円盤での波動方程式の差分法

中西 謙太

2005年2月21日

– Typeset by FoilTEX –

2次元波動方程式

未知関数$u(r,\theta,t)$（r, θは空間座標,tは時刻。$0 \le r \le 1$, $0 \le$
関する2次元波動方程式。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

境界条件(Dirichlet境界条件)

$$u(1,\theta,t) = 0 \quad (t \ge 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

初期条件

$$u(r,\theta,0) = f(r,\theta) \quad (0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = g(r,\theta) \quad (0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le$$

差分法（陽解法）

h_r、h_θ、τ をそれぞれ r、θ、t 方向の格子間隔、$r_i = ih_r$、θ
の近似値を $u_{i,j}^n$、(1) の微分方程式の各項を中心差分近似、
ると、

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_r^2}$$

$$+\frac{1}{r_i}\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_r} + \frac{1}{r_i^2}\frac{u_{i,j+1}^n}{}$$

$$(1 \le i \le N_r - 1,\ 1 \le j \le N$$

$\frac{\tau}{h_r} = \lambda_r$、$\frac{\tau}{h_\theta} = \lambda_\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= 2(1-\lambda_r^2 - \frac{\lambda_\theta^2}{r_i^2})u_{i,j}^n + \lambda_r^2(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{1}{r_i}\frac{\tau}{2h} \\ &\quad + \frac{\lambda_\theta^2}{r_i^2}(u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) - u_{i,j}^{n-1} \\ &\qquad \bigl(1 \le i \le N_r - 1,\ 1 \le j \le N_\theta - 1,\ n \ge 1\bigr) \end{aligned}$$

初期条件より、

$$u_{i,j}^0 = f_{i,j} \qquad \bigl(0 \le i \le N_r,\ 0 \le j \le N_\theta\bigr)$$

差分法（半陰スキーム）

θ 方向の微分係数を陰的に扱う。

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{h_r^2} + \frac{1}{r_i}$$

$$+\frac{1}{r_i^2}\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_\theta^2}$$

$$(1 \le i \le N_r - 1,\ 1 \le j \le$$

ただし、$u_{i,N_\theta}^n = u_{i,0}^n$，$u_{i,-1}^n = u_{i,N_\theta-1}^n$

$$A_i := (1 + \frac{2\lambda_\theta^2}{r_i^2})I - \frac{\lambda_\theta^2}{r_i^2}J \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots \\ & & \ddots \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$b^n = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda_r^2)u_{i,0}^n + \lambda_r^2[(1+\frac{h_r}{2r_i})u_{i+1,0}^n + (1-\frac{h_r}{2r_i})u_{i}^{n} \\ \vdots \\ 2(1-\lambda_r^2)u_{i,j}^n + \lambda_r^2[(1+\frac{h_r}{2r_i})u_{i+1,j}^n + (1-\frac{h_r}{2r_i})u_{i}^{n} \\ \vdots \\ 2(1-\lambda_r^2)u_{i,N_{\theta-1}}^n + \lambda_r^2[(1+\frac{h_r}{2r_i})u_{i+1,N_{\theta-1}}^n + (1-\frac{h_r}{2r_i}) \end{pmatrix}$$

$$U_i^{n+1} := (u_{i,0}^{n+1}, \cdots, u_{i,N\theta-1}^{n+1})^T$$

とすると、

$$A_i U_i^{n+1} = b_i^n - U_i^{n-1} (i = 1, 2, \cdots, N_r - 1)$$

という連立１次方程式が導かれる。また原点は、

$$u_{0,0}^{n+1} = 2(1 - 2\lambda_r^2) u_{0,0}^n + \frac{4\lambda_r^2}{N_\theta} \sum_{j=0}^{N_\theta - 1} u_{1,j}^n - u_{0,0}^{n-}$$

実験（厳密解との比較）

厳密解uを

$$u(r,\theta,t) = J_0(\nu_{0,1}r)\cos(\nu_{0,1}t) + \frac{1}{\nu_{1,1}}J_1(\nu_{1,1}r)\cos\theta\,\mathrm{s}$$

