(0, 0, z)$ の最寄りの4点 $(\pm h, 0, z'), (0, \pm h, z')$ について考える ($z > 0$)。2次元のときは素直に周りの4点をとればよかったのだが、今は球面上にあるので実際、 z より低

い z' で考える。(図 (2.2) を見てくれればわかる) この z' を使って図 (2.1) の配置で考える。

$$\begin{aligned} A &:= U_{i,1,0} + U_{i,1,\frac{N\varphi}{4}} + U_{i,1,\frac{N\varphi}{2}} + U_{i,1,\frac{3N\varphi}{4}} - 4U_{i,0,0} \\ &= U(h, 0, z') + U(0, h, z') + U(-h, 0, z') + U(0, -h, z') - 4U(0, 0, z). \end{aligned}$$

$z' = z - k$ とおくと図 (2.2) より $k = r_i - r_i \cos \theta_1 = r_i(1 - \cos \theta_1)$ 。これを代入することによって、

$$A = U(h, 0, z - k) + U(0, h, z - k) + U(-h, 0, z - k) + U(0, -h, z - k) - 4U(0, 0, z).$$

ここで、近似値を求めるために上の式をテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} A &\simeq U_{0,0,z} + U_x(0, 0, z)h - U_z(0, 0, z)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\{U_{xx}(0, 0, z)h^2 - 2U_{xz}(0, 0, z)hk + U_{zz}(0, 0, z)k^2\} + \dots \\ &\quad + U_{0,0,z} + U_y(0, 0, z)h - U_z(0, 0, z)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\{U_{yy}(0, 0, z)h^2 - 2U_{yz}(0, 0, z)hk + U_{zz}(0, 0, z)k^2\} + \dots \\ &\quad + U_{0,0,z} - U_x(0, 0, z)h - U_z(0, 0, z)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\{U_{xx}(0, 0, z)h^2 + 2U_{xz}(0, 0, z)hk + U_{zz}(0, 0, z)k^2\} + \dots \\ &\quad + U_{0,0,z} - U_y(0, 0, z)h - U_z(0, 0, z)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\{U_{yy}(0, 0, z)h^2 + 2U_{yz}(0, 0, z)hk + U_{zz}(0, 0, z)k^2\} + \dots \\ &\quad - 4U(0, 0, z) \\ &= -4U_z(0, 0, z)k + U_{xx}(0, 0, z)h^2 + U_{yy}(0, 0, z)h^2 + 2U_{zz}(0, 0, z)k^2 + \dots \end{aligned}$$

ここで $U_{xx}(0, 0, z), U_{yy}(0, 0, z), U_{zz}(0, 0, z)$ と Laplacian に近いものが出てくるが余分なものも存在する。

次に、軸上の 2 点について考える。 h_r を上下の刻み幅として、

$$B := \alpha U(0, 0, z + h_r) + h_r U(0, 0, z) + \gamma U(0, 0, z - h_r)$$

とおく。同様に、近似値を求めるために上の式をテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} B &\simeq \alpha\{U(0, 0, z) + U_z(0, 0, z)h_r + \frac{1}{2}U_{zz}(0, 0, z)h_r^2 + \dots\} \\ &\quad + \beta U(0, 0, z) \\ &\quad + \gamma\{U(0, 0, z) - U_z(0, 0, z)h_r + \frac{1}{2}U_{zz}(0, 0, z)h_r^2 + \dots\} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)U(0, 0, z) + (\alpha - \gamma)U_z(0, 0, z)h_r + \frac{\alpha + \gamma}{2}U_{zz}(0, 0, z)h_r^2 + \dots \end{aligned}$$

ここで $A + B$ 計算すると、

$$A + B = (\alpha + \beta + \gamma)U(0, 0, z) + \{(\alpha - \gamma)h_r - 4k\}U_z(0, 0, z)$$

$$+U_{xx}(0,0,z)h^2 + U_{yy}(0,0,z)h^2 + U_{zz}(0,0,z) \left\{ 2k^2 + \frac{\alpha + \gamma}{2} h_r^2 \right\}$$

となり，次のような連立方程式を立てると $A + B$ が $\Delta U(0,0,z)h^2$ となってくれる。

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$(\alpha - \gamma)h_r - 4k = 0$$

$$2k^2 + \frac{\alpha + \gamma}{2} h_r^2 = h^2$$

よって，上の連立方程式を解くと，

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(h^2 - 2k^2)}{h_r^2} + \frac{4k}{h_r} \right\}$$

$$\beta = -\frac{2(h^2 - 2k^2)}{h_r^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(h^2 - 2k^2)}{h_r^2} - \frac{4k}{h_r} \right\}$$

