2004年度卒業研究レポート

3次元円柱領域における熱方程式・Laplace方程式の厳密解について

明治大学理工学部数学科
吉原 健治

2005年2月28日

目 次

第1章　序

この研究の目標は桂田研の先輩達のレポートを読み進め、Bessel 関数, 2次元円盤領域の厳密解の勉強を通して、3次元円柱領域の熱方程式,Laplace 方程式の厳密解を求めていくことである。

これは研究を通して感じたことだが、2次元円盤領域の厳密解については本を調べれば容易く見つけることができたが、3次元になると見つけるのは大変だった。Laplace 方程式に至っては見つけることさえできなかった。

また、今回の研究ではプログラムを作り数値実験を行うまでには至らなかったが、後に3次元での数値実験を行うときやLaplace 方程式の厳密解について調べたいときにはこの研究の内容を参考にして貰えれば嬉しく思う。

参考文献の中では主に Bessel 関数については [1] が、3次元での勉強には [3],[4] がお勧めであるので、興味を持ち勉強する際にはそちらを参考にして欲しい。

Bessel 関数については特殊関数だけあって、あまり聞きなれない人が多いかもしれない。私もこの研究を通して初めて勉強したのだが、意外に奥が深く正直なところまだすべてを勉強できてはいない。Bessel 関数を勉強する機会はあまり無いと思うので、このレポートを読んで Bessel 関数について少しでも興味を持って貰えたら幸いである。

第2章　熱方程式の厳密解

2.1　Bessel関数

この節の内容についてはボウマン [1] を参考にした。

ここでは、円盤領域・円柱領域の厳密解を考えていく上で現れる Bessel 関数について述べる。

2.1.1　Besselの方程式とその基本解

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (\alpha\ \text{:実定数}) \tag{2.1}$$

(2.1) の形をした方程式を Bessel の方程式という。(2.1) は特異点 $x = 0$ を持つので、その特解を一般化されたベキ級数

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_0 \neq 0) \tag{2.2}$$

の形で求める。

まず、(2.2) を微分して y' と y'' を求めると、

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k) x^{s+k-1}, \tag{2.3}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)(s+k-1) x^{s+k-2} \tag{2.4}$$

となる。この (2.3) と (2.4) を (2.2) と共に (2.1) に代入すると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (s+k)(s+k-1) x^{s+k} + a_k (s+k) x^{s+k} + a_k (x^2 - \alpha^2) x^{s+k} \right) = 0, \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \left(s + k^2 - \alpha^2 \right) x^{s+k} + a_k x^{s+k+2} \right) = 0, \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\left(s+k^2-\alpha^2\right)x^{s+k}\right)+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{s+k}=0. \tag{2.7}$$

(2.7) の第 1 項の級数を展開して第 2 項と合わせると、

$$(s^2-\alpha^2)a_0x^s+\left(s+1^2-\alpha^2\right)a_1x^{s+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\left(s+k^2-\alpha^2\right)a_k+a_{k-2}\right)x^{s+k}=0. \tag{2.8}$$

ここで (2.8) の x の (ベキ級数の) 係数をそれぞれ 0 とおくと、

$$s^2-\alpha^2=0, \tag{2.9}$$

$$\left(s+1^2-\alpha^2\right)a_1=0, \tag{2.10}$$

$$\left(s+k^2-\alpha^2\right)a_k+a_{k-2}=0 \quad (k=2,3,\cdots). \tag{2.11}$$

(2.9) より、$s=\pm\alpha$ となる。

そこで、まず $s=\alpha$ (α:正の定数) の場合を考える。すると、(2.10) より $(2\alpha+1)a_1=0$ となり、α は正の定数だから $\alpha\neq\dfrac{1}{2}$ なので、

$$a_1=0. \tag{2.12}$$

また、(2.11) より $(2\alpha k+k^2)a_k+a_{k-2}=0$ となり、$\alpha\neq-\dfrac{k}{2}$ $(k=2,3,\cdots)$ より、

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2\alpha+k)} \quad (k=2,3,\cdots). \tag{2.13}$$

そこで (2.12) より $a_3=-\dfrac{a_1}{3(2\alpha+3)}=0$, $a_5=-\dfrac{a_3}{5(2\alpha+5)}=0,\cdots$ となり、奇数番号の係数は 0 となる。よって、

$$a_{2k+1}=0 \quad (k=0,1,\cdots) \tag{2.14}$$

となる。

偶数番号は k を $2k$ と置き換えて考えると、

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2k(2\alpha+2k)}=-\frac{a_{2k-2}}{2^2k(\alpha+k)} \quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.15}$$

となるので、$a_2=-\dfrac{a_0}{2^2(\alpha+1)}, a_4=\dfrac{a_0}{2^22^2(\alpha+1)(\alpha+2)2}, a_6=-\dfrac{a_0}{2^22^22^2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)2\times 3},\cdot$ となる。

こうして、偶数番号の係数は、

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)k!} \tag{2.16}$$

となる。(2.1) は線形同次方程式であるから a_0 は自由に選べる。そこで、a_0 を

$$a_0 = \frac{1}{2\alpha\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.17}$$

ととることとする。ここで $\Gamma(\alpha)$ は Γ 関数で、

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx \quad (\alpha > 0) \tag{2.18}$$

と定義される。そこで以後使用する Γ 関数の性質をいくつか述べておく。

定理１

任意の正の α に対し、

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{2.19}$$

が成り立つ。(証明は $\Gamma(\alpha+1)$ を部分積分すればできるので、省略する。)

定理２

任意の自然数 n に対し、

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{2.20}$$

が成り立つ。(証明は省略する。)

(2.17) から (2.16) は

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)k!\Gamma(\alpha+1)}$$

となる。更に、(2.19) を繰り返し用いると、

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\alpha}k!\Gamma(\alpha+k+1)} \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.21}$$

となる。そして、この a_{2k}, a_{2k+1} を (2.2) に代入すると、

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \tag{2.22}$$

となり、Bessel の方程式の特解が得られる。この特解 $J_\alpha(x)$ を α 次の第１種 Bessel 関数という。

次に (2.22) が任意の x に対して収束することを示す。そこで、ダランベールの判定法を用いる。その時に (2.22) の収束半径を求めるが、そこで次の定理を用いる。

定理

$\sum a_n x^n$ において

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \rho \tag{2.23}$$

があれば、ρ は $\sum a_n x^n$ の収束半径である。
($\rho = 0$ のときは、すべての $x \neq 0$ について発散する。)
($\rho = \infty$ のときは、すべての $x \neq 0$ についてダランベールの判定法により $\sum a_n x^n$ は収束する。)

そこで $J_\alpha(x)$ の係数を

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}$$

として $J_\alpha(x)$ の収束半径を求めると、

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| &= |-(k+1)(\alpha+k+1)| \\ &= +\infty\end{aligned}$$

となり、ダランベールの判定法より $J_\alpha(x)$ は任意の x に対して収束する。
次に $s = -\alpha$ と考えた場合、(2.10) より

$$(-2\alpha+1)a_1 = 0 \tag{2.24}$$

となり、(2.11) より

$$k(-2\alpha+k)a_k = -a_{k-2} \quad (k = 2, 3, \cdots) \tag{2.25}$$

となる。ここで、$\alpha \neq \dfrac{k}{2} \quad (k = 2, 3, \cdots)$ ならば、

$$a_1 = 0, \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(-2\alpha+k)} \quad (k = 2, 3, \cdots)$$

となり、先ほどと同様に計算をすれば、

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)} \tag{2.26}$$

が求まる。($J_\alpha(x)$ の計算のときに、a_0 を $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\alpha}\Gamma(-\alpha+1)}$ とおいて計算すればよい。) 収束性についても同様の計算で示せる。

$\alpha = \dfrac{k}{2} \quad (k = 1, 3, \cdots)$ の時、奇数番号で一箇所割れない部分があるが、$a_k = 0$ とすれば奇数番号については、

$$a_{2j+1} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる。

偶数番号については特に影響が無いので、

$$a_{2j} = \frac{2j-2}{2^2 j(-\alpha + j)} \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

となり、同様の計算で $J_{-\alpha}(x)$ が求まる。

また、$\alpha = \dfrac{k}{2} \quad (k = 2, 4, \cdots)$ の時は、

$$a_{k-2} = 0$$

となり、a_{k-2} 以前の偶数番号についてはすべて 0 となってしまう。そこで、0 でない場所から始める為に、$k = 2\alpha + m$ とおいて考える。(2.8)〜(2.11) を $k = 2\alpha + m$ とおくと、

$$\begin{aligned} y &= x^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2\alpha+m} x^{2\alpha+m} \\ &= x^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2\alpha+m} x^{m} \quad (a_{2\alpha} \neq 0) \end{aligned}$$

より、

$$(2\alpha + 1) a_{2\alpha+1} = 0, \tag{2.27}$$

$$m(2\alpha + m) a_{2\alpha+m} = -a_{2\alpha+m-2} \quad (m = 2, 3, \cdots) \tag{2.28}$$

となる。

奇数番号については (2.27) より、

$$a_{2\alpha+2m-1} = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{2.29}$$

偶数番号については (2.28) より、

$$a_{2\alpha+2m} = \frac{(-1)^m a_{2\alpha}}{2^{2m} m! (\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)} \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{2.30}$$

となる。そこで、

$$a_{2\alpha} = \frac{(-1)^\alpha}{2^\alpha \alpha!}$$

とおくと、

$$a_{2\alpha+2m} = \frac{(-1)^{m+\alpha}}{2^{2m+\alpha} m! \Gamma(\alpha+m+1)} \quad (m = 0, 1, \cdots) \tag{2.31}$$

