

円板領域, 円の外部領域における代用電荷法の研究
通常スキームと不変スキームの比較

明治大学大学院
理工学研究科 基礎理工学専攻 数学系
内藤 智
指導教員 桂田 祐史 助教授

2005年2月25日

目次

第 1 章	代用電荷法 “通常スキームと不変スキーム”	3
1.1	はじめに	3
1.2	CSM 通常スキーム	4
1.3	CSM 不変スキーム	5
1.4	不変スキームの不変性の証明	5
第 2 章	円板領域における Laplace 方程式の境界値問題	9
2.1	問題定義	9
2.2	CSM 通常スキームによる円板領域問題の定理	9
2.2.1	定理の証明の準備	12
2.2.2	定理の証明	13
2.3	CSM 不変スキームによる円板領域問題の定理	18
2.3.1	定理の証明	19
2.4	双極子シミュレーション	23
2.4.1	不変双極子スキームの不変性の証明	25
2.5	数値実験	27
2.5.1	u が調和多項式であるときの通常スキームと不変スキームの比較	29
2.5.2	f が対数ポテンシャルのときの通常スキームと不変スキームの比較	34
2.5.3	領域 Ω の外部での収束	39
2.5.4	拘束点と電荷点の配置方法	41
2.5.5	円板領域における Laplace 方程式の Neumann 問題	46
第 3 章	円の外部領域における Laplace 方程式の境界値問題	48
3.1	問題定義	48
3.2	CSM 通常スキームによる円の外部領域問題の定理	48
3.2.1	定理の証明	51
3.3	CSM 不変スキームによる円の外部領域問題の定理	55
3.3.1	定理の証明	57
3.4	数値実験	60
3.4.1	$u(re^{i\theta}) = (1/r)^m \cos m\theta$ のときの通常スキームと不変スキームの比較	61
3.4.2	f が対数ポテンシャルのときの通常スキームと不変スキームの比較	66
3.4.3	領域 Ω の外部での収束	70
3.4.4	拘束点と電荷点の配置方法	72
3.4.5	円の外部領域における Laplace 方程式の Neumann 問題	75

付録 A	円板領域問題で用いた定理の紹介, 補題の証明とソースプログラム	77
A.1	調和関数に関する最大値原理	77
A.2	円板領域における Laplace 方程式 Dirichlet 問題の厳密解	77
A.3	円板領域における Laplace 方程式 Neumann 問題の厳密解	78
A.4	補題 2.2.1 の証明	79
A.5	補題 2.2.2 の証明	80
A.6	補題 2.2.3 の証明	81
A.7	ソースプログラム	84
付録 B	円の外部領域問題で用いた定理の紹介, 補題の証明とソースプログラム	103
B.1	円の外部領域に関する最大値原理	103
B.2	円の外部領域における Laplace 方程式 Dirichlet 問題の厳密解	105
B.3	補題 3.2.1 の証明	106
B.4	補題 3.2.2 の証明	107
B.5	ソースプログラム	109

第1章 代用電荷法“通常スキームと不変スキーム”

1.1 はじめに

代用電荷法 (Charge Simulation Method) は 基本解法 (Fundamental Solution Method) とも呼ばれており、Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = f \end{cases}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

のような境界値問題の近似解を構成するための一つのアルゴリズムである。

主に電気工学の分野で 1970 年代初め頃から利用され、経験則からその誤差が「指数関数的に減少する」ということが知られていた。

代用電荷法のアルゴリズムは、以下の 2 つが考えられている。この論文では、西田 [8] に倣い“通常スキーム”と“不変スキーム”と呼ぶ。前者は、従来からある一般的な近似スキームであり、後者は、室田 [11] により提案されたもので“通常スキーム”を不変性を持つ形に改良した近似スキームである。詳しいアルゴリズムは次節で説明するが、いずれも非常にシンプルであり、また、非常に良い結果をもたらす。従来から、Laplace 方程式の境界値問題のすぐれた解法とされて来た境界要素法にも勝る場合が出てくる。

円板領域問題における通常スキームは、M. Katsurada and H. Okamoto [3], M. Katsurada [4] により、数学的に解析されている。また、それ以外の領域についても、桂田 [5] [6] (Jordan 領域における漸近誤差解析), 西田 [8] (楕円領域問題), 室田 [12] (円環領域問題) 等により研究されているが、通常スキームと異なり不変スキームでは、基本的な結果の証明も発表されていないものがある。そのためこの論文では、円板領域問題と円の外部領域問題において通常スキームと不変スキームを数学的、数値的に解析する。

この論文は、3 章で構成されている。

第 1 章では、通常スキームと不変スキームのアルゴリズムの説明と不変性の証明をしている。

第 2 章では、円板領域における Laplace 方程式の境界値問題の通常スキームと不変スキームの収束証明と数値実験を行っている。円板領域問題については M. Katsurada and H. Okamoto [3], M. Katsurada [4], 室田 [11] を参考にして、それらでは省略されたケースについて、近似解の存在、誤差評価についての定理の証明や数値実験まで手を伸ばし、解析している。

第 3 章では、円の外部領域における Laplace 方程式の境界値問題の通常スキームと不変スキームの収束証明と数値実験を行っている。円の外部領域問題については通常スキーム不変スキームとも、近似解の存在や誤差評価についての定理が結果が発表されていないため、ここでは詳しい証明を与え、また数値実験により確認した。

付録では、第 2 章、第 3 章で用いた補題、定理の証明と数値実験のソースプログラムを載せている。

以後、代用電荷法 (Charge Simulation Method) を “CSM” と書く。

1.2 CSM 通常スキーム

2 次元領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$(1.2) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

を考える。ただし、 Γ は Ω の境界であり、 f は Γ で定義された連続関数とする。

CSM でこの問題を解くために、まず最初に、 Ω の外部から $\{y_l\}_{l=1}^N$ (電荷点 “charge points” と呼ぶ) を適当に選んで、それらの点に適切な電荷 $\{Q_l\}_{l=1}^N$ を置き、それらの電荷の作る電場の静電ポテンシャルを近似解として採用する。

つまり、次の関数空間 $X^{(N)}$ の中で近似解 $u^{(N)}$ を探す。

$$(1.3) \quad X^{(N)} = X^{(N)}\{y_l\} = \left\{ \sum_{l=1}^N Q_l E(x, y_l); (Q_1, Q_2, \dots, Q_N) \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

ここで $E(x, y)$ は、ラプラシアンの基本解である。

$$(1.4) \quad E(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log |x - y|.$$

$\{Q_l\}_{l=1}^N$ の値は境界条件を近似的に満足するように選んだ定数である。すなわち、 N 個の点 $\{x_k\}_{k=1}^N$ (拘束点または標本点 “collocation points” と呼ぶ) を Γ 上にとり、次の条件で $\{Q_l\}_{l=1}^N$ を定める。

$$(1.5) \quad u^{(N)}(x_k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x_k - y_l| = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

この (1.5) は次のように書き直せる。

$$(1.6) \quad G\vec{Q} = \vec{f}.$$

ただし、 $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)^T$, $\vec{f} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T$, G は $G_{kl} = E(x_k, y_l)$ ($1 \leq k, l \leq N$) を要素とする $N \times N$ 行列である。

この CSM の近似スキームを以後 “通常スキーム” と呼ぶ。

1.3 CSM 不変スキーム

通常スキーム以外に、室田 [11] により不変性を保った近似スキームが提唱されている。

2次元領域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (1.2) を考える。

通常スキームにより定められる近似解 $u^{(N)}$ は、座標のスケール変換や境界条件の原点移動に対して「不変」でない。

まず、電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{\Omega}\}$ を適当に選んで、

$$(1.7) \quad u^{(N)}(x) = Q_0 + \sum_{l=1}^N Q_l E(x, y_l) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x - y_l|$$

の形の近似式を設定する。

係数 $\{Q_l\}_{l=0}^N$ を N 個の拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \Gamma$ における拘束条件

$$(1.8) \quad u^{(N)}(x_k) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x_k - y_l| = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

と制約条件と呼ばれる条件

$$(1.9) \quad \sum_{l=1}^N Q_l = 0$$

で定める。

(1.8), (1.9) は、次式のように書き直せる。

$$(1.10) \quad \tilde{G} \vec{Q}_o = \vec{f}_o.$$

ただし、 $\vec{Q}_o = (Q_0, Q_1, \dots, Q_N)^T$, $\vec{f}_o = (0, f(x_1), \dots, f(x_N))^T$, \tilde{G} は、

$$(1.11) \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix}$$

という $(N+1) \times (N+1)$ 行列とする。ここで、 G は、通常スキームの係数行列、 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ である。

この CSM の近似スキームを以後“不変スキーム”と呼ぶ。

1.4 不変スキームの不変性の証明

2次元領域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (1.2) における不変スキームの近似解 $u^{(N)}$ は、座標のスケール変換や境界条件の原点移動に対して不変である。したがって、以下の意味で定理が成り立つ。

定理 1.4.1. 2次元領域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (1.2) の $x_k \in \Gamma (k = 1, 2, \dots, N), y_l \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{\Omega}\} (l = 1, 2, \dots, N)$ を拘束点、電荷点とする不変スキームによる近似解 $u^{(N)}$ が存在すると仮定する。

このとき、 $u^{(N)}, f'$ を $u^{(N)}(x') = u^{(N)}(x), f'(x) = f(x), x' = ax$ で定めると、 $u^{(N)}$ は、境界値問題

$$(1.12) \quad \begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{in } \Omega' = \{x'; \in \Omega\} \\ u' = f' & \text{on } \Gamma' = \partial\Omega' \end{cases}$$

の不変スキームの近似解である。ただし、拘束点、電荷点がそれぞれ $x' = ax, y' = ay$ とする。

また、 $u^{(N)}, f'$ を $u^{(N)}(x) = u^{(N)}(x) + c, f' = f + c$ で定めると、 $u^{(N)}$ は、境界値問題

$$(1.13) \quad \begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{in } \Omega \\ u' = f' & \text{on } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

の不変スキームの近似解である。

定理 1.4.1 の証明.

座標のスケール変換を施して変換された関数 (1.12) を考える。

ここで $f'(x', y') = f(x, y)$ つまり、 $f'(x', y') = f\left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{a}\right)$ である。

$x'_k = ax_k, y'_l = ay_l$ のとき、 $x'_k \in \Gamma' (k = 1, 2, \dots, N), y'_l \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{\Omega}'\} (l = 1, 2, \dots, N)$ を拘束点、電荷点とする CSM 不変スキームの近似解は、

$$(1.14) \quad u^{(N)}(x') = Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \log |x' - y'_l|.$$

と書ける。ただし、 $\{Q'_l\}_{l=0}^N$ は拘束条件 $u^{(N)}(x'_k) = f'(x'_k)$ と制約条件 $\sum_{l=1}^N Q'_l = 0$ で定める。

ここで、

$$(1.15) \quad \begin{aligned} u^{(N)}(x') &= Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \log |x' - y'_l| \\ &= Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \log |a(x - y_l)| \\ &= Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \log |x - y_l| - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \log |a| \\ &= Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \log |x - y_l|. \end{aligned}$$

$f'(x', y') = f(x, y)$ より、

$$Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \log |x_k - y_l| = f'(x'_k) = f(x_k).$$

一方、

$$Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x_k - y_l| = f(x_k).$$

同じ連立方程式の形であるので、 $Q'_0 = Q_0$, $Q'_l = Q_l (l = 1, 2, \dots, N)$ である。したがって、

$$u'^{(N)}(x') = Q_0 - \sum_{l=1}^N Q_l E(x', y'), \quad u'^{(N)}(x'_k) = f(x'_k) (k = 1, 2, \dots, N)$$

となり、 $u'^{(N)}$ は (1.12) の不変スキームの近似解である。

次に、境界条件の原点移動を施して変換された関数 (1.13) を考える。

$x_k \in \Gamma (k = 1, 2, \dots, N)$, $y_l \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{\Omega}\} (l = 1, 2, \dots, N)$ を拘束点、電荷点とする CSM 不変スキームの近似解は、

$$(1.16) \quad u'^{(N)}(x) = Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \log |x - y_l|.$$

と書ける。ただし、 $\{Q'_l\}_{l=0}^N$ は拘束条件 $u'^{(N)}(x_k) = f'(x_k)$ と制約条件 $\sum_{l=1}^N Q'_l = 0$ で定める。

拘束条件を書き直すと、

$$\tilde{G}\vec{Q}'_o = \vec{f}'_o$$

$\vec{Q}'_o = (Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_N)^T$, $\vec{f}'_o = (0, f'(x_1), \dots, f'(x_N))^T$ であり、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \vec{Q}'_o = \vec{f}'_o$$

となる。

$f'(x, y) = f(x, y) + c$ より、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \vec{Q}'_o = \vec{f}'_o = \vec{f}_o + c \cdot \mathbf{1}^T.$$

一方、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \vec{Q}_o = \vec{f}_o.$$

同じ連立方程式の形であるので、 $Q'_0 = Q_0 + c$, $Q'_l = Q_l (l = 1, 2, \dots, N)$ である。したがって、

$$u'^{(N)}(x') = Q_0 + c - \sum_{l=1}^N Q_l E(x', y'), \quad u'^{(N)}(x'_k) = f(x'_k) (k = 1, 2, \dots, N)$$

となり、 $u'^{(N)}$ は (1.13) の不変スキームの近似解である。

以上より、不変性を有している。

□

注意 1.4.1. 通常スキームでは、座標のスケール変換に対して (1.9) の制約条件が無い
ため、(1.15) のような変形が出来ない。よって、 $Q'_0 \neq Q_0, Q'_l \neq Q_l (l = 1, 2, \dots, N)$ である。また、
座標のスケール変換に対して $G\vec{Q}' = \vec{f}' + c \cdot \mathbf{1}^T$ となり、 $Q'_0 = Q_0 + c, Q'_l = Q_l (l = 1, 2, \dots, N)$
ということは証明出来ない。

第2章 円板領域における Laplace 方程式の境界値問題

2.1 問題定義

2次元円板領域

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < \rho\}$$

における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$(2.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

を考える。ただし、 Γ は Ω の境界であり、 f は Γ で定義された連続関数とする。

以後 \mathbb{R}^2 と複素平面 \mathbb{C} を同一視する。

2.2 CSM 通常スキームによる円板領域問題の定理

$R > \rho$ なる R と $N \in \mathbb{N}$ をとり、拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N$ と電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N$ を以下のように定義する。

$$(2.2) \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), \quad i = \sqrt{-1},$$

$$(2.3) \quad x_k = \rho \omega^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

$$(2.4) \quad y_l = R \omega^{l-1} \quad (l = 1, 2, \dots, N).$$

CSM 通常スキームに関して次のことが成り立つ。

定理 2.2.1 (M. Katsurada and H. Okamoto [3] Theorem 1). 任意の R, ρ ($R > \rho > 0$), $N \in \mathbb{N}$ に対して、 $R^N - \rho^N \neq 1$ が成り立つならば、行列 $G = (E(x_k, y_l))$ は正則行列である。すなわち、任意の f に対して (1.5) を満たす $u^{(N)} \in X^{(N)}$ が一意に存在する。

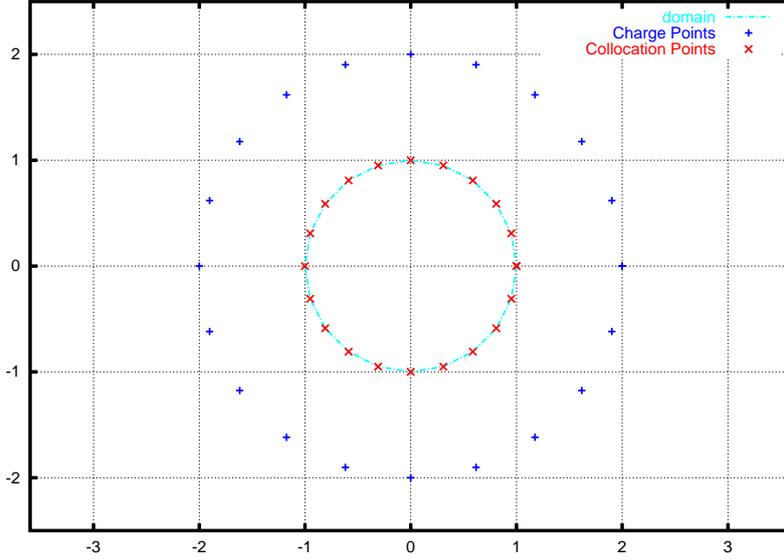


図 2.1: 円板領域, $R = 2$, $\rho = 1$, $N = 20$ のときの拘束点と電荷点

定理 2.2.2 (M. Katsurada and H. Okamoto [3] Theorem 2). R, ρ ($R > \rho > 0$), $N \in \mathbb{N}$ が $R^N - \rho^N \neq 1$, $R \neq 1$ を満たし, $r_0 (> \rho)$ が存在して, $\Omega' = B(0; r_0)$ に対して u が $u \in C(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$, $\Delta u = 0$ in Ω' となるように拡張できるとする。
このとき、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{\frac{\rho}{r_0}} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 < R^2 \text{ のとき}) \\ CN \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 = R^2 \text{ のとき}) \\ C \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 > R^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるような R, ρ, r_0 のみで定まる 正定数 C が存在する。

注意 2.2.1. $R = 1$ とすると、CSM による近似解は厳密解に収束するとは限らない。

なぜなら、 $\{y_l\}_{l=1}^N$ と $\{Q_l\}_{l=1}^N$ が何であっても $u^{(N)}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x - y_l|$ は、 $u^{(N)}(0) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |y_l| = 0$ を満たすので、 $u^{(N)}$ は原点で 0 でない調和関数を近似することが出来ない。

注意 2.2.2. 定理 2.2.2 の仮定より、厳密解は複素 Fourier 級数を用いて、

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} \quad (x = re^{i\theta} \in \Omega),$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$u'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^{|n|} e^{in\theta} \quad (x = re^{i\theta} \in \Omega'),$$

$$f'_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(r_0 e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

と書ける。

$r = \rho$ とすると Fourier 係数の一意性から、

$$f_n = f'_n \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{|n|} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

また、

$$|f'_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_0 e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r_0 e^{i\theta}) e^{-in\theta}| d\theta \leq \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)|$$

であるから、

$$(2.5) \quad |f_n| \leq \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{|n|} \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

このように Fourier 係数が等比数列的に 0 収束するというのは非常に強い条件 (実は、 f が実解析的であるということと同値になる) であるが、単に収束を証明するだけならば f の条件を弱めることが出来る。

定理 2.2.3 (M. Katsurada [4] Theorem 2.3). $\{f_n\}$ を境界値 f のフーリエ係数とする。

1. フーリエ級数 $\sum f_n e^{in\theta}$ が絶対収束するならば、近似解 $u^{(N)}$ は厳密解 u に一様収束する。すなわち、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

2. $\alpha > 1$ なる定数 α に対して、 $f_n = O(|n|^{-\alpha})$ ($n \rightarrow \pm\infty$) ならば、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| = O(N^{-\alpha+1}) \quad (N \rightarrow \infty).$$

2.2.1 定理の証明の準備

$L_k, \varphi_p^{(N)}(z)$ を以下のように定義する。

$$(2.6) \quad L_k = E(\rho, R\omega^k) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$(2.7) \quad \varphi_p^{(N)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} E(z, R\omega^k) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \cup_{k=0}^{N-1} \{R\omega^k\}, p \in \mathbb{Z}).$$

一般に、ある数列 $\{c_j\}_{j=0}^{N-1}$ に対して、

$$(2.8) \quad c_{kl} = c_j \quad (j = l - k \bmod N)$$

を満たす行列 $C = (c_{kl})$ を巡回行列 (circulant) という。ただし、 $a \bmod b$ は a を b で割った余りをあらわす。

任意の巡回行列は、以下の補題に示すように対角化することが出来る。

N 次行列 $W = (W_{kl})$ を

$$(2.9) \quad W_{kl} = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{(k-1)(l-1)} \quad (k, l = 1, 2, \dots, N)$$

で定義すると、行列 W はユニタリ行列である。すなわち、

$$(2.10) \quad W^* = W^{-1}, \quad WW^* = I$$

が成り立つ。ここで W^* は W の Hermite 共役をあらわす。 W は離散 Fourier 変換 (discrete Fourier transform) と呼ばれる。

補題 2.2.1 (巡回行列の離散 Fourier 変換による対角化). 任意の巡回行列 $C = (c_{kl})$, $c_{kl} = c_j \quad (j = l - k \bmod N)$ に対して、

$$(2.11) \quad W^{-1}CW = \sqrt{N} \text{diag}[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}]$$

が成り立つ。ただし $\gamma_{l-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} c_p \omega^{p(l-1)}$ である。

また、 $\gamma_j \neq 0 (j = 0, 1, \dots, N-1)$ のとき C は正則で、

$$(2.12) \quad (C^{-1})_{kl} = \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\gamma_p} \quad (k, l = 1, 2, \dots, N)$$

が成り立つ。

この補題は伊理 [2] の第 1 章を参考にした。証明は付録 A を参照せよ。

$\varphi_p^{(N)}(z)$ については次が成り立つ。

補題 2.2.2. $z = re^{i\theta}$ ($r < R$) とするとき、

$$\varphi_p^{(N)}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |z^N - R^N| & (p \equiv 0 \pmod{N}) \\ \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{r}{R}\right)^{|m|} e^{im\theta} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$\varphi_p^{(N)}$ は p について周期的である。

証明は付録 A を参照せよ。

2.2.2 定理の証明

M. Katsurada and H. Okamoto [3] を参考に、少し手を加えて証明する。

定理 2.2.1 の証明.