となる。以上より

$$\frac{A + B}{h^2} \simeq \Delta U(0,0,z)$$

となる。ここでテイラー展開を3次の項まで取った以下の式を使って誤差を求めていく。

$$\begin{aligned} A &\simeq U_{0,0,z} + U_x(0,0,z)h - U_z(0,0,z)k \\ &+ \frac{1}{2} \{ U_{xx}(0,0,z)h^2 - 2U_{xz}(0,0,z)hk + U_{zz}(0,0,z)k^2 \} \\ &+ \frac{1}{6} \{ U_{xxx}(0,0,z)h^3 - 3U_{xxz}(0,0,z)h^2k + 3U_{xzz}(0,0,z)hk^2 - U_{zzz}(0,0,z)k^3 \} + \dots \\ &+ U_{0,0,z} + U_y(0,0,z)h - U_z(0,0,z)k \\ &+ \frac{1}{2} \{ U_{yy}(0,0,z)h^2 - 2U_{yz}(0,0,z)hk + U_{zz}(0,0,z)k^2 \} \\ &+ \frac{1}{6} \{ U_{yyy}(0,0,z)h^3 - 3U_{yyz}(0,0,z)h^2k + 3U_{yzz}(0,0,z)hk^2 - U_{zzz}(0,0,z)k^3 \} + \dots \\ &+ U_{0,0,z} - U_x(0,0,z)h - U_z(0,0,z)k \\ &+ \frac{1}{2} \{ U_{xx}(0,0,z)h^2 + 2U_{xz}(0,0,z)hk + U_{zz}(0,0,z)k^2 \} \\ &+ \frac{1}{6} \{ -U_{xxx}(0,0,z)h^3 - 3U_{xxz}(0,0,z)h^2k - 3U_{xzz}(0,0,z)hk^2 - U_{zzz}(0,0,z)k^3 \} + \dots \\ &+ U_{0,0,z} - U_y(0,0,z)h - U_z(0,0,z)k \\ &+ \frac{1}{2} \{ U_{yy}(0,0,z)h^2 + 2U_{yz}(0,0,z)hk + U_{zz}(0,0,z)k^2 \} \\ &+ \frac{1}{6} \{ -U_{yyy}(0,0,z)h^3 - 3U_{yyz}(0,0,z)h^2k - 3U_{yzz}(0,0,z)hk^2 - U_{zzz}(0,0,z)k^3 \} + \dots \\ &- 4U(0,0,z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4U_z(0, 0, z)k + U_{xx}(0, 0, z)h^2 + U_{yy}(0, 0, z)h^2 + 2U_{zz}(0, 0, z)k^2 + \frac{1}{6}\{-6U_{xxz}h^2k - 6U_{yyz}h^2k - 4U_{zzz}k^3\} + \dots \\
&B \simeq \alpha\{U(0, 0, z) + U_z(0, 0, z)h_r + \frac{1}{2}U_{zz}(0, 0, z)h_r^2 + \frac{1}{6}U_{zzz}h_r^3 + \dots\} \\
&\quad + \beta U(0, 0, z) \\
&\quad + \gamma\{U(0, 0, z) - U_z(0, 0, z)h_r + \frac{1}{2}U_{zz}(0, 0, z)h_r^2 - \frac{1}{6}U_{zzz}h_r^3 + \dots\} \\
&= (\alpha + \beta + \gamma)U(0, 0, z) + (\alpha - \gamma)U_z(0, 0, z)h_r + \frac{\alpha + \gamma}{2}U_{zz}(0, 0, z)h_r^2 + \dots
\end{aligned}$$

この式について $A + B$ を計算すると

$$\begin{aligned}
A + B &= (\alpha + \beta + \gamma)U(0, 0, z) + \{(\alpha - \gamma)h_r - 4k\}U_z(0, 0, z) \\
&\quad + U_{xx}(0, 0, z)h^2 + U_{yy}(0, 0, z)h^2 + U_{zz}(0, 0, z)\left\{2k^2 + \frac{\alpha + \gamma}{2}h_r^2\right\} + \frac{1}{6}(-6U_{xxz}h^2k - 6U_{yyz}h^2k - 4U_{zzz}k^3)
\end{aligned}$$

となりこの式を使って $\frac{A+B}{h^2} - \Delta U(0, 0, z)$ を計算すると、

$$\frac{A+B}{h^2} - \Delta U(0, 0, z) = \frac{1}{6h^2}(-6U_{xxz}h^2k - 6U_{yyz}h^2k - 4U_{zzz}k^3) = O\left(k + \frac{k^3}{h^2}\right).$$

$k = r_i(1 - \cos \theta_{h_\theta})$, $h = r_i \sin \theta_{h_\theta}$ を代入し整理すると誤差の部分が

$$-U_{xxz}r_i(1 - \cos \theta_{h_\theta}) - U_{yyz}r_i(1 - \cos \theta_{h_\theta}) - U_{zzz}\frac{2r_i(1 - \cos \theta_{h_\theta})^3}{3(r_i \sin \theta_{h_\theta})^2}$$

と表される。ここで $r_i(1 - \cos \theta_{h_\theta})$ についてみると

$$\begin{aligned}
|r_i| &\leq 1 \\
\cos h_\theta &= 1 - \frac{h_\theta^2}{2!} + \frac{h_\theta^4}{4!} - \dots
\end{aligned}$$

なので、

$$1 - \cos h_\theta = \frac{h_\theta^2}{2!} - \frac{h_\theta^4}{4!} + \dots = O(h^2)$$

これより誤差は $O(h^2)$ となる。したがって、

$$\frac{A+B}{h^2} + O(h^2) = \Delta U(0, 0, z)$$

である。この近似は後の数値実験の結果よりほぼ正確であることがわかる。

2.4 原点での Laplacian 差分近似

原点でも $r = 0, \sin \theta = 0$ で (2.2) の式は使えない。そこで極座標に変換する前の (2.1) の Laplacian から考える。

$$\Delta u(0, 0, 0) = u_{xx}(0, 0, 0) + u_{yy}(0, 0, 0) + u_{zz}(0, 0, 0)$$

この差分近似をとると

$$\Delta u(0, 0, 0) = \frac{u_{1,0,0} - 2u_{0,0,0} + u_{-1,0,0}}{h_x^2} + \frac{u_{0,1,0} - 2u_{0,0,0} + u_{0,-1,0}}{h_y^2}$$

$$+ \frac{u_{0,0,1} - 2u_{0,0,0} + u_{0,0,-1}}{h_z^2} + O(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$$

ただし $u_{i,j,k} = U(ih_x, jh_y, kh_z)$

$h_x = h_y = h_z = h$ とすると,

$$\Delta u(0,0,0) = \frac{6}{h^2} \left[\frac{1}{6}(u_{1,0,0} + u_{-1,0,0} + u_{0,1,0} + u_{0,-1,0} + u_{0,0,1} + u_{0,0,-1}) - u_{0,0,0} \right] + O(h^2)$$

$U_{i,j,k} := u(r_i, \theta_j, \varphi_k)$ として,

$$\Delta u(0,0,0) = \frac{6}{h_r^2} \left[\frac{1}{6}(U_{1, \frac{N_\theta}{2}, 0} + U_{1, \frac{N_\theta}{2}, \frac{N_\varphi}{4}} + U_{1, \frac{N_\theta}{2}, \frac{N_\varphi}{2}} + U_{1, \frac{N_\theta}{2}, \frac{3N_\varphi}{4}} + U_{1,0,0} + U_{1,N_\theta,0}) - U_{0,0,0} \right] + O(h_r^2)$$

2.5 陽解法

$\tau > 0$ に対して,

$$t_n := n\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\lambda_r := \frac{\tau}{h_r^2}, \quad \lambda_\theta := \frac{\tau}{h_\theta^2}, \quad \lambda_\varphi := \frac{\tau}{h_\varphi^2}$$