となる。(2.29),(2.31) より、

$$\begin{aligned} J_{-\alpha}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+\alpha} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}}{m! \Gamma(\alpha+m+1)} \\ &= (-1)^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}}{m! \Gamma(\alpha+m+1)} \\ &= (-1)^\alpha J_\alpha(x) \end{aligned} \tag{2.32}$$

よって、α が自然数のとき、$J_{-\alpha}(x)$ と $J_\alpha(x)$ は線形従属である。以上より、

(i) α が整数でない $\Rightarrow$ $J_\alpha(x)$ と $J_{-\alpha}(x)$ は線形独立である。(互いに異なるベキから始まっているため)
$(ii)\alpha$ が整数 $\Rightarrow$ $J_\alpha(x)$ と $J_{-\alpha}(x)$ は線形従属である。

このため、α が整数 n の時、Bessel の方程式の一般解を求めるためには、$J_\alpha(x)$ と線形独立な特解がもう一つ必要となる。そのために、新しい関数を

$$Y_\alpha(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \quad (\alpha > 0, \quad \alpha \neq 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.33}$$

と定義する。$Y_\alpha(x)$ は $J_\alpha(x)$ と $J_{-\alpha}(x)$ の線形結合より、(2.1) の解である。この $Y_\alpha(x)$ を第二種 Bessel 関数という。

α が整数のとき、$Y_\alpha(x)$ は不定形となるが α を整数に近づく極限と考えれば、$Y_\alpha(x)$ は (2.1) の解より、

$$Y_n(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.34}$$

と定義する。$Y_n(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= \lim_{\alpha\to n}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \\
&= \lim_{\alpha\to n}\frac{-\pi J_\alpha(x)\sin\alpha\pi + \dfrac{\partial J_\alpha(x)}{\partial\alpha}\cos\alpha\pi - \dfrac{\partial J_{-\alpha}(x)}{\partial\alpha}}{\pi\cos\alpha\pi} \quad \text{(ロピタルの定理を使用)} \\
&= \frac{(-1)^n\left(\dfrac{\partial J_\alpha(x)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n} - \left(\dfrac{\partial J_{-\alpha}(x)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n}}{(-1)^n\pi}. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

そこで、$\dfrac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha}$ を求めると、

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

より、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha} &= \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\log\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&- \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&= J_\alpha(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}.
\end{aligned}$$

よって、

$$\left(\frac{\partial J_\alpha(x)}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n} = J_\alpha(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \qquad (2.36)$$

次に $\dfrac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha}$ を求める。そこで、$J_{-\alpha}(x)$ を

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)} + \sum_{k=n}^\infty\frac{(-1)^k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)} \qquad (2.37)$$

と変形する ($n=0$ の時は第 1 項はなし)。そこで、Γ 関数の公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

を用いる。上記の式で x に $(\alpha-k)$ を代入すると、

$$\Gamma(\alpha-k)\Gamma(1-(\alpha-k))=\frac{\pi}{\sin(\alpha-k)\pi}$$

となるので、

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha+k+1)}=\frac{\sin(\alpha-k)\pi}{\pi}\Gamma(\alpha-k) \tag{2.38}$$

が得られる。ここで、$\sin(\alpha-k)\pi=(-1)^k\sin\alpha\pi$ より、(2.38) は

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha+k+1)}=\frac{(-1)^k\sin\alpha\pi}{\pi}\Gamma(\alpha-k) \tag{2.39}$$

となる。(2.39) を (2.37) に用いると、

$$J_{-\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{-\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}}{k!\Gamma(-\alpha+k+1)}$$

となる。すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha} &= -J_{-\alpha}(x)\log\left(\frac{x}{2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\Gamma'(\alpha-k)+\Gamma(\alpha-k)\cos\alpha\pi\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}\\ &+ \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(-\alpha+k+1)}\frac{\Gamma'(-\alpha+k+1)}{\Gamma(-\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n} &= -J_{-\alpha}(x)\log\left(\frac{x}{2}\right)+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}\\ &+ \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(-\alpha+k+1)}\frac{\Gamma'(-\alpha+k+1)}{\Gamma(-\alpha+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}\end{aligned}$$

となる。更に変形すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=n} &= -(-1)^nJ_n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right)+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\alpha}\\ &+ (-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\end{aligned}$$

を得る。(2.36),(2.40) を $Y_n(x)$ に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\pi Y_n(x) &= J_n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\
&+ J_n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\
&= 2J_n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&- \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.
\end{aligned}
$$

この式を更に変形していくために、まず $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ を微分する。

$$
\begin{aligned}
\Gamma'(x+1) &= (x\Gamma(x))' \\
&= \Gamma(x)+x\Gamma'(x) \\
&= \frac{\Gamma(x+1)}{x}+x\Gamma'(x)
\end{aligned}
$$

上記の式より、

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} &= \frac{1}{x}+\frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x+1)} \\
&= \frac{1}{x}+\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\
&= \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{\Gamma'(x-1)}{\Gamma(x-1)} \\
&= \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\cdots+\frac{1}{1}+\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}=\phi(l), \quad \gamma=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=0.57721\cdots \quad (\text{オイラー定数})
$$

とおくと、

$$
\frac{\Gamma'(l+1)}{\Gamma(l+1)}=\phi(l)+\gamma \tag{2.40}
$$

となる。(2.40) を用いると、

$$
\begin{aligned}
\pi Y_n(x) &= 2J_n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&- \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\phi(k)+\gamma+\phi(n+k)+\gamma\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\
&= 2\left(\log\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma\right)J_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&- \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\phi(k)+\phi(n+k)\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

となる (ただし、$n=0$ のとき右辺の第 2 項はない)。

　ここで、$Y_n(x)$ の収束性について考える。第 1 項の収束性については示してあり、第 2 項については明らか。これより第 3 項について考える。そこで第 3 項の係数部分を、

$$
b_k = \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\phi(k)+\phi(n+k)\right)
$$

とおいて収束半径を求めると、

$$
\begin{aligned}
\frac{b_k}{b_{k+1}} &= \frac{(-1)^k\left(\phi(k)+\phi(n+k)\right)}{k!(n+k)!}\frac{(k+1)!(n+k+1)!}{(-1)^{k+1}\left(\phi(k+1)+\phi(n+k+1)\right)} \\
&= \left(-(k+1)(n+k+1)\right)\frac{\phi(k)+\phi(n+k)}{\phi(k+1)+\phi(n+k+1)}
\end{aligned}
$$

そこで、

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi(k)+\phi(n+k)}{\phi(k+1)+\phi(n+k+1)} &= \frac{\phi(k)+\phi(n+k)}{\phi(k)+\dfrac{1}{k+1}+\phi(n+k)+\dfrac{1}{n+k+1}} \\
&= 1+\frac{\phi(k)+\phi(n+k)}{\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{n+k+1}} \\
&\to \infty \quad (k\to\infty)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\frac{b_k}{b_{k+1}} \to \infty \quad (k\to\infty).
$$

収束半径が ∞ となるので、ダランベールの判定法より $Y_n(x)$ は任意の x に対して常に収束する。

$Y_\alpha(x)$ は Bessel の方程式の解になっていて、J_α と線形独立である。よって、J_α と Y_α は Bessel の方程式の基本解となっている。従って、(2.1) の一般解は、

$$y = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる。

また、異なる次数の Bessel 関数の間には次の漸化式が成り立つ。

$$\begin{cases} J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x) - \dfrac{\alpha}{x} J_\alpha(x), \\ J'_\alpha(x) = -J_{\alpha+1}(x) + \dfrac{\alpha}{x} J_\alpha(x). \end{cases} \tag{2.42}$$

証明

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\alpha}$$

これを x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha J_\alpha(x)\right) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(2k+2\alpha)}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\alpha-1} \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\alpha-1} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha J_{\alpha-1}(x). \end{aligned}$$

これより、

$$\frac{d}{dx}\left(x^\alpha J_\alpha(x)\right) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$$

となるので、

$$J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

となる。

同様に、

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

これを x で微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}J_\alpha(x)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}\frac{1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \\
&= -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha+1} \\
&= -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)
\end{aligned}
$$

これより、

$$
\frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha}J_\alpha(x)\right) = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)
$$

となるので、

$$
J'_\alpha(x) = -J_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x}J_\alpha(x)
$$

となる。(証明終)

また、次の漸化式も成り立つ。

$$
\begin{cases}
Y'_\alpha(x) = Y_{\alpha-1}(x) - \dfrac{\alpha}{x}Y_\alpha(x), \\
Y'_\alpha(x) = -Y_{\alpha+1}(x) + \dfrac{\alpha}{x}Y_\alpha(x)
\end{cases}
\tag{2.43}
$$

証明

$\alpha \neq 0, 1, \cdots$ の時、

$$
Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}
$$

であるので、これより、

$$
\begin{aligned}
Y'_\alpha(x) &= \frac{J'_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J'_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \\
&= \frac{\left(J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x}J_{-\alpha}(x)\right)\cos\alpha\pi - \left(-J_{-\alpha+1}(x) - \frac{\alpha}{x}J_{-\alpha}(x)\right)}{\sin\alpha\pi} \\
&= \frac{J_{\alpha-1}(x)\cos\alpha\pi + J_{-(\alpha-1)}(x)}{\sin\alpha\pi} - \frac{\frac{\alpha}{x}\left(J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)\right)}{\sin\alpha\pi} \\
&= \frac{J_{\alpha-1}(x)\cos(\alpha-1)\pi - J_{-(\alpha-1)}(x)}{\sin(\alpha-1)\pi} - \frac{\frac{\alpha}{x}\left(J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)\right)}{\sin\alpha\pi} \\
&= Y_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x}Y_\alpha(x)
\end{aligned}
$$