行列 G については、

$$(2.13) \quad G_{kl} = E(x_k, y_l) = E(\rho\omega^k, R\omega^l) = E(\rho, R\omega^{l-k}) = L_{l-k} \quad (1 \leq k, l \leq N).$$

すなわち、 G は巡回行列である。つまり、

$$(2.14) \quad G = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 & \dots & L_{N-1} \\ L_{N-1} & L_0 & \dots & L_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1 & L_2 & \dots & L_0 \end{pmatrix}.$$

補題 2.2.1 の (2.12) を $C = G$ として用いる。

(2.7) より $\sqrt{N} \cdot \gamma_{l-1} = \varphi_{l-1}^{(N)}(\rho)$ と書くことが出来るので、

$$(2.15) \quad W^{-1}GW = \text{diag}[\varphi_0^{(N)}(\rho), \varphi_1^{(N)}(\rho), \dots, \varphi_{N-1}^{(N)}(\rho)]$$

となる。

$$\det G = \det W^{-1}GW = \prod_{p=0}^{N-1} \varphi_p^{(N)}(\rho)$$

であるが、補題 2.2.2 より、 $\varphi_p^{(N)}(\rho) > 0$ ($p = 1, 2, \dots, N-1$), $\varphi_0^{(N)}(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \log |\rho^N - R^N|$ なので、

$$\det G \neq 0 \iff \varphi_0^{(N)}(\rho) \neq 0 \iff R^N - \rho^N \neq 1.$$

定理 2.2.1 が導かれた。

□

定理 2.2.2 の証明.

ノルム $\|\cdot\|_{\infty,r}$ を以下のように定義する。

$$\|v\|_{\infty,r} = \sup_{|x| \leq r} |v(x)|.$$

補題 2.2.1 を $C = G$ として用いる。

(2.7) より $\sqrt{N} \cdot \gamma_{l-1} = \varphi_{l-1}^{(N)}(\rho)$ と書くことが出来るので、

$$(G^{-1})_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)}$$

である。

$\vec{Q} = G^{-1} \cdot \vec{f}$ において、 $\vec{Q} = (Q_k)$, $\vec{f} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T = (u(\rho), u(\rho\omega), \dots, u(\rho\omega^{N-1}))^T$ なので、

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{l=1}^N (G^{-1})_{kl} f_l = \sum_{l=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right) u(\rho\omega^{l-1}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} u(\rho\omega^{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} u^{(N)}(x) &= \sum_{k=1}^N Q_k E(x, R\omega^{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} u(\rho\omega^{l-1}) \right) E(x, R\omega^{k-1}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left(\sum_{p=0}^{N-1} u(\rho\omega^{l-1}) \omega^{-p(l-1)} \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{k=1}^N E(x, R\omega^{k-1}) \omega^{p(k-1)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{p=0}^{N-1} u(\rho\omega^{l-1}) \omega^{-p(l-1)} \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \cdot \varphi_p^{(N)}(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l,p=0}^{N-1} u(\rho\omega^l) \omega^{-pl} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)}. \end{aligned}$$

解の複素 Fourier 級数表現

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta}$$

を代入して、

$$\begin{aligned}
u^{(N)}(x) &= \frac{1}{N} \sum_{l,p=0}^{N-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \omega^{nl} \right) \omega^{-pl} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(f_n \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(n-p)j} \right) \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv p}} f_n = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv p}} f_n \frac{\varphi_n^{(N)}(x)}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{\varphi_n^{(N)}(x)}{\varphi_n^{(N)}(\rho)}.
\end{aligned}$$

$e^{(N)}(x) = u(x) - u^{(N)}(x)$ とおくと、

$$(2.16) \quad e^{(N)}(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right\}.$$

u も $u^{(N)}$ も調和なので、最大値原理 (定理 A.1.1) より、

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| &= \sup_{\substack{r = \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right\} \right| \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right|.
\end{aligned}$$

ここで、

$$(2.17) \quad g_{n,\rho}^{(N)} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right|$$

とおくと、

$$(2.18) \quad \sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| g_{n,\rho}^{(N)}.$$

$g_{n,\rho}$ に関する補題を準備する。

補題 2.2.3.

$$C(R, \rho) = \max\left\{1, \left| \frac{\log(R^N + \rho^N)}{\log(R^N - \rho^N)} \right| \right\}$$

とおき、

$$(2.19) \quad g_{-n,\rho}^{(N)} = g_{n,\rho}^{(N)} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$(2.20) \quad g_{n,\rho}^{(N)} \leq 1 + C(R, \rho) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

N が十分大きいとき、

$$(2.21) \quad g_{0,\rho}^{(N)} \leq \frac{8}{N|\log R|} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N,$$

$$(2.22) \quad g_{n,\rho}^{(N)} \leq \frac{8n}{N-n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{N-2n} \quad \left(1 \leq n \leq \frac{N}{2} \right).$$

証明は付録 A を参照せよ。

$$\begin{aligned}
(2.23) \quad & \sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| g_{n,\rho}^{(N)} \\
& = |f_0| g_{0,\rho}^{(N)} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (|f_n| + |f_{-n}|) g_{n,\rho}^{(N)} + \sum_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{\infty} (|f_n| + |f_{-n}|) g_{n,\rho}^{(N)} \\
& \equiv E_1 + E_2 + E_3
\end{aligned}$$

$E_j (j = 1, 2, 3)$ を評価する。

(2.5), (2.21) より、

$$(2.24) \quad E_1 \leq \frac{8}{N |\log R|} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0}.$$

(2.5), (2.22) より、

$$\begin{aligned}
E_2 & \leq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} 2 \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^n \|u\|_{\infty, r_0} \cdot \frac{8n}{N-n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{N-2n} \\
& = 16 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{n}{N-n} \left(\frac{R^2}{\rho r_0} \right)^n \\
& \leq 16 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left(\frac{R^2}{\rho r_0} \right)^n.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{n=1}^m \tau^n \leq \begin{cases} \tau^{m+1}/(\tau-1) & (\tau > 1 \text{ のとき}) \\ m & (\tau = 1 \text{ のとき}) \\ \tau/(1-\tau) & (0 < \tau < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を $\tau = \frac{R^2}{\rho r_0}$, $m = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ として用いる。

$$\left(\frac{\rho}{R} \right)^N \cdot \tau^{\frac{N}{2}} = \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \cdot \left(\frac{R^2}{\rho r_0} \right)^{\frac{N}{2}} = \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{\frac{N}{2}} \text{ に注意する。}$$

$\frac{R^2}{\rho r_0} > 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
E_2 & \leq 16 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \frac{\tau^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}}{\tau - 1} = 16 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \cdot \tau^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} \frac{\tau^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1 - \frac{N}{2}}}{\tau - 1} \\
& = \frac{16}{\tau - 1} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} \tau^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1 - \frac{N}{2}} \leq \frac{16}{\tau - 1} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} \tau.
\end{aligned}$$

$\frac{R^2}{\rho r_0} = 1$ のとき、

$$E_2 \leq 16 \left[\frac{N}{2} \right] \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \leq 8N \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0}.$$

$\frac{R^2}{\rho r_0} < 1$ のとき、

$$E_2 \leq 16 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \frac{\tau}{1-\tau} = \frac{16}{1-\tau} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \tau \leq \frac{16}{1-\tau} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0}.$$

したがって、

$$(2.25) \quad E_2 \leq \begin{cases} \frac{16}{R^2/\rho r_0 - 1} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{R^2}{\rho r_0} > 1\right) \\ 8N \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{R^2}{\rho r_0} = 1\right) \\ \frac{16}{1 - R^2/\rho r_0} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{R^2}{\rho r_0} < 1\right). \end{cases}$$

(2.5), (2.20) より、

$$(2.26) \quad \begin{aligned} E_3 &\leq \sum_{n=[\frac{N}{2}]+1}^{\infty} 2 \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \|u\|_{\infty, r_0} (1 + C(R, \rho)) = 2(1 + C(R, \rho)) \|u\|_{\infty, r_0} \sum_{n=[\frac{N}{2}]+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \\ &\leq \frac{2(1 + C(R, \rho))}{1 - (\rho/r_0)} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{[\frac{N}{2}]+1} \|u\|_{\infty, r_0} \leq \frac{2(1 + C(R, \rho))}{1 - (\rho/r_0)} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\frac{N+1}{2}} \|u\|_{\infty, r_0}. \end{aligned}$$

(2.24), (2.25), (2.26) より、

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(r e^{i\theta})| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| g_{n, \rho}^{(N)} \\ &= E_1 + E_2 + E_3 \\ &\leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} + \begin{cases} C \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} \\ CN \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \\ C \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \end{cases} + C \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0}. \end{aligned}$$

$\frac{R^2}{\rho r_0} > 1$ のとき $\sqrt{\frac{\rho}{r_0}} > \frac{\rho}{R}$, $\frac{R^2}{\rho r_0} < 1$ のとき $\sqrt{\frac{\rho}{r_0}} < \frac{\rho}{R}$ より、

$$\sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(r e^{i\theta})| \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{\frac{\rho}{r_0}}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{R^2}{\rho r_0} > 1\right) \\ CN \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{R^2}{\rho r_0} = 1\right) \\ C \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{R^2}{\rho r_0} < 1\right). \end{cases}$$

定理 2.2.2 が導かれた。

□

定理 2.2.3 の証明.

$$(2.27) \quad |f_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-n\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \leq \|f\|_\infty \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ここで、(2.23) と同様にして、

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| g_{n,\rho}^{(N)} \\ &= |f_0| g_{0,\rho}^{(N)} + \sum_{n=1}^{[\frac{N}{3}]-1} (|f_n| + |f_{-n}|) g_{n,\rho}^{(N)} + \sum_{[\frac{N}{3}]}^{\infty} (|f_n| + |f_{-n}|) g_{n,\rho}^{(N)} \\ &\equiv E_1 + E_2 + E_3 \end{aligned}$$

として、 $E_j (j = 1, 2, 3)$ を評価する。

(2.27), (2.21) より、

$$(2.29) \quad E_1 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \|f\|_\infty = O \left(\frac{1}{N} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \right).$$

(2.27), (2.22) より、

$$(2.30) \quad \begin{aligned} E_2 &\leq \sum_{n=1}^{[\frac{N}{3}]-1} 2 \|f\|_\infty g_{n,\rho}^{(N)} \leq \sum_{n=1}^{[\frac{N}{3}]-1} 2 \|f\|_\infty \cdot \frac{8n}{N-n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{N-2n} \\ &= \sum_{n=1}^{[\frac{N}{3}]-1} 2 \|f\|_\infty \cdot \frac{8n}{N-n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{N}{3} + \frac{2N}{3} - 2n} = \frac{8}{3} \|f\|_\infty \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{N}{3}} \sum_{n=1}^{[\frac{N}{3}]-1} 2 \|f\|_\infty \cdot \frac{6n}{N-n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{2N}{3} - 2n} \\ &\leq \frac{8N}{3} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{N}{3}} \|f\|_\infty = O \left(N \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{N}{3}} \right). \end{aligned}$$

(2.27), (2.20) より、 $N \rightarrow \infty$ のとき

$$(2.31) \quad E_3 \leq (1 + C(R, \rho)) \sum_{n=[\frac{N}{3}]}^{\infty} (|f_n| + |f_{-n}|) \leq \begin{cases} o(1) \\ O(N^{-\alpha+1}). \end{cases}$$

(2.29), (2.30), (2.31) より、定理 2.2.3 が導かれた。

□

2.3 CSM 不変スキームによる円板領域問題の定理

通常スキームのときと同様、 $R > \rho$ なる R と $N \in \mathbb{N}$ をとり、拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N$ と電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N$ を (2.3), (2.4) で定義する。

CSM 不変スキームに関して次のことが成り立つ。

定理 2.3.1 (室田一雄 [11] Theorem 2.3). 行列 \tilde{G} は正則行列である。すなわち、任意の f に対して、(1.7) の形をした $u^{(N)}$ で拘束条件 (1.8) と制約条件 (1.9) を満たすものが一意に存在する。

定理 2.3.2 (室田一雄 [11] Theorem 2.4). $r_0 (> \rho)$ が存在して、 $\Omega' = B(0; r_0)$ に対して u が $u \in C(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$, $\Delta u = 0$ in Ω' となるように拡張できるとする。
このとき、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{\frac{\rho}{r_0}} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 < R^2 \text{ のとき}) \\ CN \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 = R^2 \text{ のとき}) \\ C \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 > R^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるような R, ρ, r_0 のみで定まる 正定数 C が存在する。

注意 2.3.1. 定理 2.2.1, 定理 2.2.2 の条件 $R^N - \rho \neq 1, R \neq 1$ は不要である。

定理 2.3.3. $\{f_n\}$ を境界値 f のフーリエ係数とする。

1. フーリエ級数 $\sum f_n e^{in\theta}$ が絶対収束するならば、近似解 $u^{(N)}$ は厳密解 u に一様収束する。すなわち、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

2. $\alpha > 1$ なる定数 α に対して、 $f_n = O(|n|^{-\alpha})$ ($n \rightarrow \pm\infty$) ならば、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| = O(N^{-\alpha+1}) \quad (N \rightarrow \infty).$$

2.3.1 定理の証明

以下の定理 2.3.1 の証明は、室田 [11] によるものである。定理 2.3.2, 定理 2.3.3 の証明は、室田 [11] には与えられていなかったため、M.Katsurada and H.Okamoto [3] を参考にした。通常スキームの定理の証明と同様、 $L_k, \varphi_p^{(N)}(z)$ を (2.6), (2.7) で定義する。証明には、補題 2.2.2, 補題 2.2.1, 補題 2.2.3, 定理 A.1.1 を用いる。

定理 2.3.1 の証明.

(2.9) の N 次行列 $W = (W_{kl})(k, l = 1, 2, \dots, N)$ を用いて、

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix}$$

とおく。ただし、 $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$ である。

さて、

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{-1} \widetilde{G} \widetilde{W} &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ W^{-1} \mathbf{1} & W^{-1} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T W \\ W^{-1} \mathbf{1} & W^{-1} G W \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{lk} = \begin{cases} N & (l \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

より、

$$\mathbf{1}^T W = (\sqrt{N} \ \mathbf{0}^T), \quad W^{-1} \mathbf{1} = W^* \mathbf{1} = (\mathbf{1}^* W)^* = \begin{pmatrix} \sqrt{N} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

既に見たように、

$$W^{-1} G W = \text{diag}[\varphi_0^{(N)}(\rho), \varphi_1^{(N)}(\rho), \dots, \varphi_{N-1}^{(N)}(\rho)].$$

であるから、

$$(2.32) \quad \widetilde{W}^{-1} \widetilde{G} \widetilde{W} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \sqrt{N} & \mathbf{0}^T \\ \sqrt{N} & \varphi_0^{(N)}(\rho) & O \\ \hline \mathbf{0} & O & \Phi \end{array} \right].$$

ただし、 $\Phi = \text{diag}[\varphi_1^{(N)}(\rho), \varphi_2^{(N)}(\rho), \dots, \varphi_{N-1}^{(N)}(\rho)]$ である。

$$\varphi_p^{(N)}(\rho) = \frac{N}{4\pi} \sum_{m \equiv p} \frac{1}{|m|} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|m|} > 0 \quad (1 \leq p \leq N-1)$$

より、

$$(2.33) \quad \det \widetilde{G} = \det \widetilde{W}^{-1} \widetilde{G} \widetilde{W} = -N \prod_{p=1}^{N-1} \varphi_p^{(N)}(\rho) < 0.$$

こうして、定理 2.3.1 が導かれた。

□

定理 2.3.2 の証明.

(2.32) より、

$$(\widetilde{W}^{-1}\widetilde{G}\widetilde{W})^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \sqrt{N} & \mathbf{0}^T \\ \sqrt{N} & \varphi_0^{(N)}(\rho) & O \\ \hline \mathbf{0} & O & \Phi \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{\varphi_0}{N} & \frac{\sqrt{N}}{N} & \mathbf{0}^T \\ \sqrt{N} & 0 & O \\ \hline N & O & \Psi \end{array} \right].$$

である。ただし、 $\Psi = \text{diag} \left[\frac{1}{\varphi_1^{(N)}(\rho)}, \frac{1}{\varphi_2^{(N)}(\rho)}, \dots, \frac{1}{\varphi_{N-1}^{(N)}(\rho)} \right]$ である。

これから、

$$\widetilde{G}^{-1} = \widetilde{W} \cdot (\widetilde{W}^{-1}\widetilde{G}\widetilde{W})^{-1} \cdot \widetilde{W}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} -\frac{\varphi_0}{N} & \frac{\sqrt{N}}{N} & \mathbf{0}^T \\ \sqrt{N} & 0 & O \\ \mathbf{0} & O & \Psi \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W^{-1} \end{array} \right].$$

ここで、 $A = (\frac{\sqrt{N}}{N}, 0, \dots, 0)^T$, $B = \left[\begin{array}{cc} 0 & O \\ O & \Psi \end{array} \right]$ とする。

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^{-1} &= \left[\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -\frac{\varphi_0}{N} & A^T \\ A & B \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W^{-1} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} -\frac{\varphi_0}{N} & A^T \\ WA & WB \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W^{-1} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} -\frac{\varphi_0}{N} & A^T W^{-1} \\ WA & WBW^{-1} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[\begin{array}{cc} -\varphi_0^{(N)}(\rho) & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & \sum_{p=1}^{N-1} \omega^{p(k-l)} \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

ゆえに、 $\vec{Q}_o = \widetilde{G}^{-1} \cdot \vec{f}_o$ において $\vec{Q}_o = (Q_0, Q_2, \dots, Q_N)^T$, $\vec{f}_o = (0, f(x_1), \dots, f(x_N))^T = (0, u(\rho), \dots, u(\rho\omega^{N-1}))^T$ より、

$$\vec{Q}_o = \widetilde{G}^{-1} \cdot \vec{f}_o = \frac{1}{N} \left[\begin{array}{cc} -\varphi_0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & \sum_{p=1}^{N-1} \omega^{p(k-l)} \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ u(\rho) \\ \vdots \\ u(\rho\omega^{N-1}) \end{array} \right]$$

であるから、

$$Q_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(\rho\omega^{(j-1)}), \quad Q_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} \omega^{p(k-j)} u(\rho\omega^{j-1}) \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

したがって、

$$\begin{aligned}
u^{(N)}(x) &= Q_0 + \sum_{i=1}^N Q_i E(x, R\omega^{i-1}) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(\rho\omega^{j-1}) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} \omega^{p(i-j)} u(\rho\omega^{j-1}) \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right) E(x, R\omega^{i-1}) \\
&= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N u(\rho\omega^{j-1}) + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{p=1}^{N-1} u(\rho\omega^{j-1}) \omega^{-p(j-1)} \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{i=1}^N E(x, R\omega^{i-1}) \omega^{p(i-1)} \right) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N u(\rho\omega^{j-1}) + \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} u(\rho\omega^{j-1}) \omega^{-p(j-1)} \frac{\varphi_p(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right\}.
\end{aligned}$$

解の Fourier 級数表現

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta}$$

を代入して、

$$\begin{aligned}
u^{(N)}(x) &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \omega^{n(j-1)} \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \omega^{n(j-1)} \right) \omega^{-p(j-1)} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right\} \\
&= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{nj} \right) + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(n-p)j} \right) \right\} \\
&= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0}} f_n + \sum_{p=1}^N \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv p}} f_n \\
&= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0}} f_n + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{\varphi_n^{(N)}(x)}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} f_n.
\end{aligned}$$

ゆえに、誤差 $e^{(N)}(x) = u(x) - u^{(N)}(x)$ は、

$$\begin{aligned}
(2.34) \quad e^{(N)}(re^{i\theta}) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - 1 \right\} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right\} \\
&= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0, n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - 1 \right\} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right\}.
\end{aligned}$$

u も $u^{(N)}$ も調和なので、最大値の原理 (定理 A.1.1) より、

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| &= \sup_{\substack{r = \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \left| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0, n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - 1 \right\} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right\} \right| \\
&\leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0, n \neq 0}} |f_n| \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |e^{in\theta} - 1| + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} |f_n| \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right| \\
&\leq 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0, n \neq 0}} |f_n| + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} |f_n| g_{n,\rho}^{(N)}.
\end{aligned}$$

ただし、 $g_{n,\rho}^{(N)}$ は (2.17) で定義したものである。

(A.11) より $g_{n,\rho}^{(N)} \leq 2$ ($n \neq 0$) を考慮して、

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| &\leq 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0, n \neq 0}} |f_n| + 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} |f_n| \\
(2.35) \qquad &= \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (|f_n| + |f_{-n}|) + \sum_{n=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{\infty} (|f_n| + |f_{-n}|) \\
&\equiv E_1 + E_2.
\end{aligned}$$

以下は、定理 2.2.2 の証明と同様にして定理 2.3.2 が導かれる。

□

定理 2.3.3 の証明.