と定義する。

z 軸上以外では次のような差分近似が考えられる。時間微分を前進差分近似, 空間微分は中心差分近似することにより,

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n}{\tau} &= \frac{U_{i+1,j,k}^n - 2U_{i,j,k}^n + U_{i-1,j,k}^n}{h_r^2} + \frac{2}{r_i} \frac{U_{i+1,j,k}^n - U_{i-1,j,k}^n}{2h_r} \\ &+ \frac{\cot \theta_j}{r_i^2} \frac{U_{i,j+1,k}^n - U_{i,j-1,k}^n}{2h_\theta} + \frac{1}{r_i^2} \frac{U_{i,j+1,k}^n - 2U_{i,j,k}^n + U_{i,j-1,k}^n}{h_\theta^2} \\ &+ \frac{1}{r_i^2 \sin^2 \theta_j} \frac{U_{i,j,k+1}^n - 2U_{i,j,k}^n + U_{i,j,k-1}^n}{h_\varphi^2}. \end{aligned}$$

移項して整理すると,

$$\begin{aligned} U_{i,j,k}^{n+1} &= \left(1 - 2\lambda_r - \frac{2\lambda_\theta}{r_i^2} - \frac{2\lambda_\varphi}{r_i^2 \sin^2 \theta_j} \right) U_{i,j,k}^n \\ &+ \lambda_r \left[\left(1 + \frac{h_r}{r_i} \right) U_{i+1,j,k}^n + \left(1 - \frac{h_r}{r_i} \right) U_{i-1,j,k}^n \right] \\ &+ \frac{\lambda_\theta}{r_i^2} \left[\left(1 + \frac{h_\theta \cot \theta_j}{2} \right) U_{i,j+1,k}^n + \left(1 - \frac{h_\theta \cot \theta_j}{2} \right) U_{i,j-1,k}^n \right] \\ &+ \frac{\lambda_\varphi}{r_i^2 \sin^2 \theta_j} (U_{i,j,k+1}^n + U_{i,j,k-1}^n) \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N_r - 1; j = 1, 2, \dots, N_\theta - 1; k = 0, 1, \dots, N_\varphi - 1; n = 0, 1, \dots).$$

ただし, $U_{i,j,N_\varphi}^n = U_{i,j,0}^n, U_{i,j,-1}^n = U_{i,j,N_\varphi-1}^n$ と考える。

原点以外の z 軸上の点については

$$\begin{aligned} \frac{U_{0,0,i}^{n+1} - U_{0,0,i}^n}{\tau} &= \frac{1}{(r_i \sin \theta_1)^2} [U_{i,1,0} + U_{i,1,\frac{N_\varphi}{4}} + U_{i,1,\frac{N_\varphi}{2}} + U_{i,1,\frac{3N_\varphi}{4}} - 4U_{i,0,0} \\ &\quad + \alpha U_{i+1,0,0} + \beta U_{i,0,0} + \gamma U_{i+1,0,0}] \end{aligned}$$

分母を払って移項して整理すると,

$$\begin{aligned} U_{0,0,i}^{n+1} &= \frac{\lambda_r}{(i \sin \theta_1)^2} [U_{i,1,0} + U_{i,1,\frac{N_\varphi}{4}} + U_{i,1,\frac{N_\varphi}{2}} + U_{i,1,\frac{3N_\varphi}{4}} - 4U_{i,0,0} \\ &\quad + \alpha U_{i+1,0,0} + \beta U_{i,0,0} + \gamma U_{i+1,0,0}] \end{aligned}$$

ただし α, β, γ は 2.3 で定義したもの。

原点については,

$$\begin{aligned} \frac{U_{0,0,0}^{n+1} - U_{0,0,0}^n}{\tau} &= \frac{6}{h_r^2} \left[\frac{1}{6} (U_{1,\frac{N_\theta}{2},0} + U_{1,\frac{N_\theta}{2},\frac{N_\varphi}{4}} + U_{1,\frac{N_\theta}{2},\frac{N_\varphi}{2}} + U_{1,\frac{N_\theta}{2},\frac{3N_\varphi}{4}} + U_{1,0,0} + U_{1,N_\theta,0}) \right. \\ &\quad \left. - U_{0,0,0} \right] \end{aligned}$$

分母を払って移項して整理すると,

$$U_{0,0,0}^{n+1} = (1 - 6\lambda_r)U_{0,0,0}^n + \lambda_r (U_{1,\frac{N_\theta}{2},0} + U_{1,\frac{N_\theta}{2},\frac{N_\varphi}{4}} + U_{1,\frac{N_\theta}{2},\frac{N_\varphi}{2}} + U_{1,\frac{N_\theta}{2},\frac{3N_\varphi}{4}} + U_{1,0,0} + U_{1,N_\theta,0}).$$

2.6 陽解法の安定性

安定性条件は差分方程式の係数を正とするための

$$\min_{1 \leq i \leq N_r-1, 1 \leq j \leq N_\theta-1} \left(1 - 2\lambda_r - \frac{2\lambda_\theta}{r_i^2} - \frac{2\lambda_\varphi}{r_i^2 \sin^2 \theta_j} \right) \geq 0$$

ではないかと予想している。これは任意の j に対して、

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - 2\lambda_r - \frac{2\lambda_\theta}{r_1^2} - \frac{2\lambda_\varphi}{r_1^2 \sin^2 \theta_j} \\ &= 1 - \frac{2\tau}{h_r^2} - \frac{2\tau}{h_r^2 h_\theta^2} - \frac{2\tau}{h_r^2 h_\varphi^2 \sin^2 \theta_j} \\ &= 1 - \tau \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{h_r^2 h_\theta^2} + \frac{2}{h_r^2 h_\varphi^2 \sin^2 \theta_j} \right), \end{aligned}$$

すなわち,

$$\tau \leq \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{2}{h_r^2 h_\theta^2} + \frac{2}{h_r^2 h_\varphi^2 \sin^2 \theta_j} \right)^{-1} = \left(\frac{2(h_\theta^2 h_\varphi^2 \sin^2 \theta_j + h_\varphi^2 \sin^2 \theta_j + h_\theta^2)}{(h_r h_\theta h_\varphi \sin \theta_j)^2} \right)^{-1}$$

であるから、

$$\tau \leq \min_{1 \leq j \leq N_\theta - 1} \frac{(h_r h_\theta h_\varphi \sin \theta_j)^2}{2(h_\theta^2 + h_\varphi^2 \sin^2 \theta_j + h_\theta^2 h_\varphi^2 \sin^2 \theta_j)}$$