となる。$(\cos(\alpha\pm 1)\pi = -\cos\alpha\pi, \quad \sin(\alpha\pm 1)\pi = -\sin\alpha\pi$ を途中で用いた)
また、

$$\begin{aligned}
Y'_\alpha(x) &= \frac{J'_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J'_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \\
&= \frac{\left(-J_{\alpha+1}(x) - \frac{\alpha}{x}J_\alpha(x)\right)\cos\alpha\pi - \left(-J_{-(\alpha+1)}(x) + \frac{\alpha}{x}J_{-\alpha}(x)\right)}{\sin\alpha\pi} \\
&= \frac{-J_{\alpha+1}(x)\cos\alpha\pi - J_{-(\alpha+1)}(x)}{\sin\alpha\pi} + \frac{\frac{\alpha}{x}\left(J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)\right)}{\sin\alpha\pi} \\
&= -\frac{J_{\alpha+1}(x)\cos(\alpha+1)\pi - J_{-(\alpha+1)}(x)}{\sin(\alpha+1)\pi} + \frac{\alpha}{x}Y_\alpha(x) \\
&= -Y_{\alpha+1}(x) + \frac{\alpha}{x}Y_\alpha(x)
\end{aligned}$$

となる。$\alpha = 0, 1, \cdots$ の時は、$Y_\alpha(x)$ を $\lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ と置き換えて考えればいい。(証明終)

2.1.2 Bessel 関数の原点付近での有様

$x = 0$ の近傍での J,Y の様子を調べる。

$$\begin{aligned}
J_\alpha(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha - \frac{1}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2+\alpha} + \cdots
\end{aligned}$$

より、$x \simeq 0$ において

$$J_\alpha(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \quad (\alpha \neq -n, n: \text{自然数}). \tag{2.44}$$

$\alpha = -n$ (n:自然数) の場合、$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ より、

$$J_{-n}(x) \simeq \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \tag{2.45}$$

となる。
また、(2.41) において $n = 0$ のとき、

$$\pi Y_0(x) = 2\left(\log\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma\right)J_0(x) - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!k!}\left(2\phi(k)\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

なので、$x \simeq 0$ において $J_0(0) = 1$ より、

$$\pi Y_0(x) \simeq 2 \log \left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.46}$$

となる。

$n = 1, 2, \cdots$ のとき (2.41) は、

$$\begin{aligned} \pi Y_n(x) &= 2\left(\log\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma\right) J_n(x) \\ &- (n-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} - \frac{(n-2)!}{1!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2-n} - \cdots - \frac{0!}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2} \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\phi(k) + \phi(n+k)\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \end{aligned}$$

より、$x \simeq 0$ において、

$$\pi Y_n(x) \simeq -(n-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \tag{2.47}$$

となる。よって、

(i) α が整数で無い場合

(2.44) から、$x \to 0$ とすると $J_\alpha(x)$ は x^α より 0 となり、$J_{-\alpha}(x)$ は $\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$ より無限大になる。これより、$Y_\alpha(x)$ も $\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$ より無限大になる。

(ii) α が整数の場合

$J_0(x) = 1$ である。n を自然数としたとき (2.45) から、$x \to 0$ とすると $J_n(x)$ と $J_{-n}(x)$ は共に x^n より 0 となる。一方、$Y_\alpha(x)$ の方は $x \to 0$ とすると、(2.46) から $Y_0(x)$ は $\log\left(\dfrac{x}{2}\right)$ により無限大になる。また、(2.47) から $Y_n(x)$ は $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ より無限大になる。

よって、$\alpha = 0, 1, 2, \cdots$ の場合、$x = 0$ の近傍での Bessel の方程式の有界な一般解は $J_\alpha(x)$ の定数倍に限られる。

2.1.3 Bessel 関数の直交性と零点

k を 0 でない定数として、

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \alpha^2)y = 0 \tag{2.48}$$

について考えていく。$t = kx$ とおくと、

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = k\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = k^2\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

より、(2.48) に代入すると

$$\begin{aligned} x^2k^2\frac{d^2y}{dt^2} + xk\frac{dy}{dt} + (t^2 - \alpha^2)y = 0, \\ t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \alpha^2)y = 0 \end{aligned}$$

となる。従って、$y = J_\alpha(kx)$ は (2.48) の解である。

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(kx) + x\frac{d}{dx}J_\alpha(kx) + (k^2x^2 - \alpha^2)J_\alpha(kx) = 0.$$

そこで x で割ると、

$$x\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(kx) + \frac{d}{dx}J_\alpha(kx) + \left(k^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(kx) = 0$$

となる。これは、

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\alpha(kx)\right) + \left(k^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(kx) = 0 \tag{2.49}$$

と表せる。ここで、k について異なる値 k_1,k_2 に対応する式を書くと、

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right) + \left(k_1^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(k_1x) = 0, \tag{2.50}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right) + \left(k_2^2x - \frac{\alpha^2}{x}\right)J_\alpha(k_2x) = 0 \tag{2.51}$$

となる。そして、$(2.50) \times J_\alpha(k_2x) - (2.51) \times J_\alpha(k_1x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} & J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right) - J_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right) \\ + \quad & (k_1^2 - k_2^2)xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x) = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
& J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) + xJ_\alpha(k_2x)\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(k_1x) - J_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x) \\
+ \quad & xJ_\alpha(k_1x)\frac{d^2}{dx^2}J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx} + (k_1^2-k_2^2)xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x) = 0
\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\left(xJ_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right) - \frac{d}{dx}\left(xJ_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right) \\
- \quad & x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) + x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x) \\
+ \quad & (k_1^2-k_2^2)xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x) = 0
\end{aligned}$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\left(xJ_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right) - \frac{d}{dx}\left(xJ_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right) \\
+ \quad & (k_1^2-k_2^2)xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x) = 0.
\end{aligned}$$

従って、

$$(k_2^2-k_1^2)xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x) = \frac{d}{dx}\left(xJ_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) - xJ_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right) \tag{2.52}$$

となる。ここで (2.22) より、

$$\begin{aligned}
J_\alpha(k_1x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^\alpha - \frac{1}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{1}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots, \\
J_\alpha(k_2x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^\alpha - \frac{1}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{1}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots, \\
x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x) &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1}(2k_1+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha+k_1+1)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{2k_1+\alpha} \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^\alpha - \frac{\alpha+2}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{\alpha+4}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{k_1x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots, \\
x\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x) &= \sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_2}(2k_2+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha+k_2+1)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{2k_2+\alpha} \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^\alpha - \frac{\alpha+2}{1!\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\alpha+2} + \frac{\alpha+4}{2!\Gamma(\alpha+3)}\left(\frac{k_2x}{2}\right)^{\alpha+4} - \cdots.
\end{aligned}$$

これより、(2.52) の右辺の括弧内の第１項が消えるので、x のベキ級数は $x^{2(\alpha+1)}$ から始まる。

従って、$\alpha > -1$ ならば (2.52) は $x=0$ で 0 となるので、このことに注意しつつ (2.52) を区間 $(0,l)$ で積分する。

$$\begin{aligned}\int_0^l (k_2^2-k_1^2)xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x)dx &= \int_0^l \frac{d}{dx}\left(xJ_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)-xJ_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right)dx\\ &= \left[xJ_\alpha(k_2x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)-xJ_\alpha(k_1x)\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right]_0^l\end{aligned}$$

そこで、

$$\frac{d}{dx}J_\alpha(x)=J'_\alpha(x)$$

とすると、

$$\left.\frac{d}{dx}J_\alpha(k_1x)\right|_{x=l}=k_1J'_\alpha(k_1l),\quad \left.\frac{d}{dx}J_\alpha(k_2x)\right|_{x=l}=k_2J'_\alpha(k_2l)$$

であるので、

$$(k_2^2-k_1^2)\int_0^l xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x)dx = l\left(k_1J'_\alpha(k_1l)J_\alpha(k_2l)-k_2J'_\alpha(k_2l)J_\alpha(k_1l)\right) \tag{2.53}$$

$l=1$ の場合は、

$$(k_2^2-k_1^2)\int_0^1 xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x)dx = k_1J'_\alpha(k_1)J_\alpha(k_2)-k_2J'_\alpha(k_2)J_\alpha(k_1) \tag{2.54}$$

となる。ここで、次の定理を示す。

定理

$\alpha > -1$ の時、$J_\alpha(x)$ の零点はすべて実数となる。
($J_\alpha(x)$ の零点:$J_\alpha(a)=0$ となる点 a を J_α の零点という)

証明

$J_\alpha(x)$ が複素零点 $a+ib\ \ (b\neq 0)$ を持つと仮定すると、

$$J_\alpha(a+ib)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{a+ib}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}=0 \tag{2.55}$$

となる。ここで、$\overline{(a+ib)^n} = (a-ib)^n$ (n:定数) より、(2.55) の共役を取ると、

$$J_\alpha(a-ib) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\dfrac{a-ib}{2}\right)^{2k+\alpha}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} = 0 \tag{2.56}$$