(2.35) と同様にして、

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor - 1} (|f_n| + |f_{-n}|) + 2 \sum_{n=\lfloor \frac{N}{3} \rfloor}^{\infty} (|f_n| + |f_{-n}|) \\
(2.36) \qquad &\equiv E_1 + E_2.
\end{aligned}$$

以下は、定理 2.2.3 の証明と同様にして定理 2.3.3 が導かれる。

□

2.4 双極子シミュレーション

ポテンシャル論や境界要素法において、電荷の代わりに双極子 (二重層ポテンシャル) を用いることがある。このセクションでは、2 次元領域における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (1.2) を双極子によって解く。

$Y^{(N)}$ という関数空間から近似解 $v^{(N)}$ を選ぶ。

$$Y^{(N)} = Y^{(N)}\{y_l\} = \left\{ \sum_{l=1}^N Q_l D(x, y_l); (Q_1, Q_2, \dots, Q_N) \in \mathbb{R}^N \right\}$$

ここで、 $D(x, y)$ は双極子の作る電場の静電ポテンシャルである。

$$D(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\nu_y | y - x)}{|y - x|^2} \quad (x, y \in \mathbb{R}^2, x \neq y).$$

ここで $\nu_y = \frac{y}{|y|}$, $(|)$ は \mathbb{R}^2 の内積とする。

次式をみたす $v^{(N)} \in Y^{(N)}$ を近似解とする。

$$(2.37) \quad v^{(N)}(x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

この近似スキームを以後“通常双極子スキーム”と呼ぶ。

M.Katsurada [4] により円板領域における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (2.1) の通常双極子スキームに関して次の定理が挙げられている。

定理 2.4.1 (M. Katsurada [4] Theorem 5.1). 任意の $R(> \rho)$, $N \in \mathbb{N}$, $f \in C(\Gamma)$ に対して (2.37) を満たす近似解 $v^{(N)} \in Y^{(N)}$ が一意に存在する。

定理 2.4.2 (M. Katsurada [4] Theorem 5.2). $R(> \rho)$, $f \in C(\Gamma)$, とする。境界値 f のフーリエ級数が絶対収束するならば、近似解 $v^{(N)}$ は厳密解 u に一様収束する。すなわち、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - v^{(N)}(x)| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

証明は M.Katsurada [4] を参照せよ。

次に、CSM の不変スキームと同様にして「不変性」を持つ双極子シミュレーションのスキームを考える。

電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{\Omega}\}$ を適当に選んで、

$$(2.38) \quad v^{(N)}(x) = Q_0 + \sum_{l=1}^N Q_l D(x, y_l) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \frac{\left(\frac{y_l}{|y_l|} | y_l - x \right)}{|y_l - x|^2}$$

の形の近似式を設定する。

係数 $\{Q_l\}_{l=0}^N$ を N 個の拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N \in \Gamma$ における拘束条件

$$(2.39) \quad v^{(N)}(x_k) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \frac{\left(\frac{y_l}{|y_l|} | y_l - x_k \right)}{|y_l - x_k|^2} = f(x_k)$$

と制約条件

$$(2.40) \quad \sum_{l=1}^N Q_l = 0$$

で定める。

この近似スキームを以後“不変双極子スキーム”と呼ぶ。

2.4.1 不変双極子スキームの不変性の証明

2次元領域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (1.2) における不変双極子スキームの近似解 $v^{(N)}$ は、座標のスケール変換や境界条件の原点移動に対して不変である。したがって、以下意味で定理が成り立つ。

定理 2.4.3. 2次元領域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (1.2) の $x_k \in \Gamma$ ($k = 1, 2, \dots, N$), $y_l \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{\Omega}\}$ ($l = 1, 2, \dots, N$) を拘束点、電荷点とする不変双極子スキームによる近似解 $v^{(N)}$ が存在すると仮定する。

このとき、 $v^{(N)}, f'$ を $v^{(N)}(x') = v^{(N)}(x)$, $f'(x) = f(x)$, $x' = ax$ で定めると、 $v^{(N)}$ は、境界値問題

$$(2.41) \quad \begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{in } \Omega' = \{x'; \in \Omega\} \\ u' = f' & \text{on } \Gamma' = \partial\Omega' \end{cases}$$

の不変双極子スキームの近似解である。

また、 $v^{(N)}, f'$ を $v^{(N)}(x) = v^{(N)}(x) + c$, $f' = f + c$ で定めると、 $v^{(N)}$ は、境界値問題

$$(2.42) \quad \begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{in } \Omega \\ u' = f' & \text{on } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

の不変双極子スキームの近似解である。

定理 2.4.3 の証明.

座標のスケール変換を施して変換された関数 (2.41) を考える。

ここで、 $f'(x', y') = f(x, y)$ つまり、 $f'(x', y') = f\left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{a}\right)$ である。

$x'_k = ax_k$, $y'_l = ay_l$ のとき、 $x'_k \in \Gamma'$ ($k = 1, 2, \dots, N$), $y'_l \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\Omega' \cup \Gamma'\}$ ($l = 1, 2, \dots, N$) を拘束点、電荷点とする不変双極子スキームの近似解は、

$$(2.43) \quad v^{(N)}(x') = Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \frac{\left(\frac{y'_l}{|y'_l|} |y'_l - x'\right)}{|y'_l - x'|^2}.$$

と書ける。ただし、 $\{Q'_l\}_{l=0}^N$ は拘束条件 $v^{(N)}(x'_k) = f'(x'_k)$ と制約条件 $\sum_{l=1}^N Q'_l = 0$ で定める。

ここで、

$$\begin{aligned} v^{(N)}(x') &= Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \frac{\left(\frac{y'_l}{|y'_l|} \mid y'_l - x' \right)}{|y'_l - x'|^2} \\ &= Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \frac{\left(\frac{ay_l}{|ay_l|} \mid a(y_l - x) \right)}{a^2 |y_l - x|^2} \\ &= Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{a} \sum_{l=1}^N Q'_l \frac{\left(\frac{y_l}{|y_l|} \mid y_l - x \right)}{|y_l - x|^2}. \end{aligned}$$

$f'(x', y') = f(x, y)$ より、

$$(2.44) \quad Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{a} \sum_{l=1}^N Q'_l \frac{\left(\frac{y_l}{|y_l|} \mid y_l - x \right)}{|y_l - x|^2} = f'(x'_k) = f(x_k).$$

一方、

$$Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \frac{\left(\frac{y_l}{|y_l|} \mid y_l - x \right)}{|y_l - x|^2} = f(x_k).$$

(2.44) を書き直すと、

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \cdot \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \vec{Q}'_o = \vec{f}_o$$

となる。ただし、 $\vec{Q}'_o = (Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_N)^T$, $\vec{f}_o = (0, f(x_1), \dots, f(x_N))^T$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ である。

1 行目を a 倍すると、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \vec{Q}'_o = \vec{f}_o$$

したがって、 $Q'_0 = Q_0$, $Q'_l = Q_l (l = 1, 2, \dots, N)$ であり、

$$v^{(N)}(x') = Q_0 - \sum_{l=1}^N Q_l D(x', y'_l), \quad v^{(N)}(x'_k) = f(x'_k) (k = 1, 2, \dots, N)$$

となる。よって、 $v^{(N)}$ は (2.41) の不変双極子スキームの近似解である。

次に、境界条件の原点移動を施して変換された関数 (2.42) を考える。

$x_k \in \Gamma (k = 1, 2, \dots, N)$, $y_l \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\Omega \cup \Gamma\} (l = 1, 2, \dots, N)$ を拘束点、電荷点とする不変双極子スキームの近似解は、

$$(2.45) \quad v^{(N)}(x) = Q'_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q'_l \frac{\left(\frac{y_l}{|y_l|} |y_l - x| \right)}{|y_l - x|^2}.$$

と書ける。ただし、 $\{Q'_l\}_{l=0}^N$ は拘束条件 $v^{(N)}(x_k) = f'(x_k)$ と制約条件 $\sum_{l=1}^N Q'_l = 0$ で定める。

拘束条件を書き直すと、

$$\tilde{G}\vec{Q}'_o = \vec{f}'_o$$

$\vec{Q}'_o = (Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_N)^T$, $\vec{f}'_o = (0, f'(x_1), \dots, f'(x_N))^T$ であり、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \vec{Q}'_o = \vec{f}'_o$$

となる。

$f'(x, y) = f(x, y) + c$ より、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \vec{Q}'_o = \vec{f}'_o = \vec{f}_o + c \cdot \mathbf{1}^T.$$

一方、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix} \vec{Q}_o = \vec{f}_o$$

であり、同じ連立方程式の形であるので、 $Q'_0 = Q_0 + c$, $Q'_l = Q_l (l = 1, 2, \dots, N)$ である。したがって、

$$v^{(N)}(x') = Q_0 + c - \sum_{l=1}^N Q_l D(x', y'_l), \quad v^{(N)}(x'_k) = f(x'_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

となり、 $v^{(N)}$ は (2.42) の不変双極子スキームの近似解である。

以上より、不変性を有している。

□

2.5 数値実験

円板領域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < \rho\}$ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (2.1) の数値実験を紹介する。

拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N$ と電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N$ は、

$$\begin{cases} \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), & i = \sqrt{-1} \\ x_k = \rho \omega^{k-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \kappa\right) & (k = 1, 2, \dots, N) \\ y_l = R \omega^{l-1} & (l = 1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

で定める。ただし、 $R > \rho$, $\kappa \in [0, \frac{1}{2}]$ とする。

N, R, κ, f が与えられているとき、CSM により近似解 $u^{(N)}$ を計算する。誤差評価において、最大値の見積もりは境界上で行えば良いので、近似解の誤差を、境界上から乱数を用いて選んだ 100 個の点 $Z_j (j = 1, 2, \dots, 100)$ における近似解と厳密解の差を絶対値の最大値

$$\tilde{e}^{(N)} \equiv \max\{|u(Z_j) - u^{(N)}(Z_j)|; |Z_j| = \rho\} \quad (j = 1, 2, \dots, 100)$$

で見積もる。

また、“2.5.5 円板領域における Laplace 方程式の Neumann 問題” の数値実験では、乱数を用いて境界上の 100 個の点を選んで近似解と厳密解の差を絶対値の最大値

$$\tilde{e}^{(N)} \equiv \max\{|(u(Z_j) - u(0)) - (u^{(N)}(Z_j) - u^{(N)}(0))|; |Z_j| = \rho\} \quad (j = 1, 2, \dots, 100)$$

で見積もる。

なお、プログラムには MATLAB (Octave) を用いている。

MATLAB は、Math Works 社が開発した、非常に高品質の数値計算ソフトウェアである。また Octave は、MATLAB と互換性を持つフリーソフトウェアである。

今回の実験では、Octave を用いている。MATLAB と互換性が高いため、付録のソースプログラムを少し変えれば MATLAB でも動作する。

2.5.1 u が調和多項式であるときの通常スキームと不変スキームの比較

厳密解 u が調和多項式

$$u(re^{i\theta}) = r^m \cos m\theta$$

であるときを扱う。もちろん、

$$f(\rho e^{i\theta}) = h_m(\rho e^{i\theta}) = \rho^m \cos m\theta$$

である。

$m \in \{1, 2, \dots, 5\}$ をパラメーターとして動かす。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

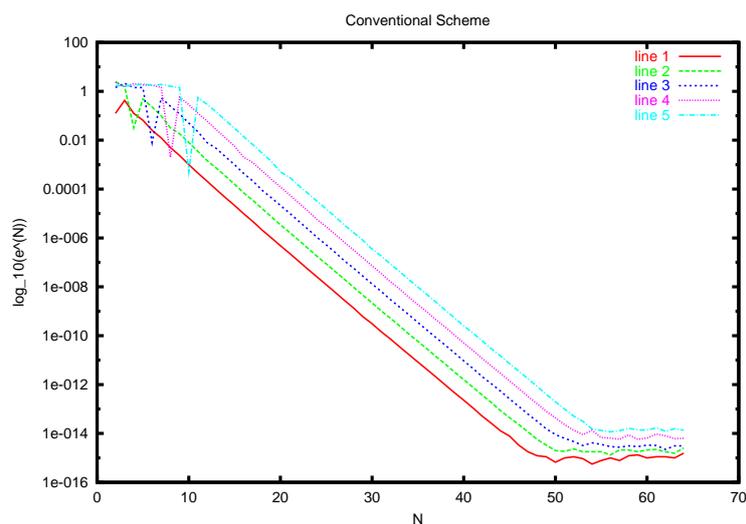


図 2.2: $R = 2, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

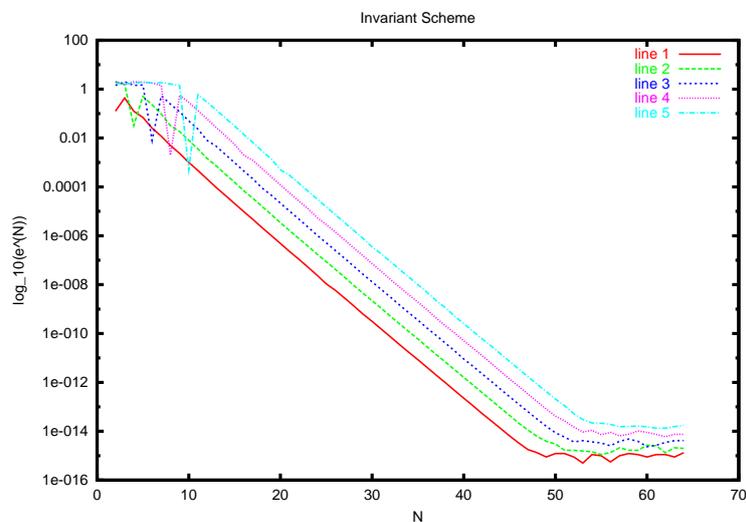


図 2.3: $R = 2, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

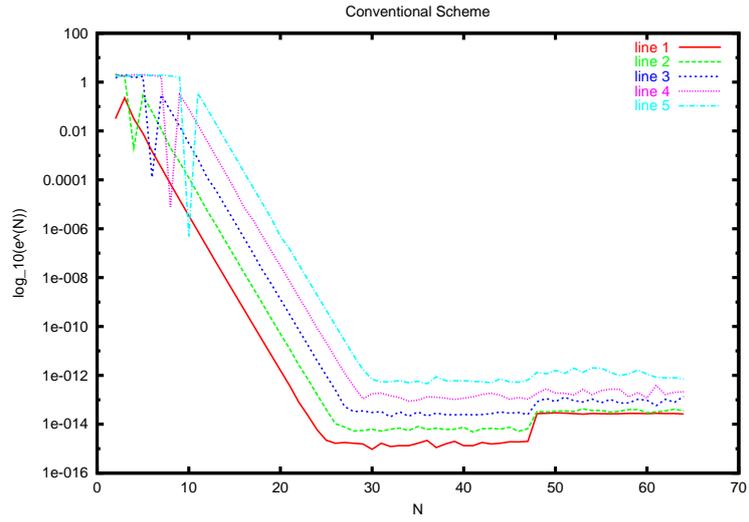


図 2.4: $R = 4, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

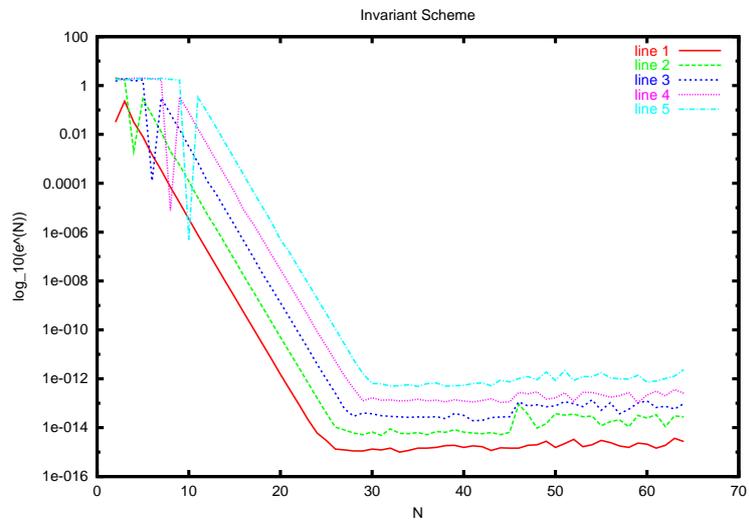


図 2.5: $R = 4, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

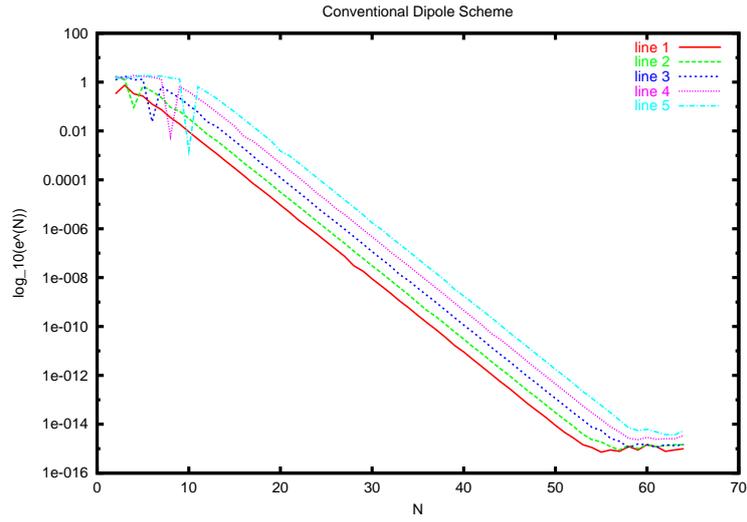


図 2.6: $R = 2, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常双極子スキーム

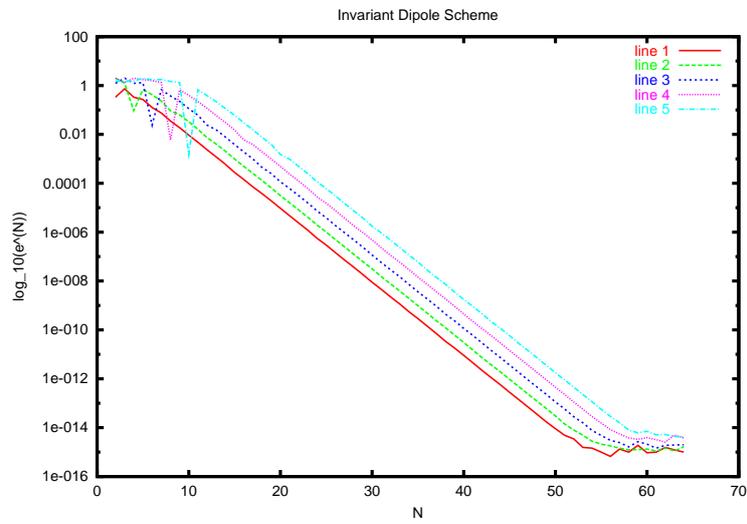


図 2.7: $R = 2, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変双極子スキーム

不変スキームによる近似解と厳密解の差をグラフにする。
 次は、 $m = 2, N = 10$ のときのグラフである。

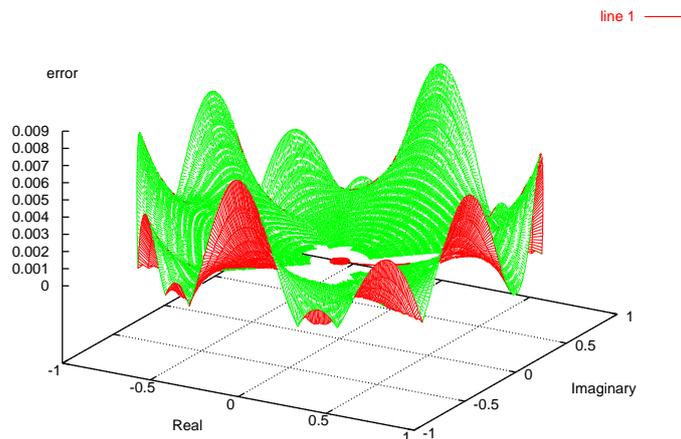


図 2.8: $R = 2, \rho = 1, f = h_2, N = 10$, 不変スキームによる近似解と厳密解の比較

次に、不変スキームによる近似解をグラフにする。
 $m = 2$ のときのグラフ。

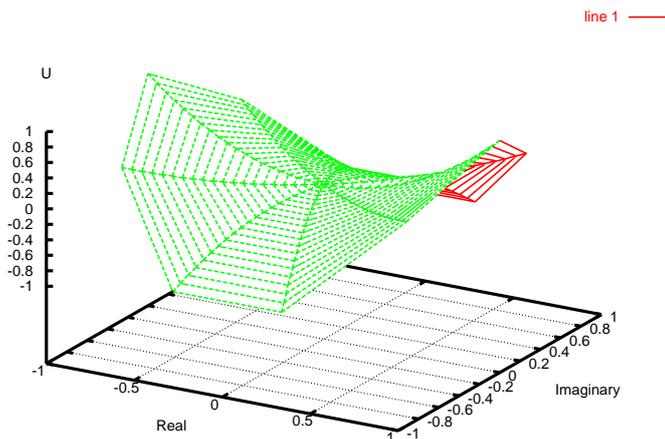


図 2.9: $R = 2, \rho = 1, f = h_2, N = 10$, 不変スキームによる近似解

- 誤差のグラフすべてが直線状になっているため、通常スキーム、不変スキーム、双極子通常スキーム、双極子不変スキームの誤差が指数関数的に減少している様子が分かる。誤差は、 $10^{-14} \sim 10^{-16}$ で落ち着いているが、これは丸め誤差のためである。
- u が調和多項式のときの数値実験では、通常スキーム、不変スキームともほぼ同じ収束スピードを示している。

- $R = 4$ のグラフでは、通常スキーム、不変スキームの両方とも N が 20 ~ 30 の間で最終的な誤差に落ち着いている。 R が大きい程、最終的な誤差に早く落ちることが分かる。しかし、 R が大きすぎても到達する誤差は大きくなる。ちなみに R が大きいと最終的に到達する誤差が大きくなる理由は、 R が大きいと条件数が大きく、丸め誤差が大きくなるためである。これは、双極子シミュレーションでも同じことが言える。
- 実際、不変スキーム、双極子不変スキームにおいて $R = 1$ として実験をしたが、うまく誤差が指数関数的に収束した。定理にあるように $R = 1$ という条件が不要であることが分かった。
- 近似解と厳密解の比較のグラフ (図 2.8) を見ると、拘束点上で誤差がほぼ 0 になる。

2.5.2 f が対数ポテンシャルのときの通常スキームと不変スキームの比較

境界値 f が対数ポテンシャルであるときを扱う。

$$f(x) = l_p(x) = \log |x - p|$$

$p \in (\rho, \infty)$ をパラメータとして動かす。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

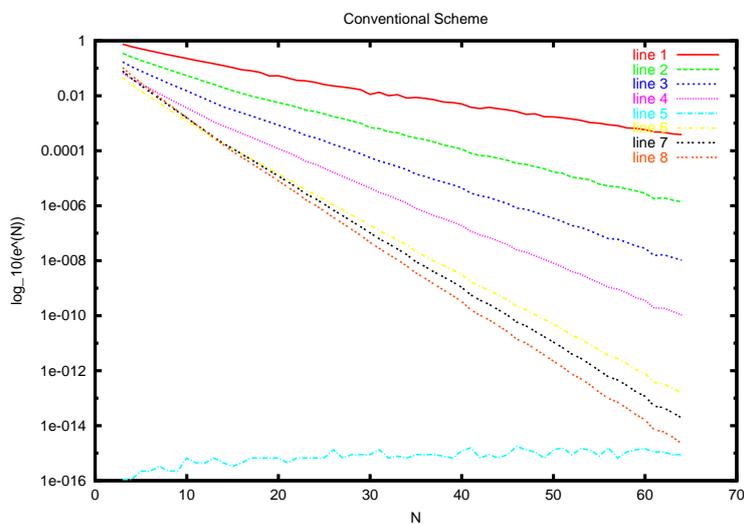


図 2.10: $R = 2, \rho = 1, f = l_p (p = 1.2, 1.4 \dots, 2.6), N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