と書き直すことができる。右辺は N_r, N_θ, N_φ を決めれば定まる量であるが、 $\sin \theta_1 \simeq \theta_1 = h_\theta$ であるから、およそ

$$\frac{(h_r h_\theta h_\varphi)^2}{2(1 + h_\varphi^2 + h_\theta^2 h_\varphi^2)}$$

程度の量である。

2.7 実験結果

実際に数値計算をした結果を以下に記す。

厳密解を、

$$u(r, \theta, \varphi, t) = e^{-\mu_{01}^2 t} \sqrt{\frac{\pi}{2\mu_{01}}} j_{0.5}(\mu_{01} r) P_0^0(\cos \theta) + e^{-\mu_{11}^2 t} \sqrt{\frac{\pi}{2\mu_{11}}} j_{1.5}(\mu_{11} r) P_1^1(\cos \theta) (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

の場合に実験した。

初期値は、

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\mu_{01}}} j_{0.5}(\mu_{01} r) P_0^0(\cos \theta) + \sqrt{\frac{\pi}{2\mu_{11}}} j_{1.5}(\mu_{11} r) P_1^1(\cos \theta) (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

とした。

時刻 $t = 0.5$ まで数値実験した結果が以下ようになった。

N_r	N_θ	N_φ	τ	最大ノルム	誤差	上の誤差との比
4	6	8	1.6e-5	0.00913651	0.002003	
8	12	16	4e-6	0.00765508	0.000521559	0.256925616
16	24	32	1e-6	0.00730622	0.00017201	0.329799697

ここでの最大ノルムとは $\max_{i,j,k} |U_{i,j,k}^n|$ のことであり、誤差は $\max |U_{i,j,k}^n - u_{i,j,k}^n|$ のことである。そして n は $n\tau = 0.5$ となる n である。ここでは分割数を2倍ずつ取り、 τ を $\frac{1}{4}$ 倍にすると1段目から2段目は誤差も約 $\frac{1}{4}$ 倍になってくれた。2段目から3段目は約 $\frac{1}{3}$ 倍にはなった。

安定性については、 $N_r = 4, N_\theta = 6, N_\varphi = 8$ の時、安定条件 $\tau \leq 0.00295906$ のもと、確かめるため τ の値だけ変えていき実験した。

τ	安定性	最大ノルム	誤差
0.001	安定	0.00893935	0.00180583
0.002	安定	0.0087409	0.00160738
0.003	安定	7.38187e-05	2.1585e-05
0.0035	安定	7.07808e-05	1.98578e-05
0.0036	安定	7.0621e-05	2.02351e-05
0.0037	不安定	0.183535	0.183488
0.004	不安定	6.1369e+12	6.1369e+12

τ が 0.0037 の時、 $t = 1$ まで数値実験をすると最大ノルムの値が誤差の値とほぼ変わらない値となってしまう、解が安定でないと考えられる。

$N_r = 8, N_\theta = 12, N_\varphi = 16$ の時、安定条件 $\tau \leq 7.08928 \times 10^{-5}$ のもと、確かめるため τ の値だけ変えていき実験した。

τ	安定性	最大ノルム	誤差
7e-05	安定	0.00764234	0.000509522
7.3e-05	安定	0.00764426	0.000509132
7.4e-05	安定	0.00764102	0.000508758
7.5e-05	不安定	6.19248e+18	6.19248e+18
8e-05	不安定	nan	2.9131e-19

τ が 7.5e-05 の時、 $t = 0.5$ まで数値実験をすると最大ノルムの値が 6.19248×10^{18} となってしまう、解が安定でないと考えられる。これより予想の τ と近い値が得られた。

2.8 結論

これまでにやってきた数値実験からは大分よい結果が得られたのではないかと考えている。しかし誤差の結果のところは N_r, N_θ, N_φ を 2 倍ずつ取り、 τ の値を $\frac{1}{4}$ 倍にしたところ一回目は誤差も約 $\frac{1}{4}$ 倍になってくれたが 2 回目は誤差の値は約 $\frac{1}{3}$ 倍になってしまった。これに関してはまだ z 軸上の点 $(0, 0, z)$ と原点の近似について正確な近似ができていないような気がする。そして $N_r = 16, N_\theta = 24, N_\varphi = 32, \tau = 10^{-6}$ として実験すると計算時間が莫大にかかってしまった。これらのことについて検討しよいプログラムを作っていきたい。

付録A 空間極座標のLaplacian

空間の極座標

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

により変数を (x, y, z) から (r, θ, φ) に変換すると、 $\Delta u = -\lambda u$ は、以下のようにして導かれる。
ヤコビ行列

$$J := \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

と表され、この行列式は、

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \left((-1)^4 (-\sin \varphi) \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} + (-1)^5 \cos \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} \right) \\ &= r^2 \sin \theta \left(-\sin^2 \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} + (-1)^5 \cos \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} \right) \\ &= r^2 \sin \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &= r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

と求められる。次に、余因子行列は、

$$\begin{aligned}\tilde{J} &:= \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi & r \cos \varphi \\ r^2 \sin \theta \cos \theta & -r \sin^2 \theta & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi & r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi & r^2 \sin \theta \cos \theta \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi & -r \sin^2 \theta \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と求められる。よって、逆行列は、

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}^{-1} = J^{-1} = \frac{\tilde{J}}{|J|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \left(\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left(\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cot \theta \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{2}{r} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r} (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (\cot \theta \sin^2 \varphi - 2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
&= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
&= \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\
&\quad + \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \cot \theta \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2}{r} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r} (\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (\cot \theta \cos^2 \varphi - 2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi) \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\
&= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\
&= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (\sin \theta \cos \theta) \frac{\partial u}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

以上よりこれらを加えて、

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S u, \\
\Delta_S &:= \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\
&\quad (0 < r \leq R, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)
\end{aligned}$$

という方程式に変換される。ここで、 Δ_S は球面 Laplace 作用素と呼ばれる微分作用素である。

付録B Legendre関数

ここでは、第1章で出てきた Legendre 関数等について、より詳しく論じていく。

$$(1-t^2)V'' - 2tV' + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\ell^2}{1-t^2}\right)V = 0$$