となる。そこで、(2.54) の式で $k_1 = a+ib, \quad k_2 = a-ib$ とおくと $(k_2^2-k_1^2) = -4abi$ より、$\alpha > -1$ のとき、

$$-4abi\int_0^1 xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x)dx = 0$$

となる ((2.55),(2.56) を用いたため)。ここで、$a \neq 0$ の時、

$$\int_0^1 xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x)dx = 0$$

となる ($-4abi \neq 0$ のため)。しかし、$J_\alpha(k_1x)$ と $J_\alpha(k_2x)$ は互いに共役なので、積分の中の式 $xJ_\alpha(k_1x)J_\alpha(k_2x)$ が正となり、(2.1.3) は 0 にならない。よって、(2.1.3) の式は成立しない。従って、$J_\alpha(x)$ は $a+ib$ ($a \neq 0$ かつ $b \neq 0$) を零点に持たない。

また、$a=0$ の時、ib ($b \neq 0$) を $J_\alpha(x)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} J_\alpha(ib) &= (ib)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{(ib)^{2k}}{2^{2k+\alpha}} \\ &= (ib)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{b^{2k}}{2^{2k+\alpha}} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{J_\alpha(ib)}{(ib)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{b^{2k}}{2^{2k+\alpha}}$$

となる。ここで、$\alpha > -1$ より Γ 関数が正となるので、右辺は正になることがわかり、0 でないことがわかる。従って、$J_\alpha(x)$ は ib ($b \neq 0$) を零点に持たない。(証明終)

次に Bessel 関数の直交性について考える。

$$k_1 = \frac{\mu_i}{l}, \quad k_2 = \frac{\mu_j}{l} \quad (l\text{:正の定数})$$

とおく。ここで、$\mu_i, \mu_j (i, j = 1, 2, \cdots)$ は J_α の正の零点とする。

(i)$i \neq j$ の場合

(2.53) より、

$$(k_2^2-k_1^2)\int_0^l xJ_\alpha(\frac{\mu_i}{l}x)J_\alpha(\frac{\mu_j}{l}x)dx = l\left(k_1J'_\alpha(\mu_i)J_\alpha(\mu_j)-k_2J'_\alpha(\mu_j)J_\alpha(\mu_i)\right)$$

μ_i,μ_j は J_α の正の零点より、上記の式で右辺は 0 になる。また、$k_2^2-k_1^2\neq 0$ であるので、

$$\int_0^l xJ_\alpha(\frac{\mu_i}{l}x)J_\alpha(\frac{\mu_j}{l}x)dx = 0 \tag{2.57}$$

となる。

(ii)$i=j$ **の場合**

$k=\dfrac{\mu}{l}$ とおく (μ は正の零点)。(2.53) において $k_1=k$ とおくと、

$$(k_2^2-k^2)\int_0^l xJ_\alpha(kx)J_\alpha(k_2x)dx = l\left(kJ'_\alpha(kl)J_\alpha(k_2l)-k_2J'_\alpha(k_2l)J_\alpha(\mu)\right)$$

となる。$J_\alpha(\mu)=0$ より、

$$\int_0^l xJ_\alpha(kx)J_\alpha(k_2x)dx = \frac{lkJ'_\alpha(kl)J_\alpha(k_2l)}{k_2^2-k^2}$$

と表せる。ここで、k_2 を変数として k への極限をとると、

$$\lim_{k_2\to k}\int_0^l xJ_\alpha(kx)J_\alpha(k_2x)dx = \lim_{k_2\to k}\frac{lkJ'_\alpha(kl)J_\alpha(k_2l)}{k_2^2-k^2}$$

従って、

$$\int_0^l x\left(J_\alpha(kx)\right)^2dx = \lim_{k_2\to k}\frac{lkJ'_\alpha(kl)J_\alpha(k_2l)}{k_2^2-k^2}$$

右辺は不定形なのでロピタルの定理を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^l x\left(J_\alpha(kx)\right)^2dx &= \lim_{k_2\to k}\frac{l^2kJ'_\alpha(kl)J'_\alpha(k_2l)}{2k_2}\\ &= \frac{l^2}{2}\left(J'_\alpha(kl)\right)^2 \end{aligned}\tag{2.58}$$

となる。ここで、以前示した漸化式 $J'_\alpha(x)=-J_{\alpha+1}(x)-\dfrac{\alpha}{x}J_\alpha(x)$ で $x=\mu$ とすると $J_\alpha(\mu)=0$ より、

$$J'_\alpha(\mu)=-J_{\alpha+1}(\mu)$$

となるので (2.58) は、

$$\int_0^l x\left(J_\alpha(\frac{\mu}{l}x)\right)^2 dx = \frac{l^2}{2}\left(J_{\alpha+1}(\mu)\right)^2 \tag{2.59}$$

となる。

以上より、

$$\int_0^l xJ_\alpha(\frac{\mu_i}{l}x)J_\alpha(\frac{\mu_j}{l}x)dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{l^2}{2}\left(J_{\alpha+1}(\mu_i)\right)^2 & (i = j) \end{cases} \tag{2.60}$$

という直交関係が得られた (ただし、$\alpha > -1$ で μ_i, μ_j は J_α の正の零点)。

2.1.4 Bessel 関数による任意関数の展開

$0 < x < l$ で $f(x)$ を定義する。任意関数 $f(x)$ が、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\alpha\left(\mu_i^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right) \quad (\alpha > -1) \tag{2.61}$$

に級数展開されるものとする。$\mu_1^{(\alpha)}, \mu_2^{(\alpha)}, \cdots$ は増加順に並んだ J_α の正の零点である。a_i を定めるため、(2.61) の両辺に $xJ_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)$ を掛けて、項別積分可能と仮定して $[0, l]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^l xf(x)J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)dx &= \int_0^l xJ_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)\sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\alpha\left(\mu_i^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)dx \\ &= \int_0^l x\sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)J_\alpha\left(\mu_i^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)dx \end{aligned}$$

となる。ここで、(2.60) の直交性により $i = j$ の項だけが残るので、

$$\begin{aligned} \int_0^l xf(x)J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)dx &= a_j\int_0^l xJ_\alpha\left(\left(\mu_j^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)\right)^2 dx \\ &= \frac{a_j l^2}{2}\left(J_{\alpha+1}(\mu_i^{(\alpha)})\right)^2 \end{aligned}$$

となる。

よって、j を i として、

$$a_i = \frac{2}{l^2\left(J_{\alpha+1}(\mu_i^{(\alpha)})\right)^2}\int_0^l xf(x)J_\alpha\left(\mu_j^{(\alpha)}\frac{x}{l}\right)dx \tag{2.62}$$

が求まる。ここで、$f(l)=0$ であることが必要である。このことは、$f(l)=0+0+0+\cdots$ で明らかである。(2.61),(2.62) を $f(x)$ の Fourier-Bessel 展開という。

2.1.5 Bessel 関数の零点の性質

ここでは、円盤領域・円柱領域における固有値の議論の際に用いると思われる零点の性質をあげる。

1. $n>0$ ならば、$x=0$ は $J_n(x)$ の零点である。
2. n が実数のとき、$J_n(x)$ は可算無限個の正の零点を持ち、有限な点には集積しない。
3. $n>-1$ のとき、$J_n(x)$ の零点はすべて実数となる。

2 について、無限個の正の零点を持つことを示すために、次のことをあげておく。

命題 (この命題はボウマン [1] の第 6 章にある。)

$J_n(x)=0$ は α と $\alpha+k\pi$ との間に少なくとも 1 つ根を持つ。ただし、k は 1 より大きい任意の数で、α は十分大きな任意の正数である。

これより、2 について無限個の正の零点を持つことを証明していく。

(証明)

$k>1$ のとき、命題より $J_n(x)$ は

$$\alpha,\ \alpha+k\pi,\ \alpha+2k\pi,\ \alpha+3k\pi\cdots$$

の隣どうしの任意の 2 項の間に少なくとも 1 つ根を持つ。よって、$J_n(x)$ は正の零点を無限個持つ。

以上より、無限個の正の零点を持つことは証明できた。零点が有限な点には集積しないということについては、一致の定理を用いる。

一致の定理 (この定理は関連図書 [2] を参照)

$f(z)$ は領域 D で正則とする。D 内の相異なる点からなる無限点列 z_n が、D 内の点 Z_0 に収束するものとする。このとき、

$$f(z_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

ならば、D において恒等的に $f(z) \equiv 0$ が成り立つ。

これを用いて零点が有限な点に集積しないことを示す。

(証明)

零点が有限な点に集積するならば $J_n(x) \equiv 0$ となってしまい、これは不適である。よって、零点は有限な点に集積しない。

以上より、零点が有限な点に集積しないことも証明できた。

2.1.6 変形 Bessel 関数

この節の内容については、関連図書 [1],[3] を参考にした。ここでは３次元円柱領域の Laplace 方程式の厳密解を求めていく上で必要となる変形 Bessel 関数について述べる。

$$y'' + \frac{1}{x}y' - (1 + \frac{\alpha^2}{x^2})y = 0 \quad (\alpha \text{ :定数}). \tag{2.63}$$

(2.63) の形をした方程式を変形された Bessel の方程式という。この方程式は Bessel の方程式で x の代わりに ix を用いれば得られる。この式の特解は、$J_n(ix)$ を用いて $e^{-\frac{1}{2}n\pi i}J_n(ix)$ となる。一般に、これを虚数 i を用いない形 $I_n(x)$ で表すと、

$$I_n(x) = e^{-\frac{1}{2}n\pi i}J_n(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

となる。$I_n(x)$ を変形 Bessel 関数という。

n が整数の場合、J_n の場合と同様にもう１つの特解が必要となる。そこで、

$$K_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} \tag{2.64}$$

と定義すると、$K_n(x)$ は第二の特解となる。

次に、収束性について考える。$I_n(x)$ は $x=0$ で 0 であり、$x=\infty$ で ∞ である。また、$I_{-n}(x)$ は $x=0,\infty$ で ∞ となる。これより、$K_n(x)$ は $x=0$ で ∞ となり、$x=\infty$ で 0 となる (収束性については関連図書 [3] から抜粋させて頂いた)。