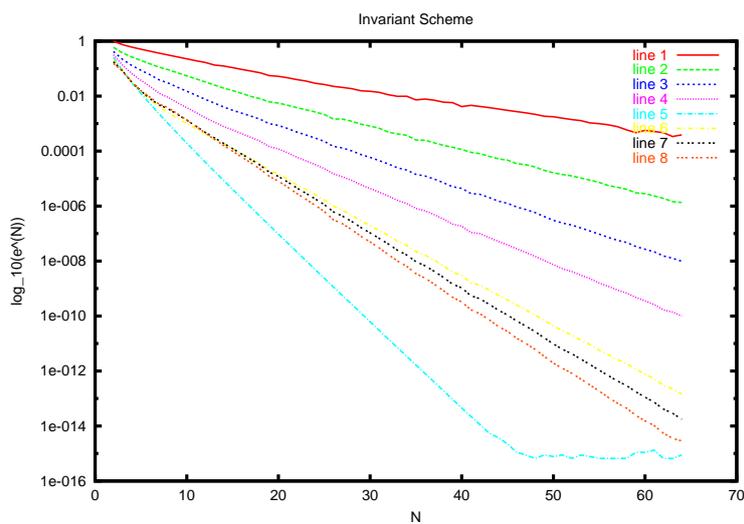


図 2.11: $R = 2, \rho = 1, f = l_p (p = 1.2, 1.4 \dots, 2.6), N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

次に各 p に対し、傾き τ をプロットする。
 グラフは、縦軸が p 横軸が 傾き τ を表す。
 定理から $\tau \sim \max \left\{ \frac{\rho}{R}, \sqrt{\frac{\rho}{p}} \right\}$ と期待される。

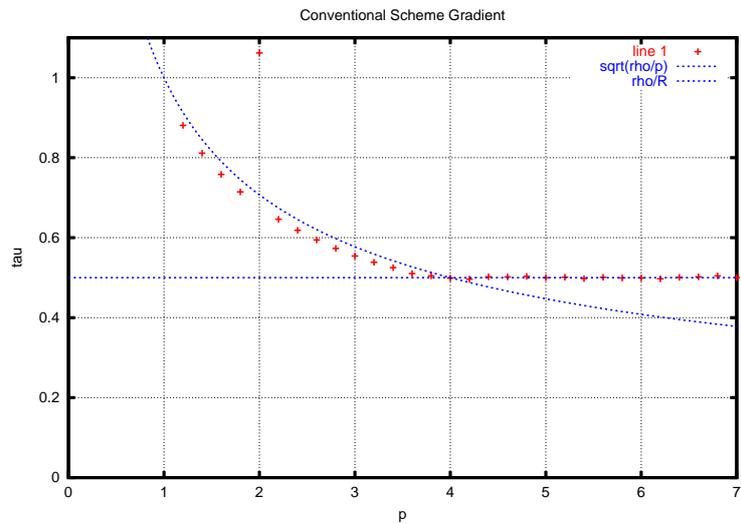


図 2.12: $R = 2, \rho = 1, f = l_p (p = 1.2, 1.4 \dots, 7.0)$, 通常スキーム

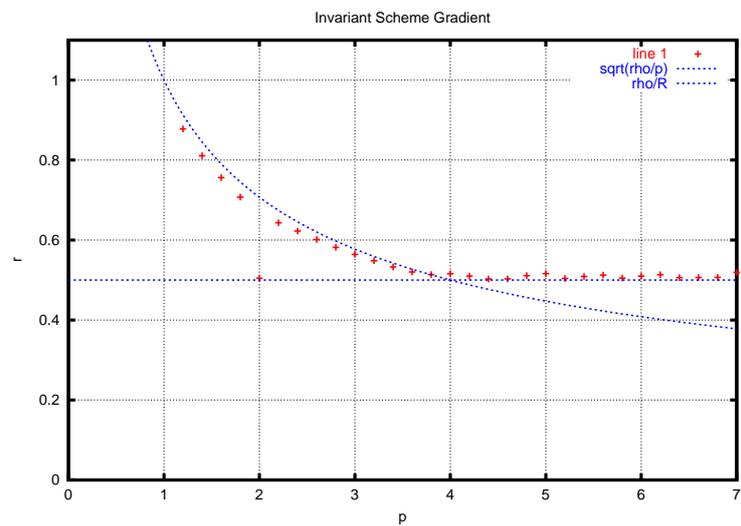


図 2.13: $R = 2, \rho = 1, f = l_p (p = 1.2, 1.4 \dots, 7.0)$, 不変スキーム。

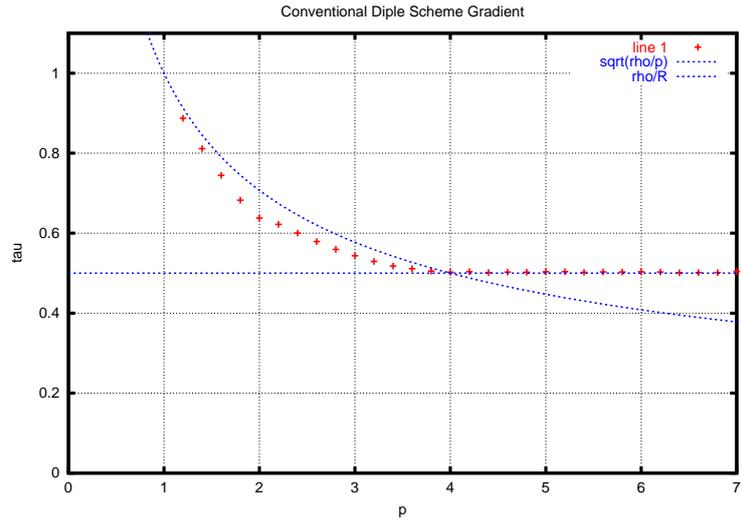


図 2.14: $R = 2, \rho = 1, f = l_p (p = 1.2, 1.4 \dots, 7.0)$, 通常双極子スキーム

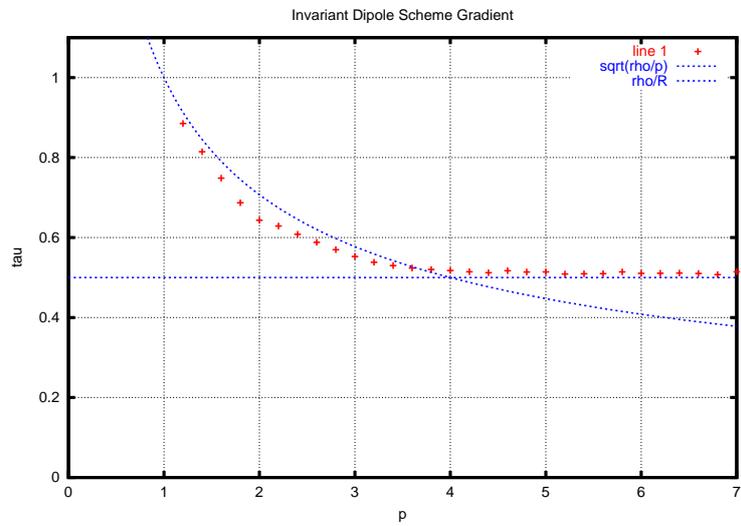


図 2.15: $R = 2, \rho = 1, f = l_p (p = 1.2, 1.4 \dots, 7.0)$, 不変双極子スキーム

不変スキームによる近似解と厳密解の差をグラフにする。
 次は $p = 1.2$, $N = 10$ の場合である。

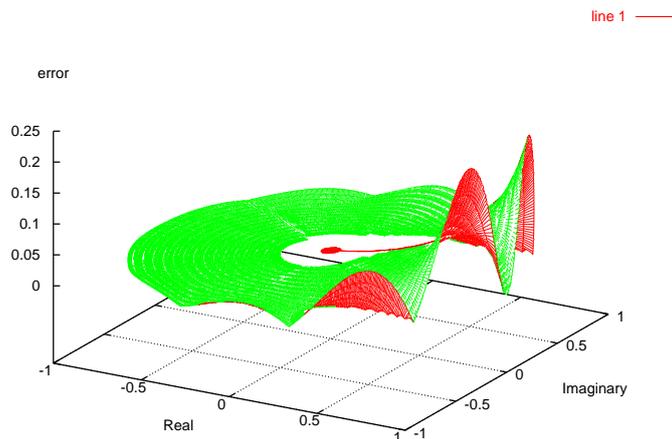


図 2.16: $R = 2, \rho = 1, f = l_p(p = 1.2), N = 10$, 不変スキームによる近似解と厳密解の比較

不変スキームによる近似解をグラフにする。
 $p = 1.2$ のときのグラフ。

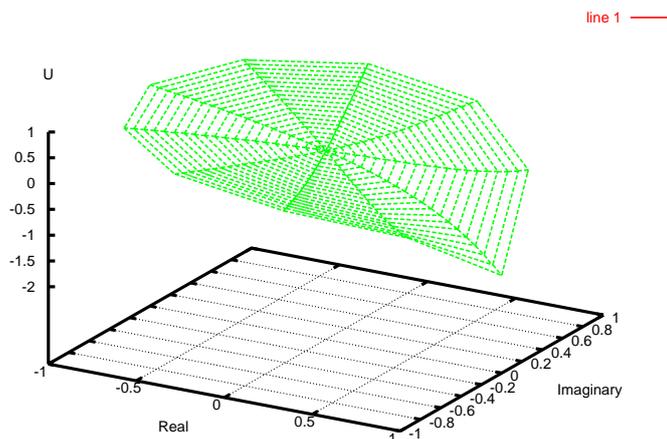


図 2.17: $R = 2, \rho = 1, f = l_p(p = 1.2), N = 10$, 不変スキームによる近似解

- 通常スキーム、不変スキームのグラフの両方とも誤差は指数関数的に減少している様子が分かる。
- 誤差のグラフ、図 2.10(通常スキーム)、図 2.11(不変スキーム) で違うところは、 $p = 2.0$ のところである。 $p = 2.0$ のところでは $p = R$ となり、特異点となるため、通常スキームでは近似解と厳密解が等しくなるため精度が良くなっている。

- 通常スキーム、不変スキームの傾きのプロットは、青線で引いた理想の値とほぼ等しくなる。定理の主張を確認できる。双極子シミュレーションでも同じことが言える。

2.5.3 領域 Ω の外部での収束

M. Katsurada [4] により領域 Ω の外部での収束 (通常スキーム) に関して次の定理が挙げられている。

定理 2.5.1 (M. Katsurada [4] Theorem 4.1). R, ρ ($R > \rho > 0$), $N \in \mathbb{N}$ が $R^N - \rho^N \neq 1, R \neq 1$ を満たし、 $r_0 (> \rho)$ が存在して、 $\Omega' = B(0; r_0)$ に対して u が $u \in C(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$, $\Delta u = 0$ in Ω' であり、 r が $\rho < r < \min\{r_0, R\}$ となるように拡張できるとする。

このとき、

$$\sup_{x \leq r} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq \begin{cases} C(R, \rho, r, r_0) \left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (rr_0 < R^2 \text{ のとき}) \\ C(R, \rho, r, r_0) N \left(\frac{r}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (rr_0 = R^2 \text{ のとき}) \\ C(R, \rho, r, r_0) \left(\frac{r}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (rr_0 > R^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるような N と u によらない正定数 $C(R, \rho, r, r_0)$ が存在する。

証明は M. Katsurada [4] を参照せよ。

通常スキームと不変スキームにおいて、領域 Ω の外部での収束を考える。

境界値 f は

$$f(\rho e^{i\theta}) = \rho \cos \theta$$

とする。

円板領域 Ω の半径 $r \in \{0.2, 0.4, \dots, 1.8\}$ をパラメーターとして動かす。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は r を表す。

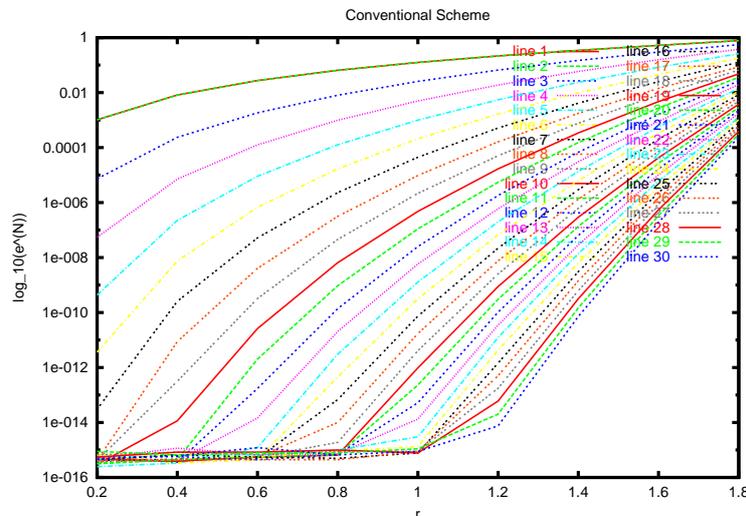


図 2.18: $R = 2, \rho = 1, N \in \{2, 4, \dots, 60\}, (r = 0.2, 0.4, \dots, 1.8)$, 通常スキーム

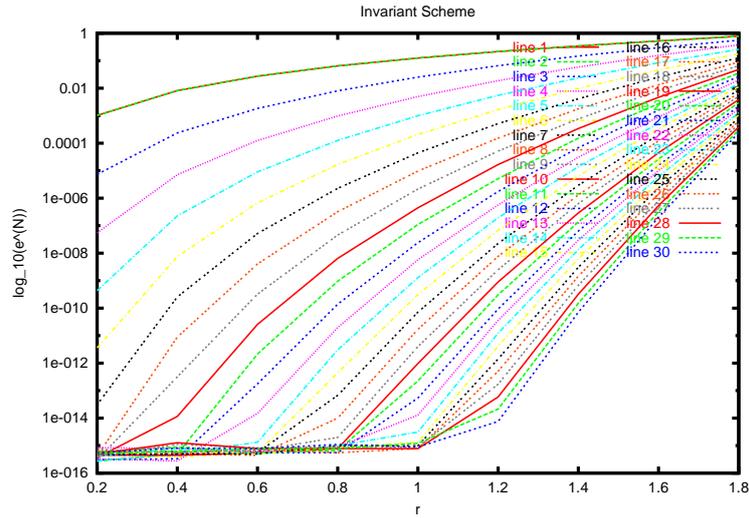


図 2.19: $R = 2, \rho = 1, N \in \{2, 4 \dots, 60\}, (r = 0.2, 0.4 \dots, 1.8)$, 不変スキーム

- 通常スキーム、不変スキームの両方とも $r = \rho$ の場合は $r = 1.0$ の外部領域で、誤差が減っている様子が分かる。
- 数値実験の考察では、不変スキームの場合も定理 2.5.1 と同様のことが言えると思われる。もちろん不変スキームの場合は、定理 2.5.1 の条件 $R \neq 1, R^N - \rho^N \neq 1$ という条件は必要ではない。証明は行っていない。

2.5.4 拘束点と電荷点の配置方法

2次元円板領域における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (2.1) を CSM で解く際に $\kappa \in [0, \frac{1}{2}]$ というパラメーターを用いて拘束点をシフトさせる。

M. Katsurada [4] により拘束点と電荷点の配置 (通常スキーム) に関して次の定理が挙げられている。

定理 2.5.2 (M. Katsurada [4] Theorem 8.1). $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ とする。

1. N が十分に大きいならば、任意の f に対して (1.5) を満たす $u^{(N)} \in X^{(N)}$ を一意に決まる。
2. さらに $R \neq 1$ とする。
 - (a) フーリエ級数 $\sum f_n$ が絶対収束するならば、近似解 $u^{(N)}$ は厳密解 u に一様収束する。すなわち、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

- (b) $\alpha > 1$ なる定数 α に対して、 $f_n = O(|n|^{-\alpha})$ ($n \rightarrow \pm\infty$) ならば、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| = O(N^{-\alpha+1}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

- (c) $r_0 (> \rho)$ が存在して、 $\Omega' = B(0; r_0)$ に対して u が $u \in C(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$, $\Delta u = 0$ in Ω' となるように拡張できるとする。

このとき、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{\frac{\rho}{r_0}} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 < R^2 \text{ のとき}) \\ CN \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 = R^2 \text{ のとき}) \\ C \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 > R^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるような r_0 のみで定まる 正定数 C が存在する。

定理 2.5.3 (M. Katsurada [4] Theorem 8.2). $\kappa = \frac{1}{2}$ とする。

1. N が偶数ならば、行列 G は正則ではない。
2. N が奇数で十分大きいならば、行列 G は正則である。
3. N が奇数であり、かつ、 $R \neq 1$ とする。
 - (a) フーリエ級数 $\sum f_n$ が絶対収束するならば、近似解 $u^{(N)}$ は厳密解 u に一様収束する。すなわち、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

- (b) $\alpha > 1$ なる定数 α に対して、 $f_n = O(|n|^{-\alpha})$ ($n \rightarrow \pm\infty$) ならば、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| = O(N^{-\alpha+1}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

- (c) $r_0 (> \rho)$ が存在して、 $\Omega' = B(0; r_0)$ に対して u が $u \in C(\overline{\Omega'}) \cap C^2(\Omega')$, $\Delta u = 0$ in Ω' となるように拡張できるとする。

このとき、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{\frac{\rho}{r_0}} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 < R^2 \text{ のとき}) \\ CN \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 = R^2 \text{ のとき}) \\ C \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 > R^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるような r_0 のみで定まる 正定数 C が存在する。

証明は M. Katsurada [4] 参照せよ。

境界値 f は

$$f(\rho e^{i\theta}) = h_m(\rho e^{i\theta}) = \rho^m \cos m\theta$$

とする。 $m \in \{1, 2, \dots, 5\}$ をパラメーターとして動かす。

$\kappa = \frac{1}{2}$ のとき x_l は、

$$x_l = \rho \omega^{(l-1)} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \cdot \frac{1}{2}\right) \quad (l = 1, 2, \dots, N)$$

となる。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

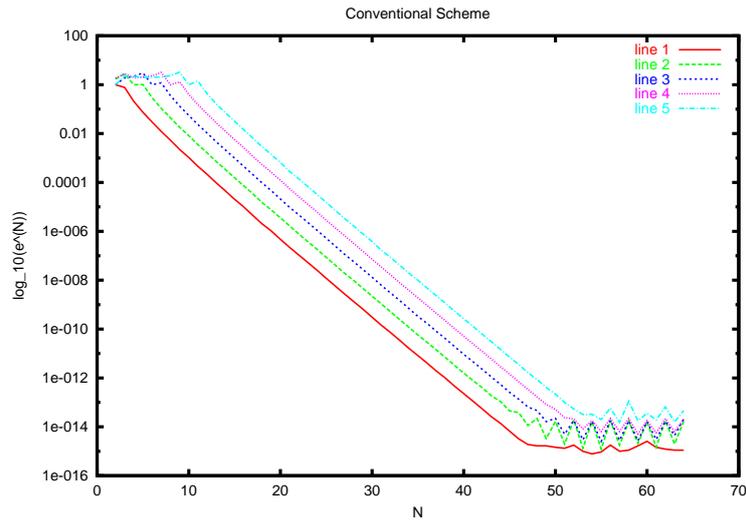


図 2.20: $R = 2, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), \kappa = \frac{1}{2}, N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム。

N は奇数とする。

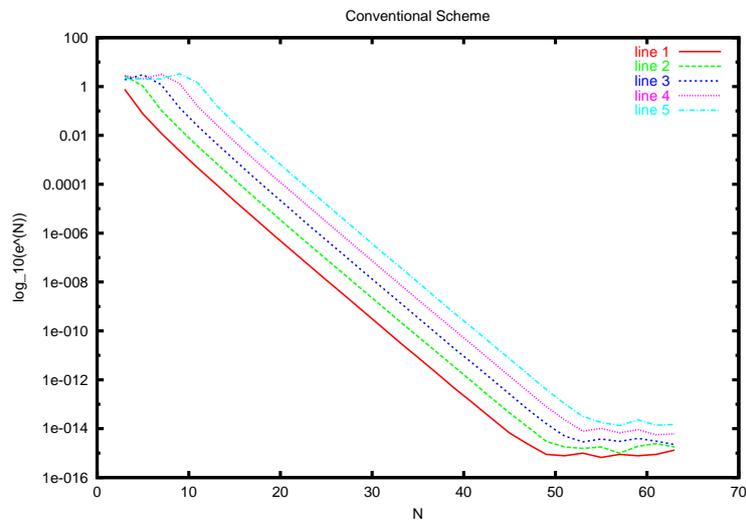


図 2.21: $R = 2, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), \kappa = \frac{1}{2}, N = (3, 5, \dots, 63)$ で奇数, 通常スキーム。

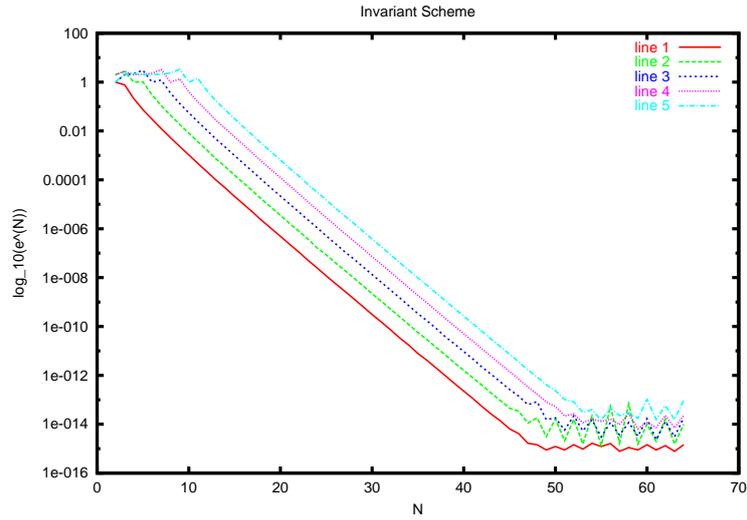


図 2.22: $R = 2, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), \kappa = \frac{1}{2}, N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム。