これを Legendre の陪微分方程式と呼び、その解を Legendre の陪関数と呼ぶ。

特に $\ell = 0$ のときは、

$$L_{(\nu)}V := (1-t^2)V'' - 2tV' + \nu(\nu+1)V = 0$$

となり、これを Legendre の微分方程式と呼び、その解を Legendre 関数と呼ぶ。 ν が整数のとき、この方程式は多項式の解を持つ。これを Legendre の多項式と呼ぶ。 $\nu = 0$ のときは、

$$(1-t^2)V'' - 2tV' = \frac{1}{1-t^2} \left((1-t^2) \frac{d}{dt} \right)^2 V = 0$$

$$\left((1-t^2) \frac{d}{dt} \right)^2 V = (1-t^2) \frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{dV}{dt} \right)$$

は求積できて、一般解が、

$$(1-t^2) \frac{dV}{dt} = c \quad V = c_1 + c_2 \log \frac{1+t}{1-t}$$

とつまり、このうち多項式解は定数だけである。そこで、0 次の Legendre 多項式は 1 と定める。一般の ν に対しては、

$$\begin{aligned} (1-t^2)L_{(\nu)} &= (1-t^2)^2 \frac{d^2}{dt^2} - 2t(1-t^2) \frac{d}{dt} + \nu(\nu+1)(1-t^2) \\ &= \left\{ (1-t^2) \frac{d}{dt} - \nu t \right\} \left\{ (1-t^2) \frac{d}{dt} + \nu t \right\} + \nu^2 \\ &= \left\{ (1-t^2) \frac{d}{dt} + (\nu+1)t \right\} \left\{ (1-t^2) \frac{d}{dt} - (\nu+1)t \right\} + (\nu+1)^2 \end{aligned}$$

となる。そこで、

$$\text{上昇演算子} : T^{(\nu)} = (1-t^2) \frac{d}{dt} - (\nu+1)t$$

$$\text{下降演算子} : T_{(\nu)} = (1-t^2) \frac{d}{dt} + \nu t$$

を導入すると、

$$(1-t^2)L_{(\nu)} = T^{(\nu-1)} \circ T_{\nu} + \nu^2 \tag{B.1}$$

$$= T_{\nu+1} \circ T^{\nu} + (\nu+1)^2 \tag{B.2}$$

と書き直される。ここで、上の (B.1) の両辺に左から $T_{(\nu)}$ を施すと、

$$\begin{aligned}
T_{(\nu)} \circ (1-t^2)L_{(\nu)} &= T_{(\nu)}T^{(\nu-1)}T_{(\nu)} + \nu^2T_{(\nu)} \\
&= \{(1-t^2)\frac{d}{dt} + \nu t\}\{(1-t^2)\frac{d}{dt} - \nu t\}(1-t^2)\frac{d}{dt} + \nu t + \nu^2\{(1-t^2)\frac{d}{dt} + \nu t\} \\
&= \left[\{(1-t^2)\frac{d}{dt} + \nu t\}\{(1-t^2)\frac{d}{dt} - \nu t\} + \nu^2 \right] \{(1-t^2)\frac{d}{dt} + \nu t\} \\
&= \{T_{(\nu)} \circ T^{(\nu+1)} + \nu^2\}T_{\nu} \\
&= (1-t^2)L_{(\nu-1)}T_{(\nu)}
\end{aligned}$$

が得られ、 $T_{(\nu)}$ は $L_{(\nu)}u = 0$ の解を $L_{(\nu-1)}u = 0$ の解に写す。すなわち、

$$T_{(\nu)} : \text{Ker } L_{(\nu)} \rightarrow \text{Ker } L_{(\nu-1)}$$

となる。同様に、(B.2) の両辺に $T^{(\nu)}$ を左から施すと、

$$\begin{aligned}
T^{(\nu)} \circ (1-t^2)L_{(\nu)} &= T^{(\nu)}T_{(\nu+1)}T^{(\nu)} + (\nu+1)^2T^{(\nu)} \\
&= \{(1-t^2)\frac{d}{dt} - (\nu+1)t\}\{(1-t^2)\frac{d}{dt} + (\nu+1)t\}\{(1-t^2)\frac{d}{dt} - (\nu+1)t\} \\
&\quad + (\nu+1)^2\{(1-t^2)\frac{d}{dt} - (\nu+1)t\} \\
&= \left[\{(1-t^2)\frac{d}{dt} - (\nu+1)t\}\{(1-t^2)\frac{d}{dt} + (\nu+1)t\} + (\nu+1)^2 \right] \{(1-t^2)\frac{d}{dt} - (\nu+1)t\} \\
&= \{T_{(\nu+1)} \circ T^{(\nu)} + (\nu+1)^2\}T^{\nu} \\
&= (1-t^2)L_{(\nu+1)}T^{(\nu)}
\end{aligned}$$

よって、

$$T^{(\nu)} : \text{Ker } L_{(\nu)} \rightarrow \text{Ker } L_{(\nu+1)}$$

特に、 $L_{(0)}$ の解に $T_{(0)}, T_{(1)}, \dots$ を順次に施していくことにより、 $L_{(\nu)}u = 0$ の解が決定される。そのうち多項式の解は帰納法により、

$$P_{(\nu)}(t) = \frac{1}{2^{\nu}\nu!} \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}(t^2-1)^{\nu} \quad (\text{Rodrigues の公式})$$

と表現される。

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \\
P_4(t) &= \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}, \quad P_5(t) = \frac{63}{8}t^5 - \frac{35}{4}t^3 + \frac{15}{8}t, \quad \dots
\end{aligned}$$

次に、 ℓ が一般のときの方程式を考える。

$$L_{(\nu)}^{(\ell)} := (1-t^2)\frac{d^2}{dt^2} - 2t\frac{d}{dt} + \nu(\nu+1) - \frac{\ell^2}{1-t^2} = 0$$

とおくとき、

$$(1-t^2)^{\ell/2} \frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}} \circ L_{(\nu)} = L_{(\nu)}^{(\ell)} \circ (1-t^2)^{\ell/2} \frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}}$$

という関係で Legendre の微分方程式と結ばれている。よって、Legendre 関数に演算子

$$(1-t^2)^{\ell/2} \frac{d^\ell}{dt^\ell}$$

を施せば、Legendre 陪関数が得られる。特に多項式から来る解は

$$P_\nu^\ell(t) := (1-t^2)^{\ell/2} \frac{d^\ell}{dt^\ell} P_\nu(t) \quad (\ell = 0, 1, \dots, \nu)$$