とした。初期条件$\phi(r,\theta)$、$\psi(r,\theta)$は、

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta) &= J_0(\nu_{0,1}r) \qquad (0 \le r \le 1, 0 \le \theta\\ \psi(r,\theta) &= J_1(\nu_{1,1}r)\cos\theta \quad (0 \le r \le 1, 0 \le \theta\end{aligned}$$

(ただし、$\nu_{n,m}$は$J_n(r) = 0$のm番目の根、J_nはn次第一種

波動方程式（半陰スキーム）グラフと厳密解との誤差を表示

安定性条件（陽解法）

安定性条件は

$$\lambda_r^2 + \frac{1}{r_i^2}\lambda_\theta^2 \leq 1$$

であると予想される。つまり安定条件は

$$\lambda_r^2 + N_r^2\lambda_\theta^2 \leq 1$$

と書き換えることができる。

実際に $N_r = 20$、$N_\theta = 100$、$\tau = 0.0031$、$\lambda_r^2 + N_r^2\lambda_\theta^2 = 0.$
$N_r = 20$、$N_\theta = 100$、$\tau = 0.0032$、$\lambda_r^2 + N_r^2\lambda_\theta^2 = 1.041617$

安定性条件（半陰スキーム）

このスキームが安定性の条件として、

$$2 - 2\lambda_r^2 \geq 0$$

であると予想される。つまり、

$$\lambda_r^2 \leq 1$$

実際に、$N_r = 20$、$N_\theta = 100$、$\tau = 0.045$、$\lambda_r^2 = 0.81 < 1$ で
$N_r = 20$、$N_\theta = 100$、$\tau = 0.055$、$\lambda_r^2 = 1.21 > 1$ で不安定。

原点（付録）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

を元に戻して、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ここで半径h_r, 中心が原点の円を描くとすると、この円がx
おける値は$u_{1,0}$,$u_{1,\frac{N_\theta}{4}}$, $u_{1,\frac{N_\theta}{2}}$,$u_{1,\frac{3N_\theta}{4}}$, 中心の値は$u_{0,0}$となる。

をして、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0,n\tau) = \frac{u_{1,0} - 2u_{0,0} + u1,\frac{N_\theta}{2}}{h_r^2} + O(h_r$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0,n\tau) = \frac{u_{1,\frac{N_\theta}{4}} - 2u_{0,0} + u_{1,\frac{3N_\theta}{4}}}{h_r^2} + O(h_r$$

よってこれから、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0,n\tau) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0,n\tau) = \frac{u_{1,0} + u_{1,\frac{N_\theta}{2}} + u_{1,\frac{N_\theta}{2}} + u_{1,\frac{3N}{4}}}{h_r^2}$$

と導くことができる。そこで x 軸,y 軸を少しだけ回転させ

返し行うことにより、

$$
\begin{aligned}
\Delta u(0,0,k\tau) &= \frac{u_{1,0} + u_{1,\frac{N_\theta}{4}} + u_{1,\frac{N_\theta}{2}} u_{1,\frac{3N_\theta}{4}} - 4u_{0,0}}{h_r^2} + O \\
&= \frac{u_{1,1} + u_{1,\frac{N_\theta}{4}+1} + u_{1,\frac{N_\theta}{2}+1} + u_{1,\frac{3N_\theta}{4}+1} -}{h_r^2} \\
&= \frac{4(\frac{1}{N_\theta}\sum_{j=0}^{N_\theta - 1} u_{1,j}^n - u_{0,0}^n)}{h_r^2} + O(h_r)^2
\end{aligned}
$$

となる。そこで、

$$
\frac{u_{0,0}^{n+1} - 2u_{0,0}^n + u_{0,0}^{n-1}}{\tau^2} = \frac{4(\frac{1}{N_\theta}\sum_{j=0}^{N_\theta - 1} u_{1,j}^n - u_{0,}^n}{h_r^2}
$$

整理すると、

$$u_{0,j}^{n+1} = 2(1 - 2\lambda_r^2)u_{0,0}^{n} + \frac{4\lambda_r^2}{N_\theta}\sum_{j=0}^{N_\theta - 1} u_{1,j}^{n} - u_{0,0}^{n-}$$

という差分方程式が導かれる。