N は奇数とする。

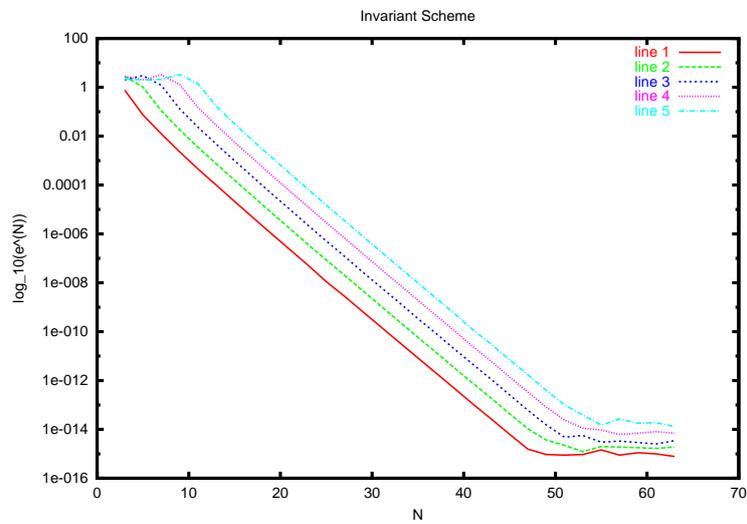


図 2.23: $R = 2, \rho = 1, f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5), \kappa = \frac{1}{2}, N = (3, 5, \dots, 63)$ で奇数, 不変スキーム。

次に、 N を偶数とし、境界値 f は

$$f(\rho e^{i\theta}) = \rho \cos \theta$$

とする。

$\kappa < \frac{1}{2}$ で動かす、 $\kappa = \frac{1}{2} - 10^{-j}$ で $j \in \{2, 4, \dots, 14\}$ をパラメータとして動かす。グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

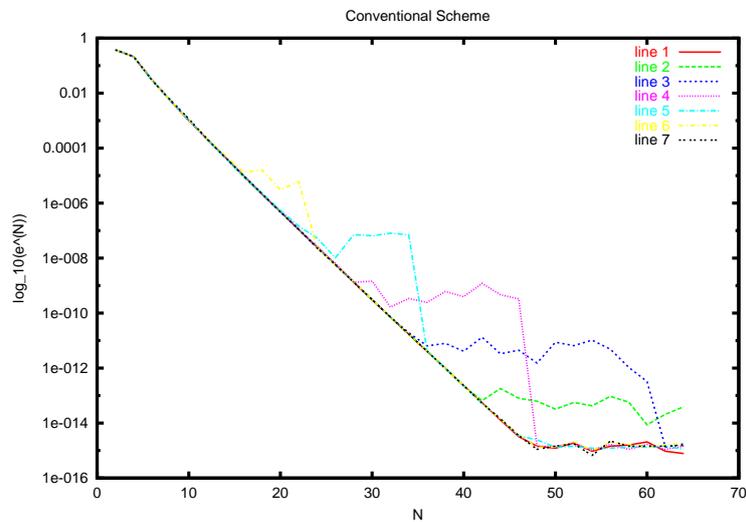


図 2.24: $R = 2$, $\rho = 1$, $f = \rho \cos \theta$, $\kappa = \frac{1}{2} - 10^{-j}$ ($j = 2, 4 \dots, 14$), 通常スキーム。

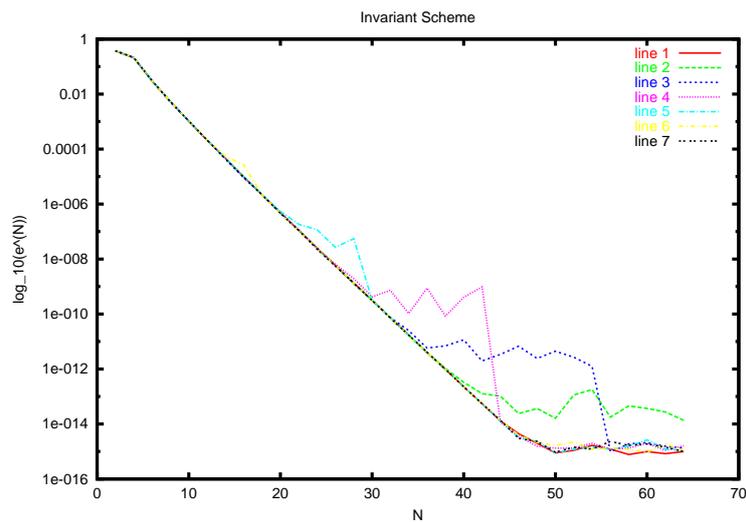


図 2.25: $R = 2$, $\rho = 1$, $f = \rho \cos \theta$, $\kappa = \frac{1}{2} - 10^{-j}$ ($j = 2, 4 \dots, 14$), 不変スキーム。

- κ を $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ で変化させて実験をしたが、通常スキーム、不変スキームとも $\kappa = 0$ のときのグラフとほぼ同じ収束を示しており誤差は申し分ない。
- $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ で変化させたグラフ、図 2.24(通常スキーム)、図 2.25(不変スキーム) では、不変スキームの方が早く最終的な誤差に収束している。

- $\kappa = \frac{1}{2}$, $N = 64$ のグラフ、図 2.20(通常スキーム)、図 2.22(不変スキーム) では、誤差の収束が N の値が偶数のときは、近似解は存在しないはずであるが、すべての値でうまく収束してしまう。これは Matlab(Octave) が反復改良を行っているからであると思われる。詳しく調べていないため、事実かどうかは分からない。行列 G を求める際に QR 分解に基づく、連立 1 次方程式 (一般の行列を係数とする) を解くと、偶数と奇数の場合わけは表れる。ソースプログラムには QR 分解して実験出来るように注釈を入れてある。
- 数値実験の結果からは、不変スキームの場合も定理 2.5.2, 定理 2.5.3 と同様のことが言えると思われる。証明は行っていない。

2.5.5 円板領域における Laplace 方程式の Neumann 問題

2 次元円板領域、

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < \rho\}$$

における Laplace 方程式の Neumann 問題

$$(2.46) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u = f & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

を考える。ただし、 Γ は Ω の境界であり、 f は Γ で定義された連続関数とする。 $\frac{\partial}{\partial \nu}$ は、外向き法線方向の微分である。

(1.3) の関数空間 $X^{(N)}$ から近似解 $u^{(N)}$ を選ぶ。

つまり、次式をみたす $u^{(N)} \in X^{(N)}$ を近似解とする。

$$(2.47) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u^{(N)}(x_l) = f(x_l) \quad (l = 1, 2, \dots, N)$$

M. Katsurada [4] により Neumann 問題 (通常スキーム) に関して次の定理が挙げられている。

定理 2.5.4 (M. Katsurada [4] Theorem 6.1). 任意の $R(> \rho)$, $N \in \mathbb{N}$, $f \in C(\Gamma)$ に対して (2.47) をみたす近似解 $u^{(N)} \in X^{(N)}$ が一意に存在する。

Neumann 問題における誤差評価を述べるために、次式によって作用素 P を定義する。

$$(2.48) \quad (P\phi)(x) = \phi(x) - \phi(0) \quad x \in \bar{\Omega}.$$

定理 2.5.5 (M. Katsurada [4] Theorem 6.2). $f \in C(\Gamma)$ が $\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) d\theta = 0$ をみたし、フーリエ級数 $\sum f_n e^{in\theta}$ が絶対収束するならば、

$$\sup_{x \in \Omega} |P(u - u^{(N)})(x)| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。

境界値 f は

$$f(\rho e^{i\theta}) = s_m(\rho e^{i\theta}) = \rho^{m-1} \cos m\theta$$

とする。 $m \in \{1, 2, \dots, 5\}$ をパラメーターとして動かす。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

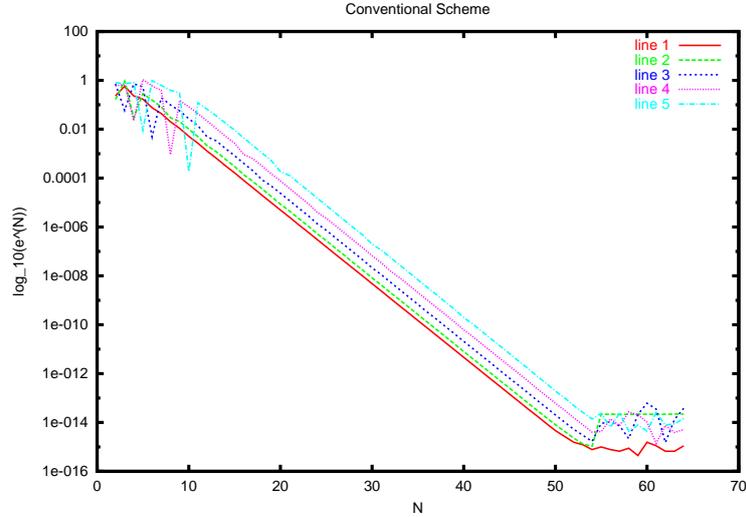


図 2.26: $R = 2, \rho = 1, f = s_m (m = 1, 2, \dots, 5), N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

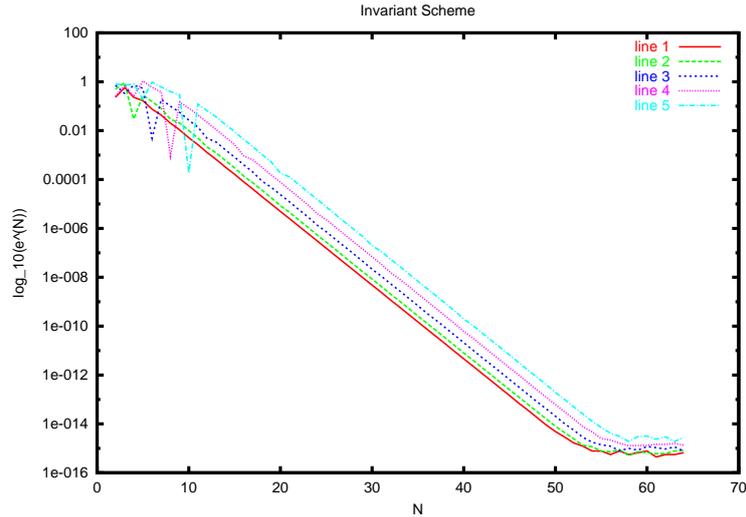


図 2.27: $R = 2, \rho = 1, f = s_m (m = 1, 2, \dots, 5), N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

- 通常スキーム、不変スキームの両方とも誤差が指数関数的に減少している様子が分かる。
- 数値実験の考察では、不変スキームの場合も定理 2.5.4, 定理 2.5.5 と同様のことが言えると思われる。証明は行っていない。

第3章 円の外部領域における Laplace 方程式の境界値問題

3.1 問題定義

2次元円の外部領域、

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > \rho\}$$

における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$(3.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

$$(3.2) \quad u \text{ は有界}$$

を考える。

通常スキームの場合は (3.2) の条件を

$$(3.3) \quad u(\infty) = 0$$

とする。ただし、 Γ は Ω の境界であり、 f は Γ で定義された連続関数とする。

3.2 CSM 通常スキームによる円の外部領域問題の定理

$R < \rho$ なる R と $N \in \mathbb{N}$ をとり、拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N$ と電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N$ を以下のように定義する。

$$(3.4) \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), \quad i = \sqrt{-1},$$

$$(3.5) \quad x_k = \rho\omega^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

$$(3.6) \quad y_l = R\omega^{l-1} \quad (l = 1, 2, \dots, N).$$

基本解 $E(x, y)$ の代わりに、 $\Gamma(x, y)$

$$(3.7) \quad \Gamma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{|x-y|}{|x|}$$

を用いて問題を解く。

次の $X^{(N)}$ という関数空間から近似解 $u^{(N)}$ を選ぶ。

$$(3.8) \quad X^{(N)} = X^{(N)}\{y_l\} = \left\{ \sum_{l=1}^N Q_l \Gamma(x, y_l); (Q_l = Q_1, Q_2, \dots, Q_N) \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

N 個の点 $\{x_k\}_{k=1}^N$ を Γ 上にとり、次の条件で $\{Q_l\}_{l=1}^N$ を定める。

$$(3.9) \quad u^{(N)}(x_k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \Gamma(x_k, y_l) = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

この (3.9) 式は次のように書き直せる。

$$(3.10) \quad G\vec{Q} = \vec{f}.$$

ただし、 $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)^T$, $\vec{f} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T$, G は $G_{kl} = \Gamma(x_k, y_l)$ ($1 \leq k, l \leq N$) を要素とする $N \times N$ 行列である。

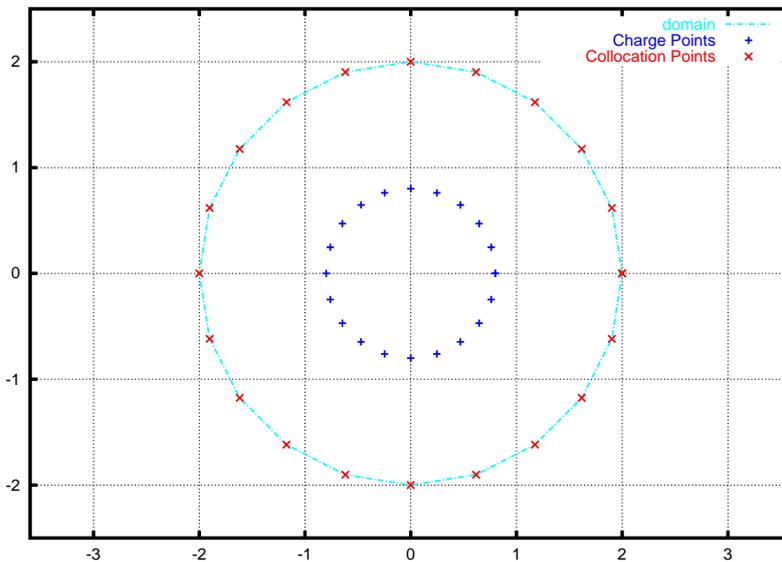


図 3.1: 円の外部領域, $R = 0.8$, $\rho = 2$, $N = 20$ のときの拘束点と電荷点

CSM 通常スキームに関して次のことが成り立つ。

定理 3.2.1. 行列 $G = (\Gamma(x_k, y_l))$ は正則行列である。すなわち、任意の f に対して (3.9) を満たす $u^{(N)} \in X^{(N)}$ が一意に存在する。

定理 3.2.2. $R(R > 0)$ が $R \neq 1$ を満たし、 $r_0 \in [0, \rho)$ が存在して、 $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus B(0; r_0)$ に対して u が $u \in C(\overline{\Omega'}) \cap C^2(\Omega')$, $\Delta u = 0$ in Ω' となるように拡張できるとする。
このとき、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{\frac{r_0}{\rho}} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 > R^2 \text{ のとき}) \\ CN \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 = R^2 \text{ のとき}) \\ C \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 < R^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるような R, ρ, r_0 のみで定まる 正定数 C が存在する。

注意 3.2.1. 円板内部領域問題 (通常スキーム) の定理 2.2.1, 定理 2.2.2 の条件 $R^N - \rho^N \neq 1$ は不要である。

注意 3.2.2. 定理 3.3.2 の仮定より、厳密解は複素 Fourier 級数を用いて、

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta} \quad (x = re^{i\theta} \in \Omega),$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta} \quad (x = re^{i\theta} \in \Omega'),$$

$$f'_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(r_0 e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

と書ける。

$r = \rho$ とすると Fourier 係数の一意性から、

$$f_n = f'_n \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{|n|} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

また、

$$|f'_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_0 e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(r_0 e^{i\theta}) e^{-in\theta}| d\theta \leq \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)|$$

であるから、

$$(3.11) \quad |f_n| \leq \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{|n|} \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

3.2.1 定理の証明

$\eta_k, \varphi_p^{(N)}(z)$ を以下のように定義する。

$$(3.12) \quad \eta_k = \Gamma(\rho, R\omega^k) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$(3.13) \quad \varphi_p^{(N)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \Gamma(z, R\omega^k) \quad (z \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{Z}).$$

証明のための準備として以下の補題を用意する。

$\varphi_p^{(N)}(z)$ については次が成り立つ。

補題 3.2.1. $z = re^{i\theta} (r > R)$ とするとき、

$$\varphi_p^{(N)}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \left| 1 - \left(\frac{R}{z}\right)^N \right| & (p \equiv 0 \pmod{N}) \\ \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{R}{r}\right)^{|m|} e^{im\theta} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\varphi_p^{(N)}$ は p について周期的である。

証明は付録 B を参照せよ。

また、円板領域問題の定理の証明で用いた“補題 2.2.1 (巡回行列の離散 Fourier 変換による対角化)”を用意する。

定理 3.2.1 の証明.

行列 G については、

$$(3.14) \quad G_{kl} = \Gamma(x_k, y_l) = \Gamma(\rho\omega^k, R\omega^l) = \Gamma(\rho, R\omega^{l-k}) = \eta_{l-k} \quad (1 \leq k, l \leq N).$$

すなわち、行列 G は巡回行列である。つまり、

$$(3.15) \quad G = \begin{pmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_{N-1} \\ \eta_{N-1} & \eta_0 & \cdots & \eta_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_0 \end{pmatrix}.$$

補題 2.2.1 の (2.12) を $C = G$ として用いる。

(3.13) より $\sqrt{N} \cdot \eta_{l-1} = \varphi_{l-1}^{(N)}(\rho)$ と書くことが出来るので、

$$W^{-1}GW = \text{diag}[\varphi_0^{(N)}(\rho), \varphi_1^{(N)}(\rho), \dots, \varphi_{N-1}^{(N)}(\rho)]$$

となる。

$$\det G = \det W^{-1}GW = \prod_{p=0}^{N-1} \varphi_p^{(N)}(\rho)$$

であるが、補題 3.2.1 より、

$$\varphi_p^{(N)}(\rho) > 0 \quad (1 \leq p \leq N-1), \quad \varphi_0^{(N)}(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \log \left| 1 - \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \right| > 0.$$

なので、

$$\det G \neq 0.$$

こうして定理 3.2.1 が導かれた。

□

定理 3.2.2 の証明.

ノルム $\|\cdot\|_{\infty, r}$ を以下のように定義する。

$$\|v\|_{\infty, r} = \sup_{|x| \leq r} |v(x)|.$$

補題 2.2.1 を $C = G$ として用いる。

(3.13) より $\sqrt{N} \cdot \gamma_{l-1} = \varphi_{l-1}^{(N)}(\rho)$ と書くことが出来るので、

$$(G^{-1})_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)}$$

である。

$\vec{Q} = G^{-1} \cdot \vec{f}$ において、 $\vec{Q} = (Q_k)$, $\vec{f} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T = (u(\rho), u(\rho\omega), \dots, u(\rho\omega^{N-1}))^T$ なので、

$$Q_k = \sum_{l=1}^N (G^{-1})_{kl} f_l = \sum_{l=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right) u(\rho\omega^{l-1}) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} u(\rho\omega^{k-1}).$$

したがって、

$$\begin{aligned} u^{(N)}(x) &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} u(\rho\omega^{l-1}) \right) E(x, R\omega^{k-1}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left(\sum_{p=0}^{N-1} u(\rho\omega^{l-1}) \omega^{-p(l-1)} \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{k=1}^N E(x, R\omega^{k-1}) \omega^{p(k-1)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{p=0}^{N-1} u(\rho\omega^{l-1}) \omega^{-p(l-1)} \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \cdot \varphi_p^{(N)}(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l,p=0}^{N-1} u(\rho\omega^l) \omega^{-pl} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)}. \end{aligned}$$

解の Fourier 級数表現

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta}$$

を代入して、

$$\begin{aligned} u^{(N)}(x) &= \frac{1}{N} \sum_{l,p=0}^{N-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \omega^{nl} \right) \omega^{-pl} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(n-p)j} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv p}} f_n = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv p}} f_n \frac{\varphi_n^{(N)}(x)}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{\varphi_n^{(N)}(x)}{\varphi_n^{(N)}(\rho)}. \end{aligned}$$

$e^{(N)}(x) = u(x) - u^{(N)}(x)$ とおくと、

$$(3.16) \quad e^{(N)}(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right\}.$$

u も $u^{(N)}$ も調和なので、外部領域に関する最大値原理 (定理 B.1.2) より、

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{r \leq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| &= \sup_{\substack{r=\rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left\{ \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right\} \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right|. \end{aligned}$$

ここで、

$$(3.17) \quad g_{n,\rho}^{(N)} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right|$$

とおくと、

$$(3.18) \quad \sup_{\substack{r \geq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| g_{n,\rho}^{(N)}.$$

$g_{n,\rho}$ に関して、次の補題が成り立つ。

補題 3.2.2. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(3.19) \quad g_{-n,\rho}^{(N)} = g_{n,\rho}^{(N)} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$(3.20) \quad g_{n,\rho}^{(N)} \leq 2 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

N が十分大きいとき、

$$(3.21) \quad g_{n,\rho}^{(N)} \leq \frac{8n}{N-n} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{N-2n} \quad (1 \leq n \leq \frac{N}{2}).$$

証明は付録 B 参照を参照せよ。

$$\begin{aligned}
\sup_{|x| \geq \rho} |e^{(N)}(x)| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| g_{n,\rho}^{(N)} \\
&= \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (|f_n| + |f_{-n}|) g_{n,\rho}^{(N)} + \sum_{n=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+1}^{\infty} (|f_n| + |f_{-n}|) g_{n,\rho}^{(N)} \\
&\equiv E_1 + E_2
\end{aligned}$$

$E_j (j = 1, 2)$ を評価する。

(3.11), (3.21) より、

$$\begin{aligned}
E_1 &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} 2 \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^n \|u\|_{\infty, r_0} \cdot \frac{8n}{N-n} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{N-2n} \\
&= 16 \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{n}{N-n} \left(\frac{\rho r_0}{R^2} \right)^n \\
&\leq 16 \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left(\frac{\rho r_0}{R^2} \right)^n.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{n=1}^m \tau^n \leq \begin{cases} \tau^{m+1}/(\tau-1) & (\tau > 1 \text{ のとき}) \\ m & (\tau = 1 \text{ のとき}) \\ \tau/(1-\tau) & (0 < \tau < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を $\tau = \frac{\rho r_0}{R^2}$, $m = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ として用いる。

$$\left(\frac{R}{\rho} \right)^N \cdot \tau^{\frac{N}{2}} = \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \cdot \left(\frac{\rho r_0}{R^2} \right)^{\frac{N}{2}} = \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{\frac{N}{2}} \text{ に注意する。}$$