である。

$$P_0^0(t) = 1,$$

$$P_1^1(t) = (1-t^2)^{1/2}, \quad P_2^1(t) = 3(1-t^2)^{1/2}t, \quad P_2^2(t) = 3(1-t^2),$$

$$P_3^1(t) = \frac{3}{2}(1-t^2)^{1/2}(5x^2 - 1), \quad P_3^2(t) = 15(1-t^2)t, \quad P_3^3(t) = 15(1-t^2)^{3/2},$$

$$P_4^1(t) = \frac{5}{2}(1-t^2)^{1/2}(7t^3 - 3t), \quad P_4^2(t) = \frac{15}{2}(1-t^2)(7t^2 - 1), \quad P_4^3(t) = 105(1-t^2)^{3/2}t, \quad P_4^4(t) = 105(1-t^2)^2.$$

付 録 C 実験に使用したプログラム

C.1 GSL について

以下のプログラムでは、GSL (GNU Scientific Library, <http://www.gnu.org/software/gsl>) を用いて、Bessel 関数や Legendre 陪関数の値を計算している。Knoppix では `sudo apt-get install libgsl0-dev` でインストールできる。

`double gsl_sf_bessel_Jnu(int nu, double x)` は ν 次の Bessel 関数 $J_\nu(x)$ の値を計算し、`double gsl_sf_legendre_Plm(int l, int m, double x)` は $m \geq 0, \ell \geq m, |x| \leq 1$ について Legendre 陪関数 $P_\ell^m(x)$ の値を計算する。

C.2 ベッセル関数の零点を求めるプログラム

Bessel 関数の零点を 10 個求めて、表示するプログラムである。

```
/*
 * find_Bessel_roots.c --- Bessel 関数の零点を求める。
 * コンパイルするには
 * gcc -o find_Bessel_roots find_Bessel_roots.c -lgsl -lgslcblas -lm
 * ./find_Bessel_roots
 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <gsl/gsl_sf_bessel.h>

void print(int N, double n, double *a)
{
    int i;
    printf(" k      myu%f,k      J%f(myu%fk)\n",n,n,n);
    for(i=1;i<=N;i++){
        printf("%3d %25.18e %15e %f\n", i-1,a[i],gsl_sf_bessel_Jnu(n,a[i]),a[i]-a[i-1]);
    }
}
```

```

int main(int argc,char **argv)
{
    int i,j,maxitr =100;
    double a,b,c,eps;
    double fa,fb,fc;
    double n;
    int num_of_roots;
    double *roots;

    if(argc ==3){
        n=atof(argv[1]);
        num_of_roots =atoi(argv[2]);
    }

    else{
        printf("Jn no saisyo no N ko no ZEROten wo motomeru\n");
        printf("n=");
        scanf("%f",&n);
        printf("N=");
        scanf("%d",&num_of_roots);
    }

    if((roots = malloc(sizeof(double)*(num_of_roots+1)))==NULL){
        fprintf(stderr,"cannot allocate memory\n");
        exit(1);
    }
    a=0.1; b=0.2; eps =5e-16;
    roots[0]=0;
    fa=gsl_sf_bessel_Jnu(n,a);
    fb=gsl_sf_bessel_Jnu(n,b);
    for(i=1;i<=num_of_roots;i++){
        while (fa*fb>0){
            a=b;
            fa=fb;
            b+=0.1;
            fb=gsl_sf_bessel_Jnu(n,b);
        }
        for(j=0;j<=maxitr && (b-a)/a>eps;j++){
            c=(a+b)/2;
            fc=gsl_sf_bessel_Jnu(n,c);

```

```

    if(fc==0.0)
        break;
    else if (fa*fc<=0.0){
        b=c;
        fb=fc;
    }
    else {
        a=c;
        fa=fc;
    }
}

if(j >= maxitr){
    fprintf(stderr,"%d banmedesippai\n",i+1);
    print(i,n,roots);

    exit(1);

}
roots[i]=a;
a=b;
b=a+0.1;
fa=gsl_sf_bessel_Jnu(n,a);
fb=gsl_sf_bessel_Jnu(n,b);
}
print(num_of_roots,n,roots);
return 0;
}

```

実行すると零点を小さいほうから指定した個数分 (最大 10 個まで) 求めてくれる。以下は $j_{0.5}$ と $j_{1.5}$ のときの零点を小さいほうから 10 個求めた結果である。

```

./find_Bessel_roots 0.5 10
k          myu0.500000,k          J0.500000(myu0.500000k)
0  3.141592653589792228e+00  4.549850e-16  3.141593
1  6.283185307179586232e+00 -5.911244e-17  3.141593
2  9.424777960769379348e+00  5.154721e-17  3.141593
3  1.256637061435917069e+01 -6.074903e-16  3.141593
4  1.570796326794896380e+01  4.429237e-16  3.141593
5  1.884955592153875870e+01 -6.249765e-17  3.141593
6  2.199114857512854826e+01  7.389512e-16  3.141593

```

```

7 2.513274122871834493e+01 -1.508680e-16 3.141593
8 2.827433388230813449e+01 7.554276e-16 3.141593
9 3.141592653589793116e+01 -5.035413e-17 3.141593

./find_Bessel_roots 1.5 10
k      myu1.500000,k      J1.500000(myu1.500000k)
0 4.493409457909063320e+00 3.143051e-16 4.493409
1 7.725251836937706784e+00 -1.471298e-16 3.231842
2 1.090412165942889722e+01 6.574297e-16 3.178870
3 1.406619391283147280e+01 -4.139066e-17 3.162072
4 1.722075527193076638e+01 3.957720e-16 3.154561
5 2.037130295928756141e+01 -3.300304e-16 3.150548
6 2.351945249868900589e+01 1.052065e-16 3.148150
7 2.666605425881267166e+01 -2.968966e-16 3.146602
8 2.981159879089295117e+01 1.162511e-15 3.145545
9 3.295638903982246859e+01 -8.883510e-16 3.144790