以上より、変形 Bessel 関数 (2.64) の一般解は、

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.65}$$

となる。

また、k を 0 でない定数として、

$$y'' + \frac{1}{x}y' - (k^2 + \frac{\alpha^2}{x^2})y = 0 \quad (\alpha \text{ :定数}). \tag{2.66}$$

という式においては、$I_n(kx)$ が解になる (証明は通常の Bessel の方程式と同様)。

第3章　３次元円柱領域の熱方程式の厳密解

この章では、３次元円柱領域の熱方程式の厳密解を求めていくことを目標にする。そこでまず参考になる、円盤領域の厳密解についても同時に考えていく。

3.1　円盤領域の熱方程式の厳密解

半径を $r = 1$ とする円盤領域の熱方程式、

$$\begin{aligned} u_t(x,y,t) &= \Delta u(x,y,t) \quad ((x,y) \in \Omega, t \in (0,\infty)), & (3.1)\\ u(x,y,t) &= 0 \quad ((x,y) \in \Gamma, t \in (0,\infty)), & (3.2)\\ u(x,y,0) &= f(x,y) \quad ((x,y) \in \overline{\Omega}, t = 0) & (3.3)\\ \Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2<1\}, \quad \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

の厳密解を Fourier の方法で求めていく。

まず、(3.1),(3.2) を満たす u で、

$$u(x,y,t) = \zeta(x,y)\eta(t) \tag{3.4}$$

の形をしていて、恒等的に 0 でないものを探す。(3.2) の境界条件に (3.4) を代入すると、

$$\zeta(x,y)\eta(t) = 0 \quad ((x,y) \in \Gamma, t > 0).$$

ここで、もしも $^\exists(x,y) \in \Gamma$ s.t. $\zeta(x,y) \neq 0$ とすると、$\eta(t) = 0 \quad (t \in (0,\infty))$ より、$u \equiv 0$ となり不適である。よって、

$$\zeta(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \Gamma).$$

また、(3.1) に (3.4) を代入すると、

$$\zeta(x,y)\eta'(t) = \Delta\zeta(x,y)\eta(t)$$

より、

$$\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\Delta\zeta(x,y)}{\zeta(x,y)} \tag{3.5}$$

となる。(3.5) は、左辺は x, y によらず、右辺は t によらないので定数である。それを λ とおくと、

$$\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\Delta\zeta(x,y)}{\zeta(x,y)} = \lambda.$$

これより、

$$^{\exists}\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \eta'(t) = \lambda\eta(t) \\ \Delta\zeta(x,y) = \lambda\zeta(x,y). \end{cases}$$

ζ は、

$$\begin{cases} \Delta\zeta(x,y) = \lambda\zeta(x,y) \quad (in\ \Omega) \\ \zeta(x,y) = 0 \quad (on\ \Omega) \end{cases}$$

を満たす (ただし、$\zeta \not\equiv 0$ $(in\ \Omega)$)。

このままでは Fourier の方法が使用できないので、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と極座標変換を行う。すると、

$$\Delta\zeta = \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}$$

より、

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} = \lambda\zeta \qquad (0 < r < 1, \theta \in [0, 2\pi)) \tag{3.6}$$

となる。そこで、(3.6) の解を、

$$\zeta(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

とおく (ただし、$R(r) \not\equiv 0$ かつ $\Theta(\theta) \not\equiv 0$)。これを (3.6) に代入すると、

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = \lambda R(r)\Theta(\theta).$$

両辺を $R(r)\Theta(\theta)$ で割ると、

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

となり、r, θ でまとめると、

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda r^2R(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \tag{3.7}$$

となる。(3.7) は、左辺は θ によらず、右辺は r によらないので定数である。それを α とおくと、

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda r^2R(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \alpha.$$

これより、

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-(\lambda r^2+\alpha)R(r)=0 \\ \Theta''(\theta) = -\alpha\Theta(\theta) \end{cases}$$

となる。

まず Θ を求めていく。特性方程式は、

$$s^2 = -\alpha$$

であるから、

$$s = \pm\sqrt{-\alpha}.$$

(i) $\alpha \neq 0$ ならば、$\Theta(\theta)$ の一般解は、

$$\Theta(\theta) = Ae^{\sqrt{-\alpha}\theta} + Be^{-\sqrt{-\alpha}\theta} \qquad (A, B \text{ は任意定数})$$

Θ は周期が 2π より、

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi),\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi).$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} A+B &= Ae^{2\pi\sqrt{-\alpha}} + Be^{2\pi-\sqrt{-\alpha}}, \\ A-B &= Ae^{2\pi\sqrt{-\alpha}} - Be^{2\pi-\sqrt{-\alpha}} \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{pmatrix} 1-e^{2\pi\sqrt{-\alpha}} & 1-e^{-2\pi\sqrt{-\alpha}} \\ 1-e^{2\pi\sqrt{-\alpha}} & -1+e^{-2\pi\sqrt{-\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、もし行列が正則ならば、逆行列を左からかけると、

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、$\Theta(\theta) \equiv 0$ となり、これは不適である。よって、行列は正則ではないので行列式は 0 である。従って、

$$\begin{vmatrix} 1-e^{2\pi\sqrt{-\alpha}} & 1-e^{-2\pi\sqrt{-\alpha}} \\ 1-e^{2\pi\sqrt{-\alpha}} & -1+e^{-2\pi\sqrt{-\alpha}} \end{vmatrix} = 0.$$

これより、$e^{2\pi\sqrt{-\alpha}} = 1$ であるので、

$$^{\exists}n \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad 2\pi\sqrt{-\alpha} = 2n\pi i.$$

よって、

$$\alpha = n^2$$

となる。従って Θ は、

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= Ae^{ni\theta} + Be^{-ni\theta} \\ &= C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}). \end{aligned}$$

ここで $\alpha \neq 0$ より、$n \neq 0$ であり、$+n$ と $-n$ で同じ α, Θ を与えるので、$n \in \mathbb{N}$ で十分である。

(ii) $\alpha = 0$ のとき、$\Theta''(\theta) = 0$ より、

$$\Theta(\theta) = A + B\theta \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

ここで、$\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ から、$A = A + 2\pi B$ より、$B = 0$ である。よって、

$$\Theta(\theta) = A \quad (A \text{ は任意定数})$$

となる。

以上より、

$$\begin{cases} \alpha = n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ \Theta(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \end{cases}$$

となる。

次に、

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - (\lambda r^2 + \alpha)R(r) = 0 \tag{3.8}$$

を考える。まず境界条件から、

$$R(1) = 0$$

となる。また、$\zeta(r,\theta)$ は $r \to +0$ で有界なので $R(r)$ も $r \to +0$ で有界である。よって、

$$R(0) < \infty\ .$$

ここで、(3.8) に $\alpha = n^2$ を代入すると、

$$r^2R''(r) + rR'(r) - (\lambda r^2 + n^2)R(r) = 0 \tag{3.9}$$

となる。(3.9) は Bessel の方程式であるので、一般解は

$$R(r) = D_1 J_n(r\sqrt{-\lambda}) + D_2 Y_n(r\sqrt{-\lambda}) \quad (D_1, D_2 \text{ は任意定数})$$

となる。ここで、$R(r)$ は原点で有界である。しかし、Y_n は原点で有界ではないので $D_2 \neq 0$ ならば $R(r)$ は解にはならない。よって、

$$R(r) = D_1 J_n(r\sqrt{-\lambda})$$

となる。また、もう一つの境界条件より、

$$R(1) = D_1 J_n(\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

従って、$\sqrt{-\lambda}$ は J_n の零点である。ここで、J_n の正の零点を

$$\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \cdots < \mu_m^{(n)} < \cdots \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots ; m = 1, 2, 3, \cdots)$$

とすると、

$$\sqrt{-\lambda} = \mu_m^{(n)} \quad \text{より、} \ \lambda = -(\mu_m^{(n)})^2.$$

これより、

$$R(r) = D_1 J_n(r\mu_m^{(n)})$$

となる。以上より、

$$\zeta(r,\theta) = J_n(r\mu_m^{(n)})(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta).$$

次に、$\eta(t)$ について考える。

$$\eta'(t) = \lambda\eta(t) \quad \text{より、} \ \eta(t) = Ce^{\lambda t} \quad (C \text{ は任意定数}).$$

λ を代入すると、

$$\eta(t) = Ce^{-t(\mu_m^{(n)})^2}$$

となる。これを $\zeta(r,\theta)$ と合わせると、

$$u_{m,n}(r,\theta,t) = e^{-t(\mu_m^{(n)})^2} J_n(r\mu_m^{(n)})(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta)$$

という変数分離解を得る。よって、u を

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-t(\mu_m^{(n)})^2} J_n(r\mu_m^{(n)})(A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta)$$

とおくと、境界条件を満たす熱方程式の解であると期待される。ここで初期条件 $u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$ より、

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(r\mu_m^{(n)})(A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} J_0(r\mu_m^{(0)})A_{0,m} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(r\mu_m^{(n)})(A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta). \end{aligned}$$

ここで、直交性を用いて係数 $A_{n,m}, B_{n,m}$ を求めていく。$n = 0$ のとき $A_{n,m}$ は、

$$\begin{aligned} A_{0,m} &= \frac{2}{(J_1(\mu_m^{(0)}))^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} r J_0(r\mu_m^{(0)}) f(r,\theta) dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi(J_1(\mu_m^{(0)}))^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r J_0(r\mu_m^{(0)}) f(r,\theta) dr d\theta \end{aligned}$$