$\frac{\rho r_0}{R^2} > 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
E_1 &\leq 16 \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \frac{\tau^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}}{\tau - 1} \leq 16 \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \cdot \tau^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} \frac{\tau^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1 - \frac{N}{2}}}{\tau - 1} \\
&= \frac{16}{\tau - 1} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} \tau^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1 - \frac{N}{2}} \leq \frac{16}{\tau - 1} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} \tau.
\end{aligned}$$

$\frac{\rho r_0}{R^2} = 1$ のとき、

$$E_1 \leq 16 \left[\frac{N}{2} \right] \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \leq 8N \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0}.$$

$\frac{\rho r_0}{R^2} < 1$ のとき、

$$E_1 \leq 16 \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \frac{\tau}{1-\tau} = \frac{16}{1-\tau} \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \|u\|_{\infty, r_0} \tau.$$

したがって、

$$(3.22) \quad E_1 \leq \begin{cases} \frac{16(\rho r_0/R^2)}{\rho r_0/R^2 - 1} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} > 1\right) \\ 8N \left(\frac{R}{\rho}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} = 1\right) \\ \frac{16(\rho r_0/R^2)}{1 - \rho r_0/R^2} \left(\frac{R}{\rho}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} < 1\right). \end{cases}$$

(3.11), (3.20) より、

$$(3.23) \quad \begin{aligned} E_2 &\leq \sum_{n=[\frac{N}{2}]+1}^{\infty} 2 \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n \|u\|_{\infty, r_0} \cdot 2 = 4 \|u\|_{\infty, r_0} \sum_{n=[\frac{N}{2}]+1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n \\ &\leq \frac{4}{1 - (r_0/\rho)} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{[\frac{N}{2}]+1} \|u\|_{\infty, r_0} \leq \frac{4}{1 - (r_0/\rho)} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{\frac{N+1}{2}} \|u\|_{\infty, r_0}. \end{aligned}$$

(3.22), (3.23) より、

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \geq \rho} |e^{(N)}(x)| &\leq E_1 + E_2 \\ &\leq \begin{cases} C \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} > 1\right) \\ CN \left(\frac{R}{\rho}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} + C \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} = 1\right) \\ C \left(\frac{R}{\rho}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} < 1\right). \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、

$$\sup_{|x| \geq \rho} |e^{(N)}(x)| \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{\frac{r_0}{\rho}}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} > 1\right) \\ CN \left(\frac{R}{\rho}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} = 1\right) \\ C \left(\frac{R}{\rho}\right)^N \|u\|_{\infty, r_0} & \left(\frac{\rho r_0}{R^2} < 1\right). \end{cases}$$

定理 3.2.2 が導かれた。

□

3.3 CSM 不変スキームによる円の外部領域問題の定理

通常スキームのときと同様、 $0 < R < \rho$ なる R と $N \in \mathbb{N}$ をとり、拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N$ と電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N$ を (3.5), (3.6) で定義する。

電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{\Omega}\}$ を適当に選んで、

$$u^{(N)}(x) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x - y_l|$$

という近似式を設定する。

ここで、制約条件

$$(3.24) \quad \sum_{l=1}^N Q_l = 0$$

を用いて $u^{(N)}(x)$ を変形する。

$$(3.25) \quad \begin{aligned} u^{(N)}(x) &= Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x - y_l| \\ &= Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x - y_l| + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \log |x| \\ &= Q_0 - \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{l=1}^N Q_l \frac{\log |x - y_l|}{\log |x|} \right) \end{aligned}$$

と書ける。

ここで、

$$(3.26) \quad \Gamma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{|x - y|}{|x|}$$

とおく。

係数 $\{Q_l\}_{l=0}^N$ を N 個の拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \Gamma$ における拘束条件

$$(3.27) \quad u^{(N)}(x_k) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N Q_l \Gamma(x_k, y_l) = f(x_k)$$

と制約条件 (3.24) で定める。

(3.27) は、次式のように書き直せる。

$$(3.28) \quad \tilde{G} \vec{Q}_o = \vec{f}_o$$

ただし、 $\vec{Q}_o = (Q_0, Q_1, \dots, Q_N)^T$, $\vec{f}_o = (0, f(x_1), \dots, f(x_N))^T$, \tilde{G} は、

$$(3.29) \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & G \end{bmatrix}$$

という $(N+1) \times (N+1)$ 行列とする。ただし、 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$, G は $G_{kl} = \Gamma(x_k, y_l)$ ($1 \leq k, l \leq N$) を要素とした $N \times N$ 行列である。

この CSM 不変スキームに関して次のことが成り立つ。

定理 3.3.1. 行列 \tilde{G} は正則行列である。すなわち、任意の f に対して (3.25) の形をした $u^{(N)}$ で拘束条件 (3.27) と制約条件 (3.24) を満たすものが一意に存在する。

定理 3.3.2. $r_0 \in [0, \rho)$ が存在して、 $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus B(0; r_0)$ に対して u が $u \in C(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$, $\Delta u = 0$ in Ω' となるように拡張できるとする。

このとき、

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq \begin{cases} C \left(\sqrt{\frac{r_0}{\rho}} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 > R^2 \text{ のとき}) \\ CN \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 = R^2 \text{ のとき}) \\ C \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \sup_{|x| \leq r_0} |u(x)| & (\rho r_0 < R^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるような R, ρ, r_0 のみで定まる 正定数 C が存在する。

注意 3.3.1. 定理 3.2.1, 定理 3.2.2 の条件 $R \neq 1$ は不要である。

3.3.1 定理の証明

通常スキームの定理の証明と同様に $\eta_k, \varphi_p^{(N)}(z)$ を (3.12), (3.13) で定義する。

証明には補題 3.2.1, 補題 3.2.2, 補題 2.2.1, 定理 B.1.2 を用いる。

定理 3.3.1 の証明.

(2.9) の N 次離散 Fourier 変換 $W = (W_{kl})(l, k = 1, 2, \dots, N)$ を用いて、

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix}$$

とおく。ただし、 $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$ である。

行列 G については、

$$(3.30) \quad G_{kl} = \Gamma(x_k, y_l) = \Gamma(\rho \omega^k, R \omega^l) = \Gamma(\rho, R \omega^{l-k}) = \eta_{l-k} \quad (1 \leq k, l \leq N).$$

すなわち、行列 G は巡回行列である。

定理 2.3.1 の証明と同様にして、

$$(3.31) \quad \tilde{W}^{-1} \tilde{G} \tilde{W} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \sqrt{N} & \mathbf{0}^T \\ \sqrt{N} & \varphi_0^{(N)}(\rho) & O \\ \hline \mathbf{0} & O & \Phi \end{array} \right],$$

ただし $\Phi = \text{diag}[\varphi_1^{(N)}(\rho), \varphi_2^{(N)}(\rho), \dots, \varphi_{N-1}^{(N)}(\rho)]$ である。

$$\det \tilde{G} = \det \tilde{W}^{-1} \tilde{G} \tilde{W} = -N \prod_{p=1}^{N-1} \varphi_p^{(N)}(\rho)$$

であるが、補題 3.2.1 より、 $\varphi_p^{(N)}(\rho) > 0$ ($p = 1, 2, \dots, N-1$) なので、

$$\det \tilde{G} < 0$$

定理 3.3.1 が導かれた。

□

定理 3.3.2 の証明.

定理 2.3.2 の証明と同様にして、

$$Q_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(\rho\omega^{j-1}), \quad Q_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} \omega^{p(k-j)} u(\rho\omega^{j-1}) \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

と書ける。

したがって、

$$\begin{aligned} u^{(N)}(x) &= Q_0 + \sum_{i=1}^N Q_i \Gamma(x, R\omega^{i-1}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(\rho\omega^{j-1}) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} \omega^{p(i-j)} u(\rho\omega^{j-1}) \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right) \Gamma(x, R\omega^{i-1}) \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N u(\rho\omega^{j-1}) + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{p=1}^{N-1} u(\rho\omega^{j-1}) \omega^{-p(j-1)} \frac{1}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{i=1}^N \Gamma(x, R\omega^{i-1}) \omega^{p(i-1)} \right) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N u(\rho\omega^{j-1}) + \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} u(\rho\omega^{j-1}) \omega^{-p(j-1)} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right\}. \end{aligned}$$

解の Fourier 級数表現

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta}$$

を代入して、

$$\begin{aligned}
u^{(N)}(x) &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \omega^{n(j-1)} \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \omega^{n(j-1)} \right) \omega^{-p(j-1)} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right\} \\
&= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{nj} \right) + \sum_{p=1}^{N-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \right) \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(n-p)j} \right\} \\
&= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0}} f_n + \sum_{p=1}^N \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv p}} f_n \\
&= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0}} f_n + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{\varphi_n^{(N)}(x)}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} f_n.
\end{aligned}$$

ゆえに $e^{(N)}(x) = u(x) - u^{(N)}(x)$ は、

$$\begin{aligned}
e^{(N)}(re^{i\theta}) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0}} f_n \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta} - 1 \right\} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right\} \\
&= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0, n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta} - 1 \right\} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right\}.
\end{aligned}$$

u も $u^{(N)}$ も調和なので円の外部領域に関する最大値原理 (定理 B.1.2) より、

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{r \geq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| &= \sup_{\substack{r=\rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \left| \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0, n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta} - 1 \right\} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} f_n \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|n|} e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right\} \right| \\
&\leq 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0, n \neq 0}} |f_n| + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} |f_n| g_{n,\rho}^{(N)}.
\end{aligned}$$

ただし、 $g_{n,\rho}^{(N)}$ は (2.17) で定義したものである。補題 3.2.2 の (3.20) を用いて、

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{r \geq \rho \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} |e^{(N)}(re^{i\theta})| &\leq 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 0, n \neq 0}} |f_n| + 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} |f_n| \\
(3.32) \quad &= 2 \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (|f_n| + |f_{-n}|) + 2 \sum_{n=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{\infty} (|f_n| + |f_{-n}|) \\
&\equiv E_1 + E_2.
\end{aligned}$$

こうして定理 3.3.2 が導かれる。

□

3.4 数値実験

円の外部領域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > \rho\}$ における Laplace 方程式の Dirichlet 問題 (3.1) の数値実験を紹介する。

拘束点 $\{x_k\}_{k=1}^N$ と電荷点 $\{y_l\}_{l=1}^N$ は、

$$\begin{cases} \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), & i = \sqrt{-1} \\ x_k = \rho\omega^{k-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\kappa\right) & (k = 1, 2, \dots, N) \\ y_l = R\omega^{l-1} & (l = 1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

で定める。ただし、 $0 < R < \rho$, $\kappa \in [0, \frac{1}{2}]$ とする。

N, R, κ, f が与えられているとき、CSM により近似解 $u^{(N)}$ を計算する。誤差評価において、最大値の見積もりは境界上で行えば良いので、近似解の誤差を、境界上から乱数を用いて選んだ 100 個の点 $Z_j (j = 1, 2, \dots, 100)$ における近似解と厳密解の差を絶対値の最大値

$$\tilde{e}^{(N)} \equiv \max\{|u(Z_j) - u^{(N)}(Z_j)|; |Z_j| = \rho\} \quad (j = 1, 2, \dots, 100)$$

で見積もる。

また、“3.4.5 円の外部領域における Laplace 方程式の Neumann 問題” の数値実験では、乱数を用いて境界上の 100 個の点を選んで近似解と厳密解の差を絶対値の最大値

$$\tilde{e}^{(N)} \equiv \max\{|(u(Z_j) - u(0)) - (u^{(N)}(Z_j) - u^{(N)}(0))|; |Z_j| = \rho\} \quad (j = 1, 2, \dots, 100)$$

で見積もる。

なお、プログラムには MATLAB (Octave) を用いている。

3.4.1 $u(re^{i\theta}) = (1/r)^m \cos m\theta$ のときの通常スキームと不変スキームの比較

$$f(\rho e^{i\theta}) = h_m(\rho e^{i\theta}) = (1/\rho)^m \cos m\theta$$

である。

$m \in \{1, 2, \dots, 5\}$ をパラメーターとして動かす。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

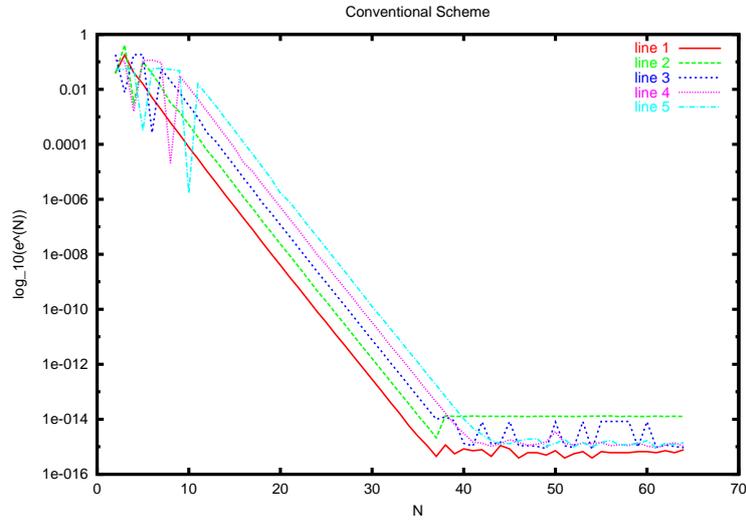


図 3.2: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = h_m$ ($m = 1, 2, \dots, 5$), $N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

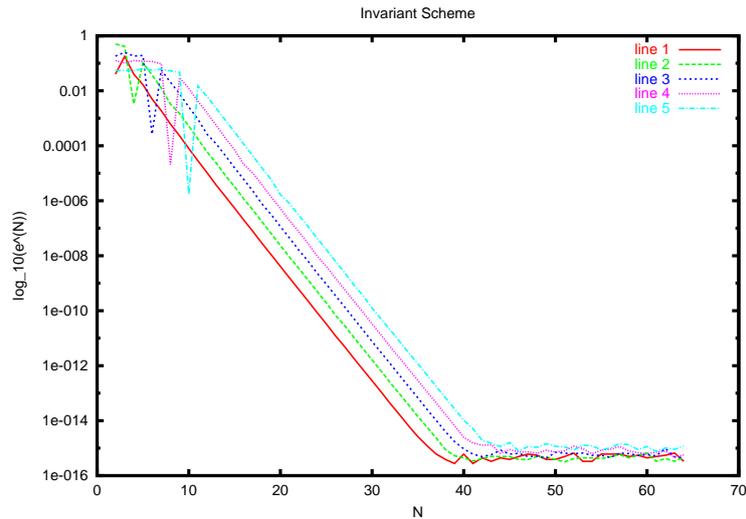


図 3.3: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = h_m$ ($m = 1, 2, \dots, 5$), $N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

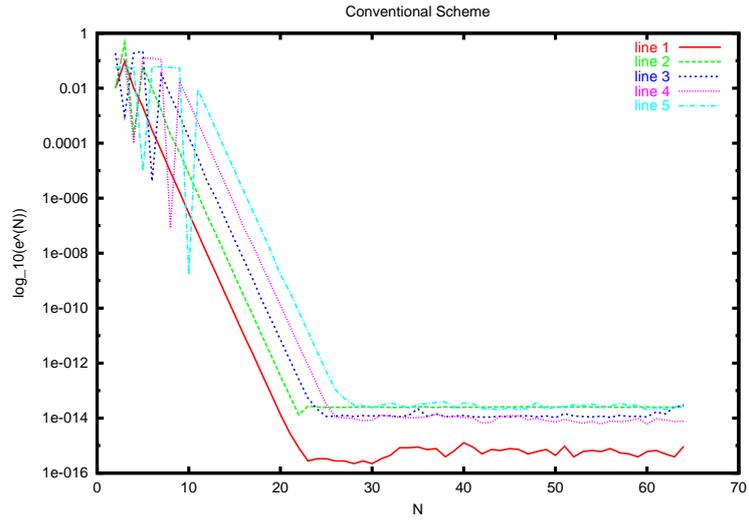


図 3.4: $R = 0.4$, $\rho = 2$, $f = h_m$ ($m = 1, 2, \dots, 5$), $N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

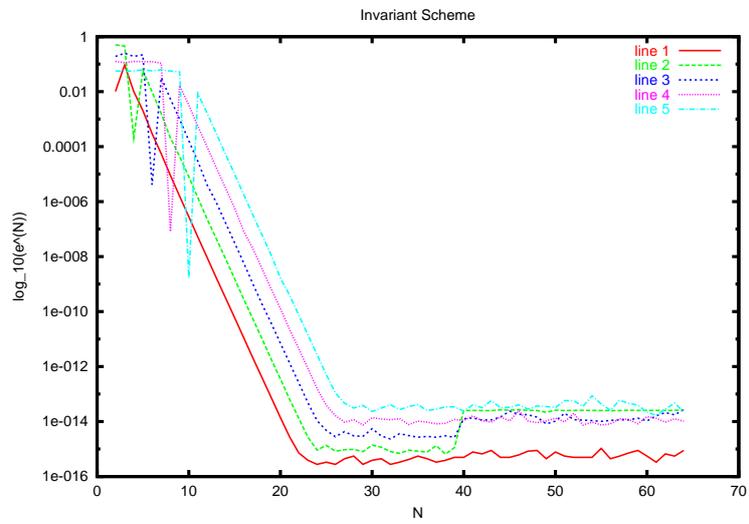


図 3.5: $R = 0.4$, $\rho = 2$, $f = h_m$ ($m = 1, 2, \dots, 5$), $N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

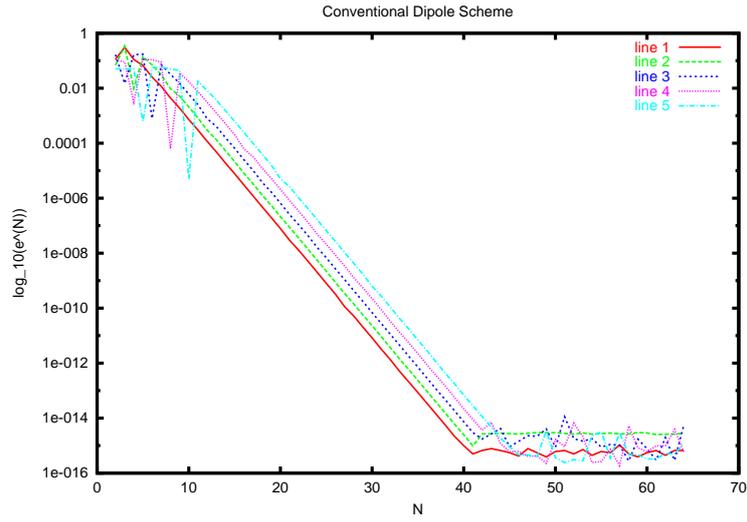


図 3.6: $R = 0.8, \rho = 2, f = l_p (p = 1.0, 1.1, \dots, 1.6), N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常双極子スキーム

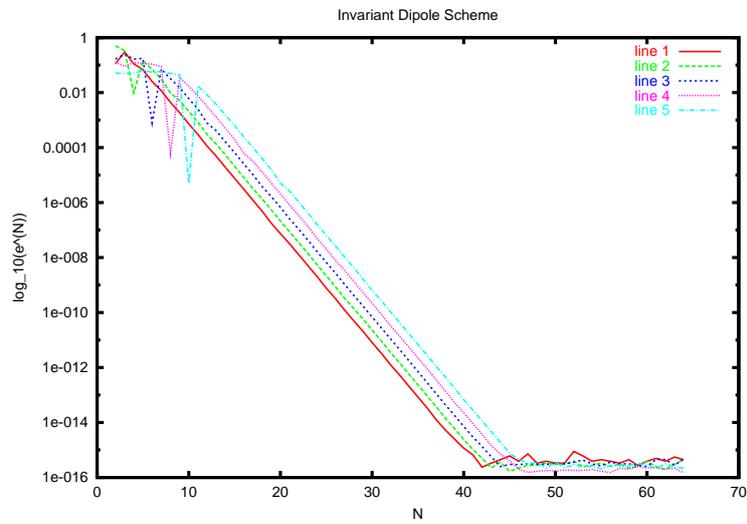


図 3.7: $R = 0.8, \rho = 2, f = l_p (p = 1.0, 1.1, \dots, 1.6), N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変双極子スキーム。