```

C.3 陽解法で解を求めるプログラム

陽解法を用いたプログラムである。このプログラムでは上のプログラムで零点を求めてその値を $\mu_{11} = 4.49340945790906332$ として使用している。

```

#define MAKEMPEG
#define FNAME "disk/disk%05d.jpg"
/*
 * heat25d-disk-e.c --- 球での熱方程式を陽解法で解く。
 * コンパイルするには
 * gcc -c call_gnuplot.c
 * ccmg heat25d-disk-e.c call_gnuplot.o -lgsl -lgslcblas -lm
 * ./heat25d-disk-e
 */

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <gsl/gsl_sf_bessel.h>
#include <gsl/gsl_sf_legendre.h>
/* to use matrix, new_matrix() */
#include <matrix.h>

```

```

#include "call_gnuplot.h"

double u0(double, double, double);
double exactu(double, double, double,double);
double maxnorm(int, int, int, double u[50][50][50]);
double pi;
double u[50][50][50], newu[50][50][50];
int main()
{
    int Nr, Nt, Np, i, j, k, n, skip, nMax, id;
    double hr, ht, hp, ri, ri2, theta_j, theta_j2, phi_k, M, ex;
    double lambda_r, lambda_t, lambda_p, lambda;
    double tau, Tmax, t, dt, s;

    matrix u2;

    char label[100], fname[100];
    /* 次の変数を 0 にすると原点だけで誤差を計算する。
     * 0 以外の値 (例えば 1) にすると球全体で誤差を計算する。
     */
    int zentai = 1;

    pi = 4.0 * atan(1.0);
    /* 分割数を決定 */
    printf("Nr, Nt(2 の倍数), Np(4 の倍数): ");
    scanf("%d %d %d", &Nr, &Nt, &Np);
    if ((u2 = new_matrix(Nr + 1, Np + 1)) == NULL) {
        fprintf(stderr, "配列 u を確保できませんでした。");
        exit(1);
    }

    /* 最終時刻の決定 */
    printf("Tmax: ");
    scanf("%lf", &Tmax);

    /* 刻み幅 */
    hr = 1.0 / Nr;
    ht = pi / Nt;

```

```

hp = 2 * pi / Np;

/* 時刻幅の決定 */
printf(" ( %g): ",
       0.5 * (hr * hr * ht * ht * hp * hp) / (1 + hp * hp + hp * hp * ht * ht));
scanf("%lf", &tau);

/* r, */
lambda_r = tau / (hr * hr);
lambda_t = tau / (ht * ht);
lambda_p = tau / (hp * hp);
lambda = lambda_r + lambda_t + lambda_p;

printf(" =%g になりました。 \n", lambda);

/* 結果を出力する時間間隔を決定 */
printf(" t( %g): ", tau);
scanf("%lf", &dt);
if (dt < tau) {
    dt = tau;
    printf(" =%g\n", dt);
}
skip = rint(dt / tau);

/* GNUPLOT の準備 */
#ifdef MAKEMPEG
    open_gnuplot2();
#else
    open_gnuplot();
#endif

/* 初期値の設定 */
for (i = 0; i <= Nr; i++) {
    ri = i * hr;
    for (j = 0; j <= Nt; j++) {
        theta_j = j * ht;
        for (k = 0; k <= Np; k++){
            phi_k = k * hp;

```

```

        u[i][j][k] = u0(ri, theta_j, phi_k);
    }
}

sprintf(label, "t=%g", 0.0);
#ifdef MAKEMPEG
    id = 0;
    sprintf(fname, FNAME, id++);
    disk2(Nr, Np, u2, label, fname);
#else
    disk(Nr, Np, u2, label);
#endif

/* ループ */
nMax = rint(Tmax / tau);
for (n = 1; n <= nMax; n++) {
    for (i = 1; i < Nr; i++) {
        ri = i * hr;
        ri2 = ri * ri;
        for (j = 1; j < Nt; j++) {
            theta_j = j * ht;
            theta_j2 = (sin(theta_j)) * (sin(theta_j));
            for(k = 0; k < Np; k++){
                int km1 = k - 1;
                if (km1 == -1)
                    km1 = Np - 1;
                newu[i][j][k] = (1.0 - 2 * lambda_r - 2 * lambda_t / (ri2)
- 2 * lambda_p / ((ri2) * (theta_j2))) * u[i][j][k]
                + lambda_r * (u[i + 1][j][k] + u[i - 1][j][k])
                + lambda_r * hr / (ri) * (u[i + 1][j][k] - u[i - 1][j][k])
                + lambda_t / (ri2) * (u[i][j + 1][k] + u[i][j - 1][k])
                + lambda_t * ht * (cos(theta_j) / ( 2 * ri2 * sin(theta_j)))
                * (u[i][j + 1][k] - u[i][j - 1][k])
                + lambda_p / ((ri2) * (theta_j2)) * (u[i][j][k + 1] + u[i][j][km1]);
            }
        }
    }
}
for (i = 1; i < Nr; i++)

```

```

    for (j = 0; j <= Nt; j++)
        newu[i][j][Np] = newu[i][j][0];

/* 軸での値 */
for(i = 1; i < Nr; i++){
    ri = i * hr;
    ri2 = ri * ri;
    newu[i][0][0]=lambda_r/(i*i*sin(ht)*sin(ht))*(u[i][1][0]+u[i][1][Np/4]
+u[i][1][Np/2]+u[i][1][3*Np/4]-4*u[i][0][0]
+ri*(1-cos(ht))/(hr*hr)*(2*hr+ri*(3*cos(ht)-1))*u[i+1][0][0]
-2*ri2/(hr*hr)*(1-cos(ht))*(3*cos(ht)-1)*u[i][0][0]
+ri*(1-cos(ht))/(hr*hr)*(ri*(3*cos(ht)-1)-2*hr)*u[i-1][0][0])+u[i][0][0];

    newu[i][Nt][0]=lambda_r/(i*i*sin(ht)*sin(ht))*(u[i][Nt-1][0]
+u[i][Nt-1][Np/4]+u[i][Nt-1][Np/2]+u[i][Nt-1][3*Np/4]-4*u[i][Nt][0]
+ri*(1-cos(ht))/(hr*hr)*(2*hr+ri*(3*cos(ht)-1))*u[i+1][Nt][0]
-2*ri2/(hr*hr)*(1-cos(ht))*(3*cos(ht)-1)*u[i][Nt][0]
+ri*(1-cos(ht))/(hr*hr)*(ri*(3*cos(ht)-1)-2*hr)*u[i-1][Nt][0])+u[i][Nt][0];
}

for(i = 1;i < Nr; i++){
    for(k = 1; k < Np; k++){
        newu[i][0][k] = newu[i][0][0];
        newu[i][Nt][k] = newu[i][Nt][0];
    }
}

/* Dirichlet 境界条件 */
for (j = 0; j <= Nt; j++)
    for (k = 0; k <= Np; k++)
        newu[Nr][j][k] = 0.0;

/* 原点での値 */

newu[0][0][0] = 6*lambda_r*(1.0/6*(u[1][Nt/2][0]+u[1][Nt/2][Np/4]
+u[1][Nt/2][Np/2]+u[1][Nt/2][3*Np/4]+u[1][0][0]+u[1][Nt][0])