となる。$n = 1, 2, \cdots$ のときも同様にすると、

$$A_{n,m} = \frac{2}{\pi(J_{n+1}(\mu_m^{(n)}))^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r J_n(r\mu_m^{(n)}) f(r,\theta) \cos n\theta dr d\theta,$$

$$B_{n,m} = \frac{2}{\pi(J_{n+1}(\mu_m^{(n)}))^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} r J_n(r\mu_m^{(n)}) f(r,\theta) \sin n\theta dr d\theta$$

となる。

3.2 3次元円柱領域の熱方程式の厳密解

この節では、半径を $r = 1$ で高さを h とした円柱領域の熱方程式、

$$\frac{1}{\kappa}u_t(x,y,z,t) = \Delta u(x,y,z,t) \quad ((x,y,z) \in \Omega, t \in (0,\infty)), \tag{3.10}$$

$$u(x,y,z,t) = 0 \quad ((x,y,z) \in \Gamma, t \in (0,\infty)), \tag{3.11}$$

$$u(x,y,z,0) = f(x,y,z) \quad ((x,y,z) \in \overline{\Omega}, t = 0) \tag{3.12}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2<1,\ 0<z<h\}, \quad \Gamma = \partial\Omega$$

の厳密解を Fourier の方法で求めていく。上記の式を満たす u で、

$$u(x,y,z,t) = \zeta(x,y,z)\eta(t) \tag{3.13}$$

の形をしていて、恒等的に 0 でないものを探す。境界条件に (3.13) を代入すると、

$$\zeta(x,y,z)\eta(t) = 0 \quad ((x,y,z) \in \Gamma, t>0)$$

ここで、もしも $^{\exists}(x,y,z) \in \Gamma$ s.t. $\zeta(x,y,z) \neq 0$ とすると、$\eta(t) = 0 \quad (t \in (0,\infty))$ より、$u \equiv 0$ となり不適である。よって、

$$\zeta(x,y,z) = 0 \quad ((x,y,z) \in \Gamma).$$

また、(3.10) に (3.13) を代入すると、

$$\frac{1}{\kappa^2}\zeta(x,y,z)\eta'(t) = \Delta\zeta(x,y,z)\eta(t)$$

より、

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\Delta\zeta(x,y,z)}{\zeta(x,y,z)} \tag{3.14}$$

となる。(3.14) は、左辺は x,y,z によらず、右辺は t によらないので定数である。それを λ とおくと、

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\Delta\zeta(x,y,z)}{\zeta(x,y,z)} = \lambda.$$

これより、

$$^{\exists}\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \eta'(t) = \lambda\kappa^2\eta(t) \\ \Delta\zeta(x,y,z) = \lambda\zeta(x,y,z). \end{cases}$$

ζ は、

$$\begin{cases} \Delta\zeta(x,y,z) = \lambda\zeta(x,y,z) \quad (in\ \Omega) \\ \zeta(x,y,z) = 0 \quad (on\ \Omega) \end{cases}$$

を満たす (ただし、$\zeta \not\equiv 0$ $(in\ \Omega)$)。ここで、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

とおいて、(x,y,z) から (r,θ,z) に変換する。すると、

$$\Delta\zeta = \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}$$

より、

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}=\lambda\zeta \qquad (0<r<1, \theta\in[0,2\pi)) \tag{3.15}$$

となる。ここで、

$$\zeta(r,\theta,z)=\nu(r,\theta)W(z)$$

とおく (ただし、$\nu(r,\theta)\not\equiv 0$ かつ $W(z)\not\equiv 0$)。これを (3.15) に代入すると、

$$\Delta\nu=\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\nu}{\partial\theta^2}$$

より、

$$\Delta\nu(r,\theta)W(z)+\mu(r,\theta)W''(z)=\lambda\nu(r,\theta)W(z)$$

となるので、

$$\frac{\Delta\nu(r,\theta)}{\nu(r,\theta)}-\lambda=-\frac{W''(z)}{W(z)} \tag{3.16}$$

となる。(3.16) は左辺は z によらず、右辺は r,θ によらないので、これは定数である。それを μ とおくと、

$$\frac{\Delta\nu(r,\theta)}{\nu(r,\theta)}-\lambda=-\frac{W''(z)}{W(z)}=\mu.$$

これより ν,W は、

$$\begin{cases}\Delta\nu(r,\theta)=(\lambda+\mu)\nu(r,\theta)\\ W''(z)=-\mu W(z)\end{cases}$$

を満たす。

まず、$W(z)$ について考える。特性方程式は、

$$s^2=-\mu$$

であるから、

$$s=\pm\sqrt{-\mu}.$$

(i) $\mu\neq 0$ のとき、

$$W(z)=Ae^{\sqrt{-\mu}z}+Be^{-\sqrt{-\mu}z} \qquad (A,B \text{ は任意定数}).$$

境界条件より、

$$W(0)=A+B=0,$$
$$W(h)=Ae^{\sqrt{-\mu}h}-Be^{-\sqrt{-\mu}h}=0$$

となる。$A=-B$ より、$e^{2h\sqrt{-\mu}}=1$ となるので、

$$^{\exists}l \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad 2h\sqrt{-\mu}=2l\pi i.$$

よって、

$$\mu=\frac{(l\pi)^2}{h^2}$$

となる。従って W は、

$$\begin{aligned} W(z) &= Ae^{\frac{l\pi z}{h}i}+Be^{-\frac{l\pi z}{h}i} \\ &= C\sin\frac{l\pi}{h}z \quad (C\text{ は任意定数}). \end{aligned}$$

ここで $\mu \neq 0$ より、$l \neq 0$ であり、$+l$ と $-l$ で同じ μ を与えるので、$l \in \mathbb{N}$ で十分である。

(ii) $\mu=0$ のとき、

$$W(z)=A+Bz \quad (A,B\text{ は任意定数}).$$

ここで、

$$W(0)=A=0, \quad W(h)=A+Bh=0$$

から、$A=0, B=0$ である。よって、$W(z)=0$ より $u\equiv 0$ となり不適である。

以上より、

$$\begin{cases} \mu=\dfrac{(l\pi)^2}{h^2} \quad (l=1,2,\cdots) \\ W(z)=C\sin\dfrac{l\pi}{h}z \quad (C\text{ は任意定数}). \end{cases}$$

次に、$\Delta\nu(r,\theta)=(\lambda+\mu)\nu(r,\theta)$ を考える。

$$\nu(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta) \quad (R(r)\not\equiv 0\text{ かつ }\Theta(\theta)\not\equiv 0)$$

とおくと、

$$R''(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)=(\lambda+\mu)R(r)\Theta(\theta)$$

より、

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)+r^2(-\lambda-\mu)R(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

この式は左辺は θ によらず、右辺は r によらないので定数である。それを α とおくと、

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)+r^2(-\lambda-\mu)R(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\alpha.$$

これより、

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(r^2(-\lambda-\mu)-\alpha)R(r)=0 \\ \Theta''(\theta)=-\alpha\Theta(\theta) \end{cases}$$

となる。

まず、$\Theta(\theta)$ を求めると、

$$\begin{cases} \alpha=n^2 \qquad (n=0,1,2,\cdots) \\ \Theta(\theta)=C_1\cos n\theta+C_2\sin n\theta \quad (C_1,C_2\ \text{は任意定数}) \end{cases}$$

となる (ここでの計算は 2 次元を参照)。

次に、

$$r^2R''(r)+rR'(r)+((-\lambda-\mu)r^2-\alpha)R(r)=0 \tag{3.17}$$

を考える。まず境界条件から、

$$R(1)=0$$

となる。また、$\nu(r,\theta)$ は $r\to+0$ で有界なので $R(r)$ も $r\to+0$ で有界である。よって、

$$R(0)<\infty\ .$$

ここで、(3.17) に $\alpha=n^2$ を代入すると、

$$r^2R''(r)+rR'(r)+((-\lambda-\mu)r^2-n^2)R(r)=0 \tag{3.18}$$

となる。(3.18) は Bessel の方程式であるので、一般解は

$$R(r)=D_1J_n(r\sqrt{-\lambda-\mu})+D_2Y_n(r\sqrt{-\lambda-\mu}) \quad (D_1,D_2\ \text{は任意定数})$$

となる。ここで、境界条件より $R(r)$ は原点で有界である。しかし、Y_n は原点で有界ではないので (3.18) の解にはならない。よって、$D_2=0$ で

$$R(r)=D_1J_n(r\sqrt{-\lambda-\mu})$$

となる。

また、もう一つの境界条件より、

$$R(1)=D_1J_n(\sqrt{-\lambda-\mu})=0.$$

従って、$\sqrt{-\lambda-\mu}$ は J_n の零点である。ここで、J_n の正の零点全体を

$$\beta_{1,n} < \beta_{2,n} < \cdots < \beta_{m,n} < \cdots \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots ; m = 1, 2, 3, \cdots)$$

とすると、

$$\sqrt{-\lambda-\mu} = \beta_{m,n} \quad \text{より、} \quad \lambda + \mu = -(\beta_{m,n})^2.$$

これより、

$$R(r) = D_1 J_n(r\beta_{m,n})$$

となる。以上より、

$$\nu(r,\theta) = J_n(r\beta_{m,n})(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta).$$

次に、$\eta(t)$ について考える。

$$\eta'(t) = \lambda\kappa^2\eta(t) \quad \text{より、} \quad \eta(t) = Ce^{\lambda\kappa^2 t} \quad (C \text{ は任意定数}).$$