不変スキームによる近似解と厳密解の差をグラフにする。
 次は $m = 2, N = 10$ の場合である。

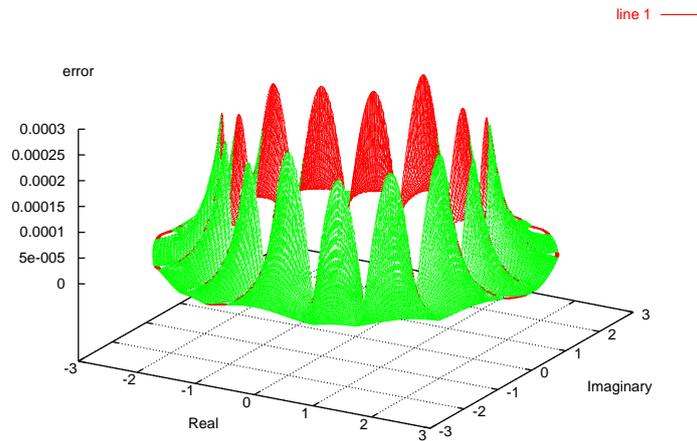


図 3.8: $R = 0.8, \rho = 2, f = h_2, N = 10$, 不変スキームによる近似解と厳密解の比較

境界上での誤差をグラフにする。

グラフは、縦軸が近似解の誤差を表し、横軸が角度 (境界上の点を $\rho e^{i\theta}$ とするときの θ) を表す。

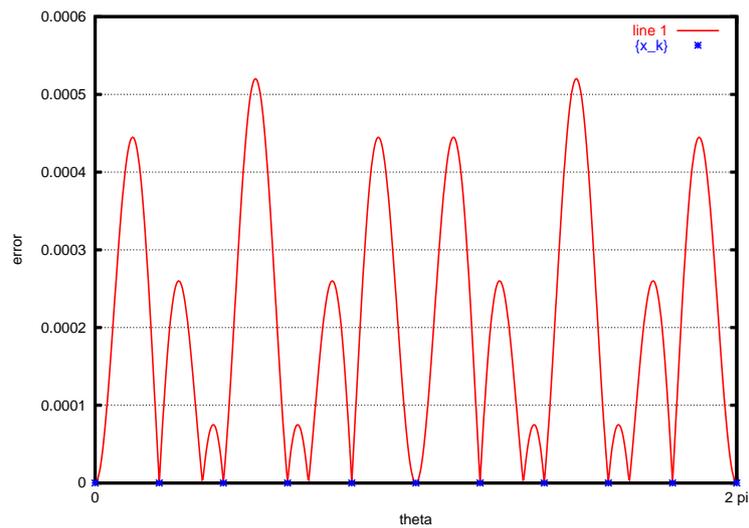


図 3.9: $R = 0.8, \rho = 2, f = h_2, N = 10$, 境界上での誤差

不変スキームによる近似解をグラフにする。
 $m = 2$ のときのグラフ。

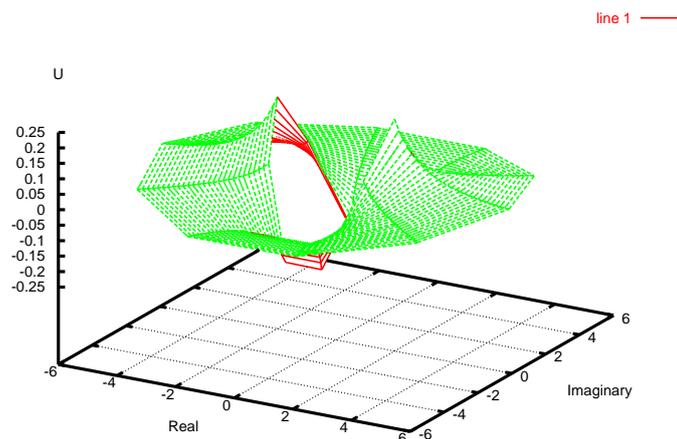


図 3.10: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = h_2$, $N = 10$, 不変スキームによる近似解

- 誤差のグラフが直線状になっているため、円板領域の数値実験と同様、通常スキーム、不変スキーム、双極子通常スキーム、双極子不変スキームの誤差が指数関数的に減少している様子が分かる。
- u が調和多項式の際の数値実験では、通常スキーム、不変スキームともほぼ同じ収束速度を示している。また、円の外部領域では、不変スキームのほうが最終的な誤差が低い値で落ち着いている。
- $R = 0.8$ のグラフでは、通常スキーム、不変スキームの両方とも N が 30 ~ 40 $R = 0.4$ のグラフでは、通常スキーム、不変スキームの両方とも N が 20 ~ 30 の間で最終的な誤差に落ち着いている。 R が小さい程、最終的な誤差に早く落ちることが分かる。
- 実際、不変スキーム、双極子不変スキームにおいて $R = 1$ として実験をしたが、うまく誤差が指数関数的に収束した。定理にあるように $R = 1$ という条件が不要であることが分かった。

3.4.2 f が対数ポテンシャルのときの通常スキームと不変スキームの比較

境界値 f が対数ポテンシャルであるときを扱う。

$$f(x) = l_p(x) = \log|x - p| - \log|x|$$

$p \in (0, \rho)$ をパラメーターとして動かす。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

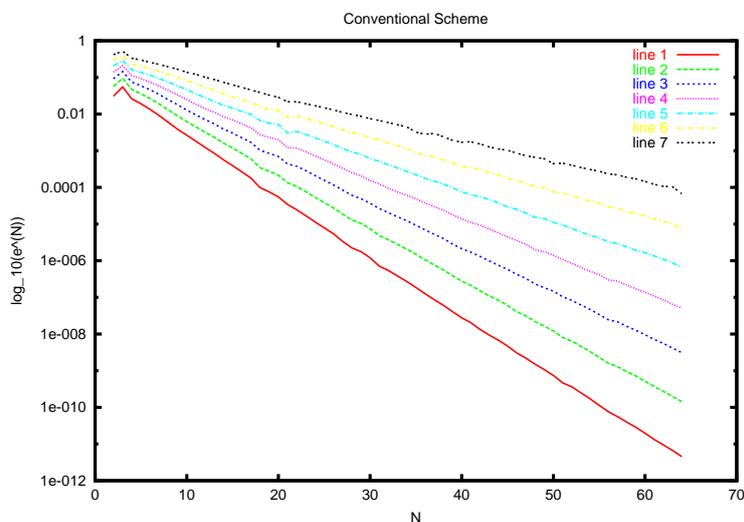


図 3.11: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = l_p$ ($p = 1.0, 1.1, \dots, 1.6$), $N = N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

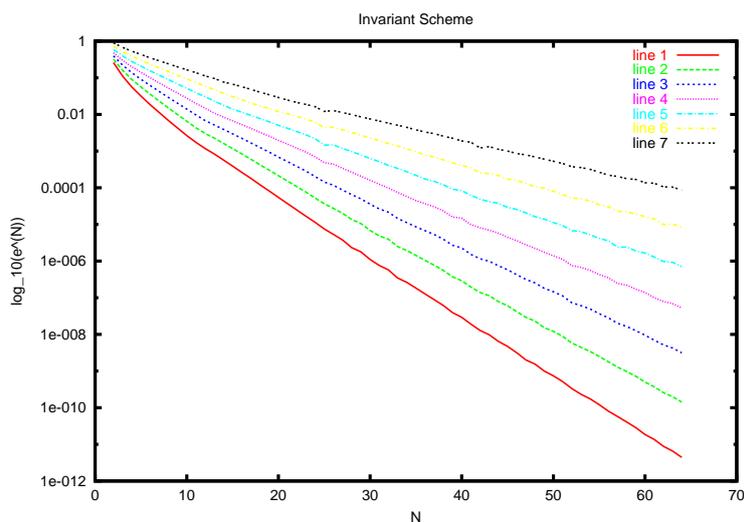


図 3.12: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = l_p$ ($p = 1.0, 1.1, \dots, 1.6$), $N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

次に各 p に対し、傾き τ をプロットする。
 グラフは、縦軸が p 横軸が 傾き τ を表す。
 定理から $\tau \sim \max\left\{\frac{R}{\rho}, \sqrt{\frac{p}{\rho}}\right\}$ と期待される。
 グラフは、縦軸が p 横軸が τ を表す。

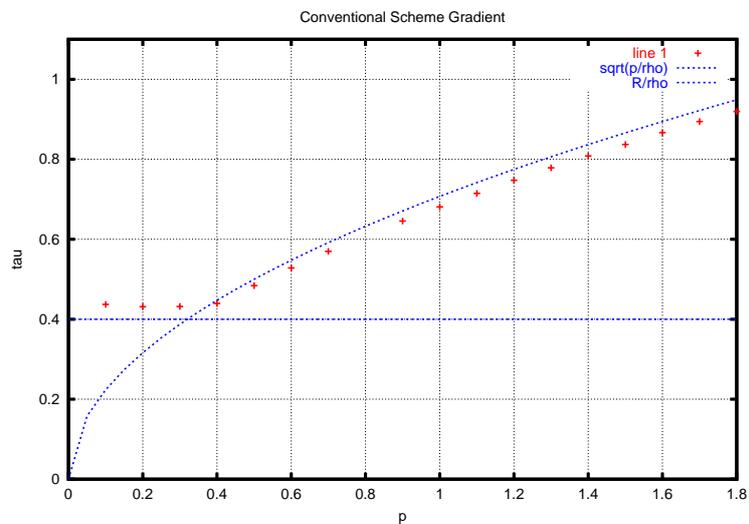


図 3.13: $R = 0.8, \rho = 2, f = l_p (p = 0.2, 0.3, \dots, 1.8)$, 通常スキーム

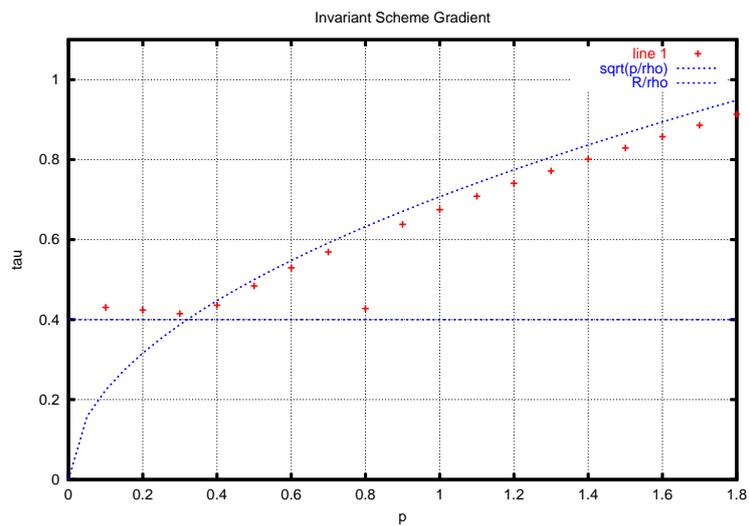


図 3.14: $R = 0.8, \rho = 2, f = l_p (p = 0.2, 0.3, \dots, 1.8)$, 不変スキーム

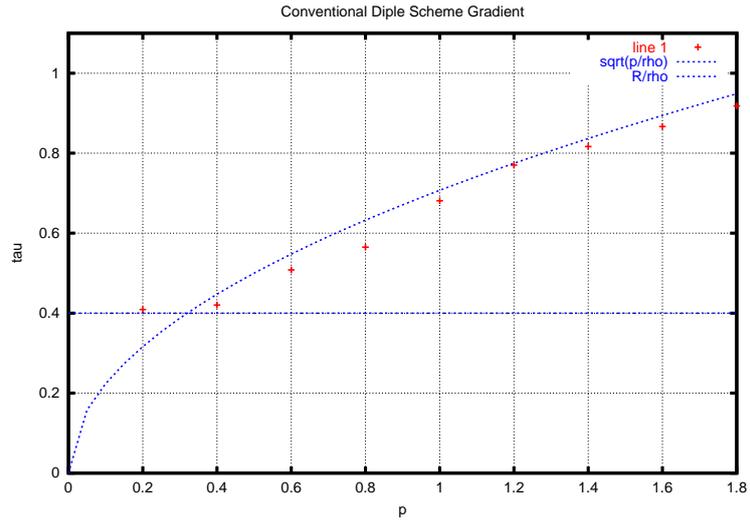


図 3.15: $R = 0.8, \rho = 2, f = l_p (p = 0.2, 0.3, \dots, 1.8)$, 通常双極子スキーム

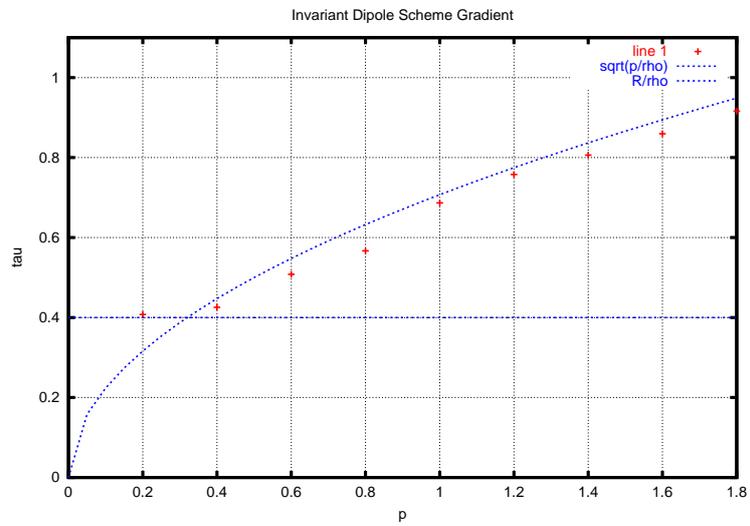


図 3.16: $R = 0.8, \rho = 2, f = l_p (p = 0.2, 0.3, \dots, 1.8)$, 不変双極子スキーム

不変スキームによる近似解と厳密解の差をグラフにする。
 次は $p = 0.4$, $N = 10$ のときのグラフ。

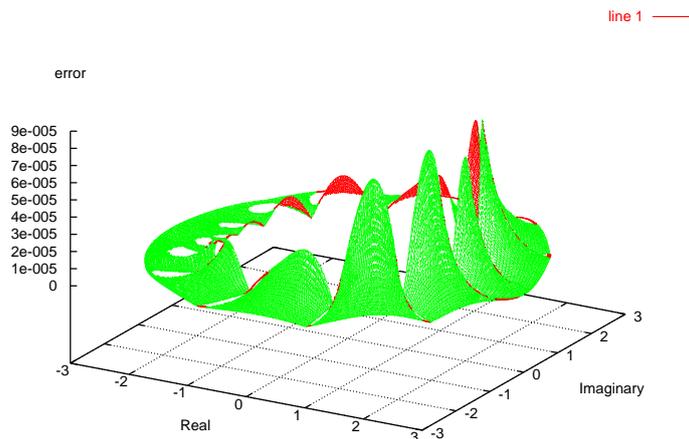


図 3.17: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = l_p(p = 0.4)$, $N = 10$, 不変スキームによる近似解と厳密解の比較

不変スキームによる近似解をグラフにする。
 $p = 0.4$ のときのグラフ。

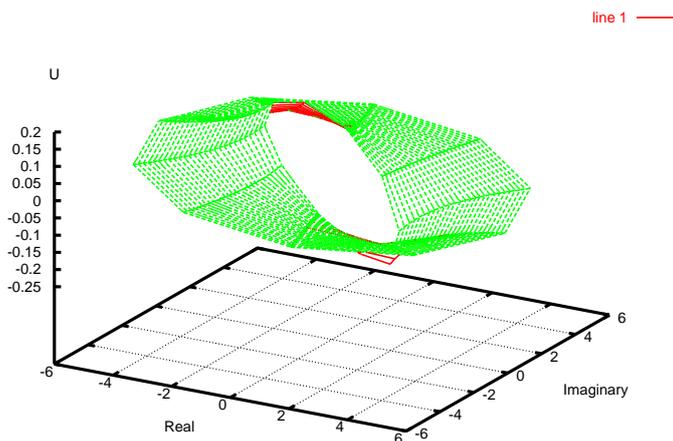


図 3.18: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = l_p(p = 0.4)$, $N = 10$, 不変スキームによる近似解

- 通常スキーム、不変スキームのグラフの両方とも誤差は指数関数的に減少している様子が分かる。
- 通常スキーム、不変スキームの傾きのプロットは、青線で引いた理想の値とほぼ等しくなる。定理の主張を確認できる。双極子シミュレーションでも同じことが言える。

3.4.3 領域 Ω の外部での収束

通常スキームと不変スキームにおいて、領域 Ω の外部での収束を考える。
境界値 f は

$$f(\rho e^{i\theta}) = (1/\rho) \cos \theta$$

とする。

円板領域 Ω の半径 $r \in \{1.0, 1.2, \dots, 3.0\}$ をパラメーターとして動かす。
グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は r を表す。

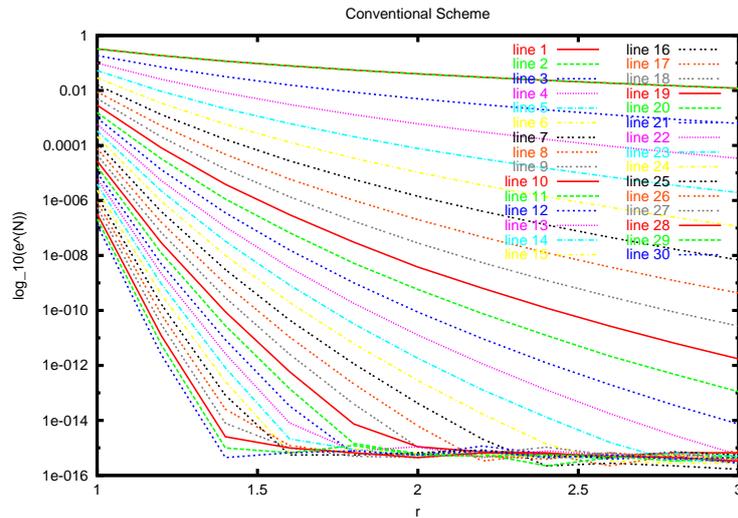


図 3.19: $R = 0.8, \rho = 2, N \in \{2, 4 \dots, 60\}, (r = 1.0, 1.2, \dots, 3.0)$, 通常スキーム

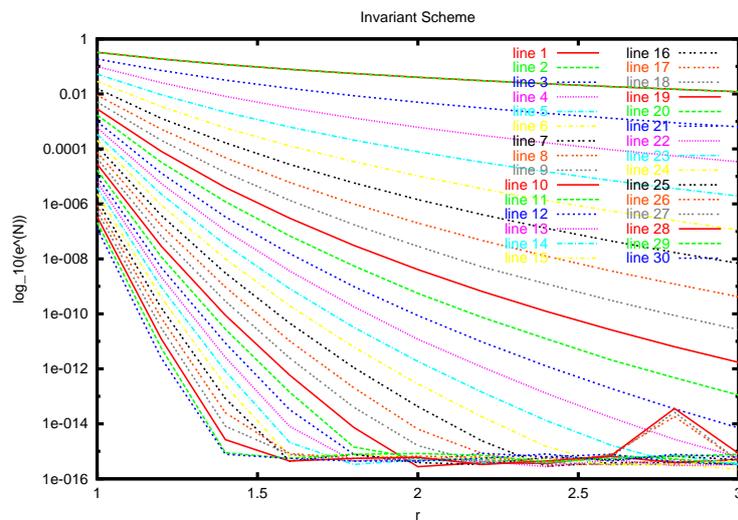


図 3.20: $R = 0.8, \rho = 2, N \in \{2, 4 \dots, 60\}, (r = 1.0, 1.2, \dots, 3.0)$, 不変スキーム

- 通常スキーム、不変スキームの両方とも $r = \rho$ この場合は $r = 2.0$ の外部領域で、誤差が減っている様子が分かる。

- 数値実験の考察では、円の外部領域問題の通常スキーム、不変スキームでも定理 2.5.1 と同様のことが言えると思われる。もちろん、通常スキームの場合は $R^N - \rho^N \neq 1$ という条件、不変スキームの場合は $R = 1$, $R^N - \rho^N \neq 1$ は必要ではない。証明は行っていない。

3.4.4 拘束点と電荷点の配置方法

境界値 f は

$$f(\rho e^{i\theta}) = h_m(\rho e^{i\theta}) = (1/\rho)^m \cos m\theta$$

とする。 $m \in \{1, 2, \dots, 5\}$ をパラメーターとして動かす。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

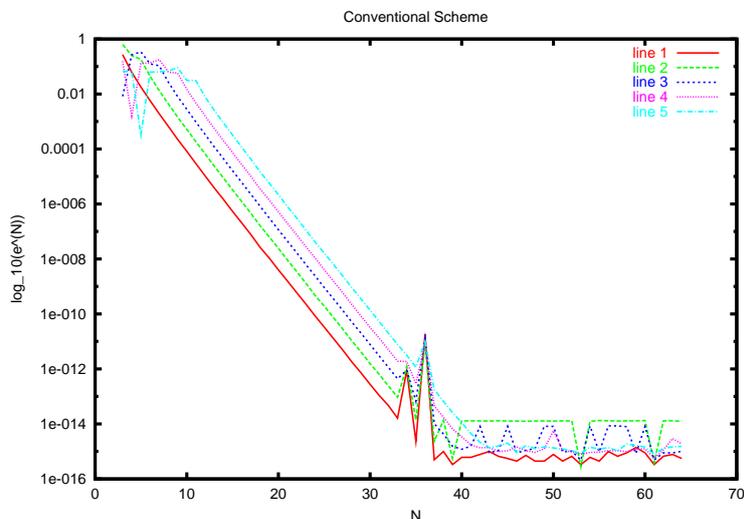


図 3.21: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5)$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

N は奇数とする。

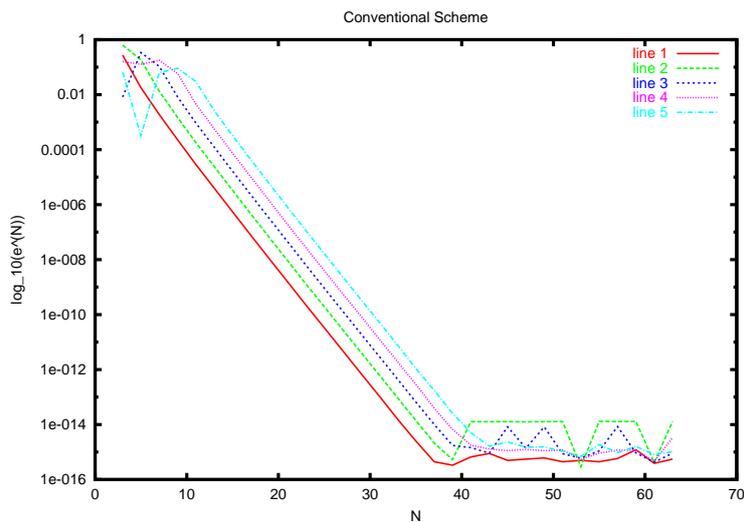


図 3.22: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5)$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $N = (3, 5, \dots, 63)$ で奇数, 通常スキーム