```

```

        - u[0][0][0]) + u[0][0][0];
for (j = 0; j <= Nt; j++)
    for (k = 0; k <= Np; k++)
        newu[0][j][k] = newu[0][0][0];

/* 値の更新 */
for (i = 0; i <= Nr; i++)
    for (j = 0; j <= Nt; j++)
        for (k = 0; k <= Np; k++)
            u[i][j][k] = newu[i][j][k];

t = tau * n;

/* 誤差を測る */
if (zentai) {
    M = 0.0;
    for (i = 0; i <= Nr; i++) {
        ri = i * hr;
        for (j = 0; j <= Nt; j++) {
            theta_j = j * ht;
            for (k = 0; k <= Np; k++){
                double e;
                phi_k = k * hp;
                e = fabs(exactu(ri, theta_j, phi_k, t) - u[i][j][k]);
                if (e > M)
                    M = e;
            }
        }
    }

    printf("n=%d, norm=%g, t=%g, 誤差=%g\n",
           n, maxnorm(Nr + 1, Nt + 1, Np + 1, u), t, M);
}
else {
    ex = exactu(0.0, 0.0, 0.0, t);
    M = fabs(u[0][0][0] - ex);
    printf("n=%d, norm=%g, t=%g, exactu=%g , 誤差=%g\n",
           n, maxnorm(Nr + 1, Nt + 1, Np + 1, u), t, ex, M);
}

```

```

}

/* t の整数倍の時刻ではグラフを描く */
if (n % skip == 0) {
    t = tau * n;

    for(i = 0; i <= Nr; i++)
        for(k = 0; k <= Np; k++)
            u2[i][k] = u[i][Nt/2][k];
    sprintf(label, "t=%g", t);

#ifdef MAKEMPEG
    printf("図を記録する: id=%d\n",id);
    sprintf(fname, FNAME, id++);
    disk2(Nr, Np, u2, label, fname);
#else
    disk(Nr, Np, u2, label);
#endif
}
}

close_gnuplot();

return 0;
}

/* 厳密解を計算する関数 */

#define mu01 (pi)
#define mu11 (4.49340945790906332)

double exactu(double r, double theta, double phi, double t)
{
    if(r==0)
        return exp(-mu01*mu01*t) * (gsl_sf_legendre_Pl0(0,0,cos(theta)))
            + exp(- mu11 * mu11 * t)*(gsl_sf_legendre_Pl1(1,1,cos(theta)))
            *(cos(phi)+sin(phi));
    else

```

```

return exp(- mu01 * mu01 * t) * (sqrt(pi/(2*mu01*r))
    *(gsl_sf_bessel_Jnu(0.5,mu01*r))*(gsl_sf_legendre_Plm(0,0,cos(theta))))
+ exp(- mu11 * mu11 * t) * (sqrt(pi/(2*mu11*r))
    *(gsl_sf_bessel_Jnu(1.5,mu11*r))*(gsl_sf_legendre_Plm(1,1,cos(theta))))
    *(cos(phi)+sin(phi));
}

/* 初期データ */
double u0(double r, double theta, double phi)
{

return exactu(r,theta,phi,0);
}

double maxnorm(int m, int n, int p, double u[50][50][50])
{
int i, j, k, i0, j0, k0;
double tmpmax, absu;
i0 = 0;
j0 = 0;
k0 = 0;
tmpmax = fabs(u[0][0][0]);
for (i = 0; i < m; i++)
for (j = 0; j < n; j++)
for (k = 0; k < p; k++)
if ((absu = fabs(u[i][j][k])) > tmpmax) {
tmpmax = absu;
i0 = i;
j0 = j;
k0 = k;
}
printf("(i,j,k)=(%d,%d,%d)", i0, j0, k0);
return tmpmax;
}

```

関連図書

- [1] 遠藤洋一, 高木章裕, 内藤達也, 円盤領域における熱方程式の研究, 1998 年度桂田研卒業研究レポート,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/1998-endou-takagi-naitou.pdf>
(1999 年 3 月).
- [2] 岡田俊宣, 円盤・円柱領域における熱方程式に対する差分法, 2004 年度桂田研卒業研究レポート,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/open/2004-okada.pdf> (2005 年 2 月).
- [3] 桂田祐史, 解析概論 I 講義ノート,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaisekigairon-1/pdf/textbook1-2002-full.pdf> (~ 2002).
- [4] 桂田祐史, 応用解析 II 講義ノート,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/pdf2006.pdf> (1997~).
- [5] 桂田祐史, 発展系の数値解析,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-0.pdf> (1997~).
- [6] 桂田祐史, 熱方程式に対する差分法 I 区間における熱方程式,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-1.pdf> (1998~).
- [7] 桂田祐史, 熱方手式に対する差分法 II 円盤領域, 円柱領域, 球における熱方程式,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-2.pdf> (1998~).
- [8] 桂田祐史, Laplacian と極座標,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/polar-laplace.pdf> (2007 年 2 月 24 日).
- [9] 金子晃, 偏微分方程式入門, 東京大学出版会 (1998).
- [10] 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論 増訂版改版, 岩波書店 (1983)
- [11] 藤田宏, 池部晃生, 犬井鉄郎, 高見穎郎, 数理物理に現われる偏微分方程式 I(岩波講座 基礎数学), 岩波書店 (1977).
- [12] 藤田宏, 三訂版 応用数学, 放送大学出版会 (2000).
- [13] 山本哲郎, 数値解析入門 [増訂版], サイエンス社 (2003).

- [14] 吉原健治, 3次元円柱領域における熱方程式・Laplace 方程式の厳密解について, 2004年度桂田研卒業研究レポート,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/open/2004-yoshiwara.pdf> (2005年2月).