λ を代入すると、

$$\eta(t) = Ce^{-\kappa^2(\frac{(l\pi)^2}{h^2}+(\beta_{m,n})^2 t}$$

となる。ν, W, η を合わせると、

$$u_{l,m,n}(r,\theta,z,t) = e^{-\kappa^2(\frac{(l\pi)^2}{h^2}+(\beta_{m,n})^2)t} J_n(r\beta_{m,n})(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta) \sin \frac{l\pi}{h} z.$$

よって、u を

$$u(r,\theta,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m,l=1}^{\infty} e^{-\kappa^2(\frac{(l\pi)^2}{h^2}+(\beta_{m,n})^2)t} J_n(r\beta_{m,n})(A_{l,m,n} \cos n\theta + B_{l,m,n} \sin n\theta) \sin \frac{l\pi}{h} z$$

とおくと、u は初期条件・境界条件を満たす熱方程式の解であると期待される。ここで初期条件 $u(r,\theta,z,0) = f(r,\theta,z)$ より、

$$f(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m,l=1}^{\infty} J_n(r\beta_{m,n})(A_{l,m,n} \cos n\theta + B_{l,m,n} \sin n\theta) \sin \frac{l\pi}{h} z$$

となる。係数 $A_{l,m,n}$ を求めるために、直交性を用いる。$f(r,\theta,z)$ の両辺に $rJ_{n'}(r\beta_{m',n'})$, $\cos n'\theta, \sin \frac{l'\pi}{h} z$ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned}
\int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 rJ_n(r\beta_{m,n}) f(r,\theta,z) \cos n\theta \sin \frac{l\pi}{h} z\, dr d\theta dz &= \frac{1}{2}(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2 \pi \times \frac{1}{2} h \times A_{l,m,n} \\
&= \frac{\pi h}{4}(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2 A_{l,m,n}
\end{aligned}$$

$(l = l', n = n', m = m'$ のときだけ残る$)$.

よって、

$$A_{n,m} = \frac{4}{\pi h(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 rJ_n(r\beta_{m,n})f(r,\theta,z)\cos n\theta \sin\frac{l\pi}{h}zdrd\theta dz,$$
$$B_{n,m} = \frac{4}{\pi h(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 rJ_n(r\beta_{m,n})f(r,\theta,z)\sin n\theta \sin\frac{l\pi}{h}zdrd\theta dz$$

となる。

第4章　３次元円柱領域のLaplace方程式のDirichlet問題

4.1　３次元円柱領域のLaplace方程式の厳密解

ここでは熱方程式と同じ円柱領域で、境界条件を次のようにしたLaplace方程式

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{ in } \Omega), &(4.1)\\ u(x,y,z) &= \Phi \quad (\text{ on } \Gamma), &(4.2)\\ u(x,y,0) &= u(x,y,h) = 0 \quad (z=0,h) &(4.3)\end{aligned}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2<1,\ 0<z<h\}, \quad \Gamma = \text{側面}$$

の厳密解をFourierの方法で求めていく。まず、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と極座標変換する。$(0<r<1, \theta \in [0,2\pi))$ つまり、

$$U(r,\theta,z) \overset{\text{def}}{=} u(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

とすると境界条件より、

$$U(1,\theta,z) = \Phi(\cos\theta, \sin\theta, z)$$
$$U(r,\theta,0) = U(r,\theta,h) = 0$$

となる。そこで、

$$U(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)W(z) \tag{4.4}$$

の形をしていて、恒等的に0でないものを探す。

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

より、

$$\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}+\frac{W''(z)}{W(z)}=0.$$

これより、

$$\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\frac{W''(z)}{W(z)}.$$

これは左辺は z によらず、右辺は r,θ によらないので定数である。それを λ とおくと、

$$\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\frac{W''(z)}{W(z)}=\lambda.$$

これより W は、

$$W''(z)=-\lambda W(z)$$

となる。

$R(r)$ については、

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda r^2R(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

となる。この式は左辺は θ によらず、右辺は r によらないので定数である。それを μ とおくと、

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda r^2R(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\mu.$$

これより、

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)-(\lambda r^2+\mu)R(r)=0 \\ \Theta''(\theta)=-\mu\Theta(\theta) \end{cases}$$

となる。$W(z)$ は、

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{(l\pi)^2}{h^2} \quad (l=1,2,\cdots) \\ W(z)=C\sin\dfrac{l\pi}{h}z \quad (C\text{ は任意定数}) \end{cases}$$

となり、$\Theta(\theta)$ については、

$$\begin{cases} \mu=n^2 \qquad (n=0,1,2,\cdots) \\ \Theta(\theta)=C_1\cos n\theta+C_2\sin n\theta \quad (C_1,C_2\text{ は任意定数}) \end{cases}$$

となる (Θ の計算は 2 次元、W の計算は 3 次元を参照)。

次に、$R(r)$ について考える。

$$r^2R''(r)+rR'(r)-(\lambda r^2+\mu)R(r)=0$$

より、$\mu=n^2$ を代入して両辺を r^2 で割ると、

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)-(\lambda+\frac{n^2}{r^2})R(r)=0 \tag{4.5}$$

となる。(4.5) は変形された Bessel の方程式であるので一般解は、

$$R(r)=D_1I_n(r\sqrt{\lambda})+D_2K_n(r\sqrt{\lambda}) \quad (D_1,D_2 \text{ は任意定数})$$

となる。ここで、境界条件より $R(r)$ は原点で有界である。しかし、K_n は原点で有界ではないので $D_2\neq 0$ ならば K_n は解にはならない。よって、

$$R(r)=D_1I_n(r\sqrt{\lambda})$$

となる。

以上まとめて、

$$U_{l,n}(r,\theta,z)=I_n\left(r\frac{l\pi}{h}\right)(A\cos n\theta+B\sin n\theta)\sin\frac{l\pi}{h}z.$$

よって、U を

$$U(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}I_n\left(r\frac{l\pi}{h}\right)(A_{l,n}\cos n\theta+B_{l,n}\sin n\theta)\sin\frac{l\pi}{h}z$$

とおくと、U は境界条件を満たす Laplace 方程式の解であると期待される。境界条件より、

$$\Phi(\cos\theta,\sin\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}I_n\left(\frac{l\pi}{h}\right)(A_{l,n}\cos n\theta+B_{l,n}\sin n\theta)\sin\frac{l\pi}{h}z$$

となる。係数 $A_{l,n},B_{l,n}$ を求めるために直交性を用いて求めると、よって、

$$A_{l,n}=\frac{2}{\pi hI_n\left(\frac{l\pi}{h}\right)}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\cos\theta,\sin\theta,z)\cos n\theta\sin\frac{l\pi}{h}zd\theta dz$$
$$B_{l,n}=\frac{2}{\pi hI_n\left(\frac{l\pi}{h}\right)}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\cos\theta,\sin\theta,z)\sin n\theta\sin\frac{l\pi}{h}zd\theta dz$$

となる。

4.2 境界条件を変えた場合の円柱領域の Laplace 方程式の厳密解

4.2.1 境界条件を側面 $=0$, 上面 $=0$ と変えた場合

境界条件を側面 $=0$, 上面 $=0$ と次のように変えた問題、

$$\Delta u = 0 \quad (\text{ in } \Omega), \tag{4.6}$$
$$u = \Phi \quad (z=0), \tag{4.7}$$
$$u(x,y,z) = 0 \quad (\text{on } \Gamma \text{ or } z=h) \tag{4.8}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2<1,\ 0<z<h\}, \quad \Gamma = \text{側面}$$

の厳密解を Fourier の方法で求めていく。まず、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と極座標変換する $(0<r<1, \theta \in [0,2\pi))$。つまり、

$$U(r,\theta,z) \stackrel{\text{def}}{=} u(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

とすると境界条件より、

$$\begin{gathered} U(r,\theta,0) = \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \quad (0 \le r < 1, \theta \in (0,2\pi)) \\ U(1,\theta,z) = 0 \quad (\theta \in [0,2\pi), 0<z<h), \\ U(r,\theta,h) = 0 \quad (0 \le r < 1, \theta \in [0,2\pi)) \end{gathered}$$

となる。そこで、

$$U(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)W(z) \tag{4.9}$$

の形をしていて、恒等的に 0 でないものを探す。

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

より、

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{W''(z)}{W(z)} = 0.$$

これより、

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + r^2\frac{W''(z)}{W(z)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

これは左辺は θ によらず、右辺は r, z によらないので定数である。それを λ とおくと、

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + r^2\frac{W''(z)}{W(z)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda.$$

これより Θ は、

$$\Theta''(\theta) = -\lambda\Theta(\theta)$$

を満たす。

$R(r)$ については、

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{\lambda}{r^2} = -\frac{W''(z)}{W(z)}$$

を満たす。この式は左辺は z によらず、右辺は r によらないので定数である。それを後のことを考えて $-\mu$ とおくと、

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} - \frac{\lambda}{r^2} = -\frac{W''(z)}{W(z)} = -\mu.$$

これより、

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\mu r^2 - \lambda)R(r) = 0, \\ W''(z) = \mu W(z) \end{cases}$$

となる。これから $\lambda, \Theta(\theta)$ は、

$$\begin{cases} \lambda = n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ \Theta(\theta) = C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta \quad (C_1, C_2\ \text{は任意定数}) \end{cases}$$

となる (Θ の計算は 2 次元を参照)。

次に、$W(z)$ について考える。特性方程式は、

$$s^2 = \mu$$

であるから、

$$s = \pm\sqrt{\mu}.$$

$W(z)$ の一般解は、

$$W(z) = Ae^{\sqrt{\mu}z} + Be^{-\sqrt{\mu}z} \qquad (A, B\ \text{は任意定数}).$$

境界条件より、

$$W(h) = Ae^{\sqrt{\mu}h} + Be^{-\sqrt{\mu}h} = 0.$$

となる。これより、

$$B = -Ae^{2\sqrt{\mu}h}$$

なので W は、

$$\begin{aligned} W(z) &= Ae^{\sqrt{\mu}z} + (-Ae^{2\sqrt{\mu}h}e^{-\sqrt{\mu}z}) \\ &= A(e^{\sqrt{\mu}z} - e^{\sqrt{\mu}(2h-z)}) \end{aligned}$$

となる。

更に、$R(r)$ について考える。

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\mu r^2 - \lambda)R(r) = 0$$

に $\lambda = n^2$ を代入すると、

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\mu r^2 - n^2)R(r) = 0 \tag{4.10}$$

となる。(4.10) は Bessel の方程式であるので一般解は、

$$R(r) = D_1J_n(r\sqrt{\mu}) + D_2Y_n(r\sqrt{\mu}) \quad (D_1, D_2 \text{ は任意定数})$$

となる。ここで、境界条件より $R(r)$ は原点で有界である。しかし、Y_n は原点で有界ではないので $D_2 \neq 0$ ならば $R(r)$ は解にはならない。よって、$D_2 = 0$ で

$$R(r) = D_1J_n(r\sqrt{\mu})$$

となる。

また、もう一つの境界条件より、

$$R(1) = D_1J_n(\sqrt{\mu}) = 0.$$

従って、$\sqrt{\mu}$ は J_n の零点である。ここで、J_n の正の零点全体を

$$\beta_{1,n} < \beta_{2,n} < \cdots < \beta_{m,n} < \cdots \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots; m = 1, 2, 3, \cdots)$$

とすると、

$$^{\exists}m \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \mu = (\beta_{m,n})^2.$$

これより、

$$R(r) = D_1J_n(r\beta_{m,n})$$

となる。以上より、R, Θ, W を合わせると、

$$U_{m,n}(r, \theta, z) = (e^{\beta_{m,n}z} - e^{\beta_{m,n}(2h-z)})J_n(r\beta_{m,n})(C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta).$$

よって、U を

$$U(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(e^{\beta_{m,n}z}-e^{\beta_{m,n}(2h-z)})J_n(r\beta_{m,n})(A_{m,n}\cos n\theta+B_{m,n}\sin n\theta)$$

とおくと、U は Γ と $z=1$ での境界条件を満たす Laplace 方程式の解であると期待される。ここで境界条件より、

$$\Phi(r\cos\theta,r\sin\theta,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1-e^{\beta_{m,n}2h})J_n(r\beta_{m,n})(A_{m,n}\cos n\theta+B_{m,n}\sin n\theta)$$

となる。係数 $A_{m,n}$ を求めるために、直交性を用いる。$\Phi(r\cos\theta,r\sin\theta,0)$ の両辺に $rJ_{n'}(r\beta_{m',n'}),\cos n'\theta$ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 rJ_n(r\beta_{m,n})\Phi(r\cos\theta,r\sin\theta,0)\cos n\theta drd\theta &= \frac{1}{2}(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2\times\pi\times A_{m,n}\times(1-e^{\beta_{m,n}2h})\\ &= \frac{\pi}{2}(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2(1-e^{\beta_{m,n}2h})A_{m,n}\\ &(n=n',m=m' \text{ のときだけ残る}).\end{aligned}$$

よって、

$$A_{n,m}=\frac{2}{\pi(1-e^{\beta_{m,n}2h})(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 rJ_n(r\beta_{m,n})\Phi(r\cos\theta,r\sin\theta,0)\cos n\theta drd\theta,$$
$$B_{n,m}=\frac{2}{\pi(1-e^{\beta_{m,n}2h})(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 rJ_n(r\beta_{m,n})\Phi(r\cos\theta,r\sin\theta,0)\sin n\theta drd\theta$$

となる。

4.2.2 境界条件を側面 $=0$, 底面 $=0$ と変えた場合の Laplace 方程式

境界条件を側面 $=0$, 底面 $=0$ と次のように変えた問題、

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{ in }\Omega), &(4.11)\\ u &= \Phi \quad (z=h), &(4.12)\\ u(x,y,z) &= 0 \quad (\text{on }\Gamma\text{ or }z=0) &(4.13)\end{aligned}$$

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2<1,\ 0<z<h\},\quad \Gamma=\text{側面}$$

の厳密解を Fourier の方法で求めていく (同様の計算がある場合は省略していく)。まず、

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

と極座標変換する ($0 < r < 1, \theta \in [0, 2\pi)$)。つまり、

$$U(r,\theta,z) \overset{\text{def}}{=} u(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

とすると境界条件より、

$$\begin{gathered}
U(r,\theta,h) = \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta, h) \quad (0 \leq r < 1, \theta \in (0,2\pi)) \\
U(1,\theta,z) = 0 \quad (\theta \in [0,2\pi), 0 < z < h), \\
U(r,\theta,0) = 0 \quad (0 \leq r < 1, \theta \in [0,2\pi))
\end{gathered}$$

となる。そこで、

$$U(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)W(z) \tag{4.14}$$

の形をしていて、恒等的に 0 でないものを探す。

Θ は、

$$\Theta''(\theta) = -\lambda\Theta(\theta)$$

を満たす。

$R(r), W(z)$ については、

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\mu r^2 - \lambda)R(r) = 0 \\ W''(z) = \mu W(z) \end{cases}$$

となる (λ, μ の置き方については、上面 $= 0$ の場合と同様)。

$\lambda, \Theta(\theta)$ は、

$$\begin{cases} \lambda = n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ \Theta(\theta) = C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \end{cases}$$

となる (Θ の計算は 2 次元を参照)。

次に、$W(z)$ について考える。特性方程式は、

$$s^2 = \mu$$

であるから、

$$s = \pm\sqrt{\mu}.$$

$W(z)$ の一般解は、

$$W(z) = Ae^{\sqrt{\mu}z} + Be^{-\sqrt{\mu}z} \qquad (A, B \text{ は任意定数}).$$

境界条件より、

$$W(0) = A + B = 0$$

となる。これより、

$$B = -A$$

なので W は、

$$\begin{aligned} W(z) &= Ae^{\sqrt{\mu}z} + (-Ae^{-\sqrt{\mu}z}) \\ &= A(e^{\sqrt{\mu}z} - e^{-\sqrt{\mu}z}) \end{aligned}$$

となる。

更に、$R(r)$ については上面 $= 0$ の場合と同様で、

$$R(r) = D_1 J_n(r\sqrt{\mu}) \quad (D_1 \text{ は任意定数})$$

となる。

また、

$$R(1) = D_1 J_n(\sqrt{\mu}) = 0.$$

従って、$\sqrt{\mu}$ は J_n の零点である。ここで、J_n の正の零点全体を

$$\beta_{1,n} < \beta_{2,n} < \cdots < \beta_{m,n} < \cdots \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots ; m = 1, 2, 3, \cdots)$$

とすると、

$$^{\exists}m \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \mu = (\beta_{m,n})^2.$$

これより、

$$R(r) = D_1 J_n(r\beta_{m,n})$$

となる。以上より、R, Θ, W を合わせると、

$$U_{m,n}(r, \theta, z) = (e^{\beta_{m,n}z} - e^{-\beta_{m,n}z}) J_n(r\beta_{m,n})(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta).$$

よって、U を

$$U(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (e^{\beta_{m,n}z} - e^{-\beta_{m,n}z}) J_n(r\beta_{m,n})(A_{m,n} \cos n\theta + B_{m,n} \sin n\theta)$$

とおくと、U は Γ と $z = 0$ での境界条件を満たす Laplace 方程式の解であると期待される。ここで境界条件より、

$$\Phi(r\cos\theta, r\sin\theta, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (e^{\beta_{m,n}h} - e^{-\beta_{m,n}h}) J_n(r\beta_{m,n})(A_{m,n} \cos n\theta + B_{m,n} \sin n\theta)$$

となる。係数 $A_{m,n}$ を求めるために、直交性を用いる。$\Phi(r\cos\theta, r\sin\theta, h)$ の両辺に $rJ_{n'}(r\beta_{m',n'}), \cos n'\theta$ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1} rJ_n(r\beta_{m,n})\Phi(r\cos\theta, r\sin\theta, h)\cos n\theta dr d\theta &= \frac{\pi}{2}(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2(e^{\beta_{m,n}h} - e^{-\beta_{m,n}h})A_{m,n} \\ &(n = n', m = m' \text{ のときだけ残る}).\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}A_{n,m} &= \frac{2}{\pi(e^{\beta_{m,n}h} - e^{-\beta_{m,n}h})(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1} rJ_n(r\beta_{m,n})\Phi(r\cos\theta, r\sin\theta, h)\cos n\theta dr d\theta, \\ B_{n,m} &= \frac{2}{\pi(e^{\beta_{m,n}h} - e^{-\beta_{m,n}h})(J_{n+1}(\beta_{m,n}))^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1} rJ_n(r\beta_{m,n})\Phi(r\cos\theta, r\sin\theta, h)\sin n\theta dr d\theta\end{aligned}$$

となる。

関連図書

[1] フランク・ボウマン, ベッセル函数入門, 日新出版 (1963).

[2] 青木利夫・樋口貞一, 複素関数論, 培風館 (1976).

[3] 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論 , 岩波書店 (1954).

[4] 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論 —応用編—, 岩波書店 (1954).