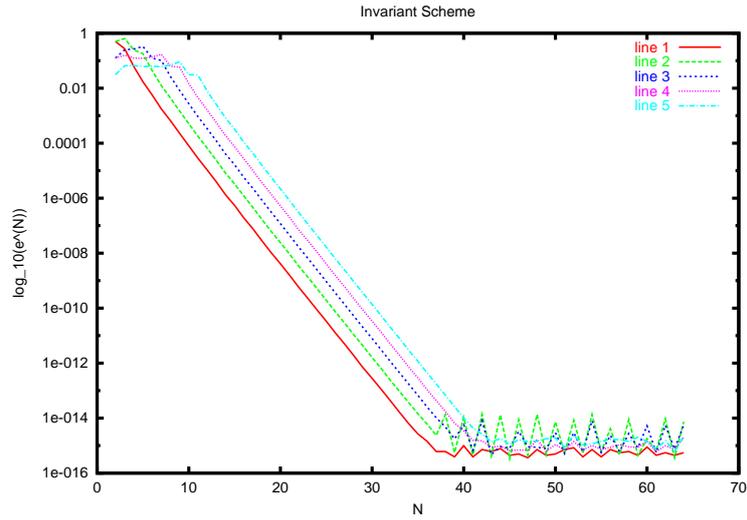


図 3.23: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5)$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

N は奇数とする。

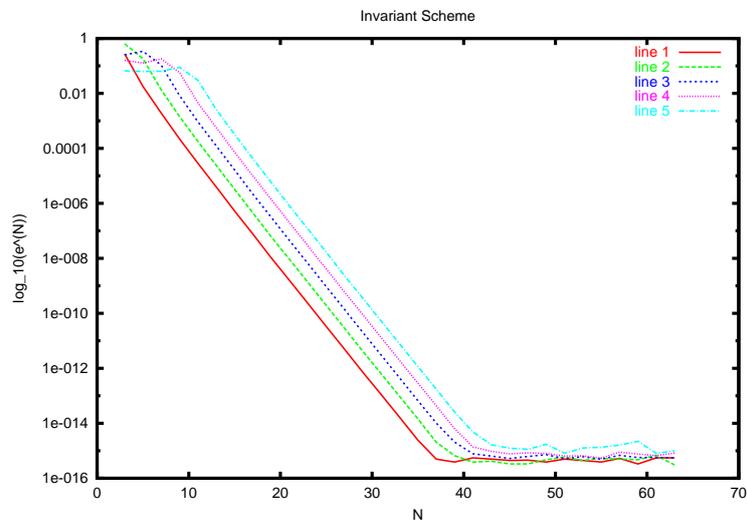


図 3.24: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = h_m (m = 1, 2, \dots, 5)$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $N = (3, 5, \dots, 63)$ で奇数, 不変スキーム

次に、 N を偶数とし、境界値 f は

$$f(\rho e^{i\theta}) = (1/\rho) \cos \theta$$

とする。

$\kappa < \frac{1}{2}$ で動かす、 $\kappa = \frac{1}{2} - 10^{-j}$ で $j \in \{2, 4, \dots, 14\}$ をパラメータとして動かす。
 グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

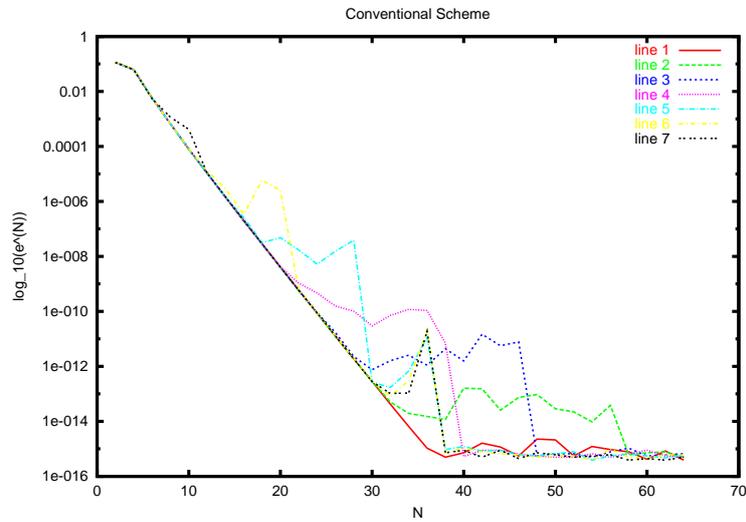


図 3.25: $R = 0.8, \rho = 2, f = \frac{1}{\rho} \cos \theta, \kappa = \frac{1}{2} - 10^{-j} (j = 2, 4 \dots, 14)$, 通常スキーム

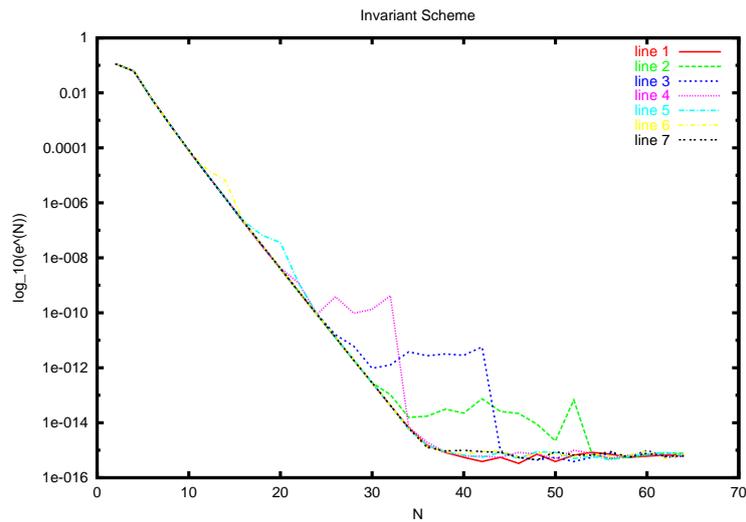


図 3.26: $R = 0.8, \rho = 2, f = \frac{1}{\rho} \cos \theta, \kappa = \frac{1}{2} - 10^{-j} (j = 2, 4 \dots, 14)$, 不変スキーム

- κ を $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ で変化させて実験をしたが、通常スキーム、不変スキームとも $\kappa = 0$ のときのグラフとほぼ同じ収束を示しており誤差は申し分ない。
- $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ で変化させたグラフ、図 3.25(通常スキーム)、図 3.26(不変スキーム) では、不変スキームの方が早く最終的な誤差に収束している

- $\kappa = \frac{1}{2}$, $N = 64$ のグラフ、図 3.21 (通常スキーム)、図 3.23(不変スキーム) では、円板領域のときと同様、行列 G を求める際に QR 分解を用いて計算すると誤差の収束が N の値が偶数と奇数の場合わけが表れる。したがって、数値実験の考察では、円の外部領域問題の通常スキーム、不変スキームの場合も定理 2.5.2, 定理 2.5.3 と同様のことが言えると思われる。証明は行っていない。

3.4.5 円の外部領域における Laplace 方程式の Neumann 問題

2次元円の外部領域、

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > \rho\}$$

における Laplace 方程式の Neumann 問題

$$(3.33) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u = f & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

$$(3.34) \quad u \text{ は有界}$$

を考える。

通常スキームの場合は (3.34) の条件を

$$(3.35) \quad u(\infty) = 0$$

とする。ただし、 Γ は Ω の境界であり、 f は Γ で定義された関数とする。 $\frac{\partial}{\partial \nu}$ は、外向き法線方向の微分である。

(3.8) 式の $X^{(N)}$ という関数空間から近似解 $u^{(N)}$ を選ぶ。

つまり、次式をみたす $u^{(N)} \in X^{(N)}$ を近似解とする。

$$(3.36) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u^{(N)}(x_l) = f(x_l) \quad (l = 1, 2, \dots, N)$$

境界値 f は

$$f(\rho e^{i\theta}) = s_m(\rho e^{i\theta}) = (1/\rho)^{m+1} \cos m\theta$$

とする。 $m \in \{1, 2, \dots, 5\}$ をパラメーターとして動かす。

グラフは、縦軸が対数目盛り (底は 10) で誤差を表し、横軸は分割数 N を表す。

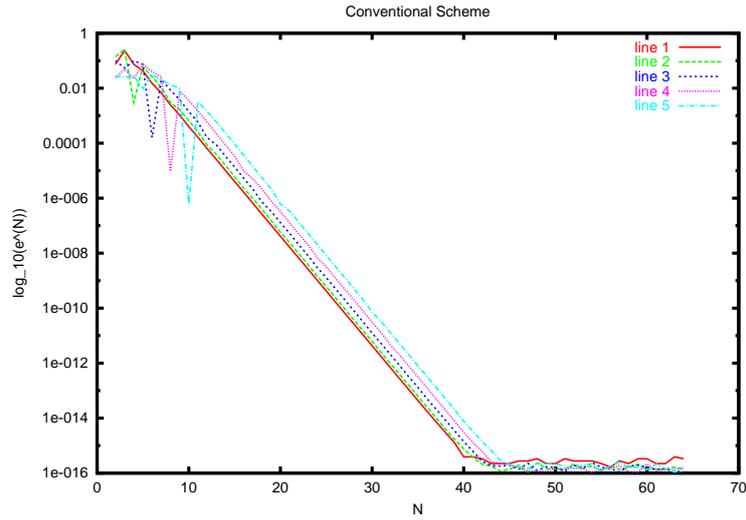


図 3.27: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = s_m$ ($m = 1, 2, \dots, 5$), $N = (2, 3, \dots, 64)$, 通常スキーム

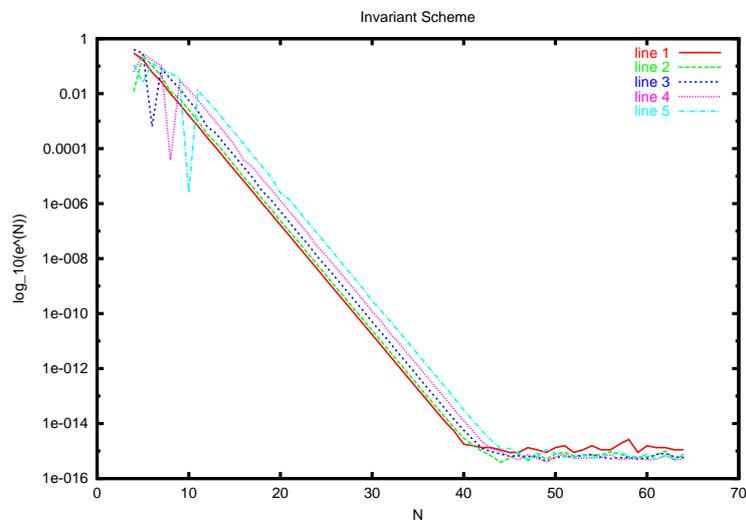


図 3.28: $R = 0.8$, $\rho = 2$, $f = s_m$ ($m = 1, 2, \dots, 5$), $N = (2, 3, \dots, 64)$, 不変スキーム

- 通常スキーム、不変スキームの両方とも誤差が指数関数的に減少している様子が分かる。
- 数値実験の考察では、円の外部領域問題の通常スキーム、不変スキームの場合も定理 2.5.4, 定理 2.5.5 と同様のことが言えると思われる。証明は行っていない。

付録 A 円板領域問題で用いた定理の紹介, 補題の証明とソースプログラム

A.1 調和関数に関する最大値原理

定理 A.1.1 (調和関数に関する最大値原理). Ω は \mathbb{R}^n の有界領域で、 Γ はその境界であるとする。 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ in Ω ならば、

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \Gamma} u(x), \quad \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \Gamma} u(x).$$

A.2 円板領域における Laplace 方程式 Dirichlet 問題の厳密解

2次元円板内部領域、

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < \rho\}$$

の Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$(A.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

Γ は Ω の境界であり、 f は Γ で定義された連続関数とする。
この問題の厳密解は複素 Fourier 級数を用いて、

$$(A.2) \quad u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in\theta},$$

$$(A.3) \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

と書ける。

定理 A.2.1 (内部 Dirichlet 問題の解の一意性). Laplace 方程式の内部 Dirichlet 問題の古典解は一意である。

定理 A.2.2. $f(\theta)$ は $[-\pi, \pi]$ で連続, $f(-\pi) = f(\pi)$, かつ $f'(\theta)$ は $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続とする。そのとき Dirichlet 問題 (A.1) の解 $u(re^{i\theta})$ は $f(\theta)$ の Fourier 係数 (A.3) を用いて作った無限級数 (A.2) で与えられる。

A.3 円板領域における Laplace 方程式 Neumann 問題の厳密解

2次元円板内部領域、

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < \rho\}$$

の Laplace 方程式の Neumann 問題

$$(A.4) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u = f & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

を考える。ただし、 Γ は、 Ω の境界であり、 f は Γ で定義された連続関数とする。 $\frac{\partial}{\partial \nu}$ は、外向き法線方向の微分である。

この問題の厳密解は複素 Fourier 級数解を用いて、

$$(A.5) \quad u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\rho}{n} f_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in\theta},$$

$$(A.6) \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

と書ける。

定理 A.3.1 (内部 Neumann 問題の解の一意性). Neumann 問題 (A.4) の二つの解の差は定数値関数である。すなわち、Neumann 問題の解は付加定数を除いて一意である。

定理 A.3.2. f は Γ 上で連続であるとする。Neumann 問題 (A.4) の解が存在するならば、

$$(A.7) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0$$

が成り立つ。

A.4 補題 2.2.1 の証明

証明.

ユニタリ行列 W を用いて、ベクトル

$$\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$$

の離散 Fourier 変換を

$$(A.8) \quad \gamma = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}] = W\mathbf{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} c_p \omega^{p(l-1)}$$

とすると、 $\gamma^T = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}] = \mathbf{c}^T W^T = \mathbf{c}^T W$ であるから、 CW の (k, l) 要素は

$$\begin{aligned} (CW)_{kl} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} c_{p-k+1} \omega^{p(l-1)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} c_p \omega^{(p+k-1)(l-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{(k-1)(l-1)} \sum_{p=0}^{N-1} c_p \omega^{p(l-1)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{(k-1)(l-1)} \gamma_{l-1} \end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$CW = \sqrt{N} \text{diag}[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}]$$

となる。したがって、

$$W^{-1}CW = \sqrt{N} W^* W \text{diag}[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}] = \sqrt{N} \text{diag}[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}]$$

次に、 C^{-1} を計算する。

$$C^{-1} = W \cdot (W^{-1}CW)^{-1} \cdot W^{-1} = W \cdot \text{diag} \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\frac{1}{\gamma_0}, \frac{1}{\gamma_1}, \dots, \frac{1}{\gamma_{N-1}} \right] \cdot W^{-1}.$$

したがって、

$$\begin{aligned} (C^{-1})_{kl} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{(k-1)(l-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{N} \gamma_{l-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{-(k-1)(l-1)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{\omega^{(k-1)(l-1)}}{\sqrt{N} \gamma_{l-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{-(k-1)(l-1)} \\ &= \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{p=1}^N \frac{\omega^{(k-1)(p-1)}}{\gamma_{p-1}} \omega^{-(p-1)(l-1)} = \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \omega^{(k-1)p} \frac{1}{\gamma_p} \omega^{-p(l-1)} = \frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-l)}}{\gamma_p}. \end{aligned}$$

□

A.5 補題 2.2.2 の証明

証明.

$p \equiv q \pmod{N}$ のとき、 $\varphi_p^{(N)} = \varphi_q^{(N)}$ である。

$p \equiv 0 \pmod{N}$ のとき

$$\begin{aligned}\varphi_p^{(N)}(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} E(z, R\omega^k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \log |z - R\omega^k| \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log \prod_{k=0}^{N-1} |z - R\omega^k| = -\frac{1}{2\pi} \log |z^N - R^N|.\end{aligned}$$

$p \not\equiv 0 \pmod{N}$ のとき

$$\begin{aligned}E(z, R\omega^k) &= -\frac{1}{2\pi} \log |z - R\omega^k| = -\frac{1}{2\pi} \log |R\omega^k| \left| \frac{z}{R\omega^k} - 1 \right| = -\frac{1}{2\pi} \{ \log R + \operatorname{Re} \log \left(1 - \frac{z}{R\omega^k} \right) \} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \{ \log R - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z\omega^{-k}}{R} \right)^n \} = -\frac{1}{2\pi} \{ \log R - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{r}{R} \right)^n (e^{in\theta} \omega^{-nk} + e^{-in\theta} \omega^{nk}) \}.\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{lk} = \begin{cases} N & (l \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を用いて $\varphi_p^{(N)}(z)$ を計算する。

$$\begin{aligned}\varphi_p^{(N)}(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} E(z, R\omega^k) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \{ \log R - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{r}{R} \right)^n (e^{in\theta} \omega^{-nk} + e^{-in\theta} \omega^{nk}) \}.\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \log R = 0 \text{ より、}$$

$$\varphi_p^{(N)}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{r}{R} \right)^n \sum_{k=0}^{N-1} \{ e^{in\theta} \omega^{(p-n)k} + e^{-in\theta} \omega^{(p+n)k} \}.$$

$p - n \equiv 0$ または $p + n \equiv 0$ のとき、すなわち $n = p \pm mN$ とすると、

$$\begin{aligned}\varphi_p^{(N)}(z) &= \frac{N}{4\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mN - p} \left(\frac{r}{R} \right)^{mN-p} e^{-i(mN-p)\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mN + p} \left(\frac{r}{R} \right)^{mN+p} e^{i(mN+p)\theta} \right\} \\ &= \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{r}{R} \right)^{|m|} e^{im\theta}.\end{aligned}$$

□

A.6 補題 2.2.3 の証明

(2.19) の証明.

$$\varphi_p^{(N)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} E(z, R\omega^k) \quad (z \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{Z})$$

より、

$$(A.9) \quad \varphi_{-n}^{(N)}(z) = \overline{\varphi_n^{(N)}(z)} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

したがって、

$$\begin{aligned} g_{-n,\rho}^{(N)} &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{-in\theta} - \frac{\varphi_{-n}^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_{-n}^{(N)}(\rho)} \right| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{-in\theta} - \frac{\overline{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}}{\overline{\varphi_n^{(N)}(\rho)}} \right| \\ &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| = g_{n,\rho}^{(N)}. \end{aligned}$$

(2.19) は示された。

□

(2.20) の証明.

$n \notin N\mathbb{Z} = \{lN; l \in \mathbb{Z}\}$ のとき、

$$(A.10) \quad \begin{aligned} |\varphi_n^{(N)}(z)| &= \left| \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv n \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{r}{R}\right)^{|m|} e^{im\theta} \right| = \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv n \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \left| \frac{1}{|m|} \left(\frac{r}{R}\right)^{|m|} e^{im\theta} \right| \\ &\leq \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv n \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{r}{R}\right)^{|m|} |e^{im\theta}| = \varphi_n^{(N)}(|z|). \end{aligned}$$

したがって、

$$(A.11) \quad \begin{aligned} g_{n,\rho}^{(N)} &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(|e^{in\theta}| + \left| \frac{-\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| \right) \\ &\leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(|e^{in\theta}| + \frac{|\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})|}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right) \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |e^{in\theta}| + | -1 | \leq 2. \end{aligned}$$

$n \in N\mathbb{Z}$ のとき、

$$\begin{aligned} \sup_{|z| \leq \rho} |\varphi_n^{(N)}(z)| &= \sup_{|z| \leq \rho} \left| -\frac{1}{2\pi} \log |z^N - R^N| \right| = \sup_{|z| \leq \rho} \frac{1}{2\pi} |\log |z^N - R^N|| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max\{\log |R^N - \rho^N|, \log |R^N + \rho^N|\}. \end{aligned}$$

したがって、

(A.12)

$$g_{n,\rho}^{(N)} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(|e^{in\theta}| + \left| \frac{-\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| \right) \leq 1 + \max \left\{ 1, \frac{\log |R^N + \rho^N|}{\log |R^N - \rho^N|} \right\}.$$

(A.11), (A.12) より (2.20) は示された。

□

(2.21) の証明.

$$(A.13) \quad g_{0,\rho}^{(N)} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| 1 - \frac{\varphi_0^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_0^{(N)}(\rho)} \right| = \frac{\sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \varphi_0^{(N)}(\rho) - \varphi_0^{(N)}(\rho e^{i\theta}) \right|}{\left| \varphi_0^{(N)}(\rho) \right|}.$$

$0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ のとき、

$$0 \leq -\log(1 - \varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m} \leq 2\varepsilon$$

となることに注意する。

(A.13) の分母を評価する。

$$\begin{aligned} |\varphi_0^{(N)}(\rho)| &= \left| -\frac{1}{2\pi} \log |\rho^N - R^N| \right| = \left| -\frac{1}{2\pi} \{N \log R + \log |1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^N| \} \right| \\ &= \left| -\frac{1}{2\pi} \{N \log R + \operatorname{Re} \log \left(1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^N\right)\} \right| = \left| -\frac{1}{2\pi} \{N \log R + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{mN}\} \right| \\ &\geq \left| N \log R - 2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \right| \end{aligned}$$

$$(A.14) \quad \varphi_0^{(N)}(\rho) \geq \frac{N \log R}{2}.$$

(A.13) の分子を評価する。

$$\begin{aligned}
& \left| \varphi_0^{(N)}(\rho) - \varphi_0^{(N)}(\rho e^{i\theta}) \right| = -\frac{1}{2\pi} \left| \log |\rho^N - R^N| - \log |(\rho e^{i\theta})^N - R^N| \right| \\
& = -\frac{1}{2\pi} \left| \log \left| 1 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \right| - \log \left| 1 - \left(\frac{\rho e^{i\theta}}{R} \right)^N \right| \right| \\
& = -\frac{1}{2\pi} \left| \operatorname{Re} \log \left(1 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \right) - \operatorname{Re} \log \left(1 - \left(\frac{\rho e^{i\theta}}{R} \right)^N \right) \right| \\
(A.15) \quad & \leq \left| \operatorname{Re} \log \left(1 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \right) \right| + \left| \operatorname{Re} \log \left(1 - \left(\frac{\rho e^{i\theta}}{R} \right)^N \right) \right| \\
& = \left| -\operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{mN} \right| + \left| -\operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho e^{i\theta}}{R} \right)^{mN} \right| \\
& \leq 2 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N + 2 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \\
& \leq 4 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N.
\end{aligned}$$

(A.14),(A.15) より (2.21) は示された。

□

(2.22) の証明.

$$(A.16) \quad g_{n,\rho}^{(N)} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| = \frac{\sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})|}{|\varphi_n^{(N)}(\rho)|}.$$

(A.16) の分母を評価する。

$$(A.17) \quad \varphi_n^{(N)}(\rho) = \frac{N}{4\pi} \sum_{m \equiv n} \frac{1}{|m|} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{|m|} e^{im\theta} \geq \frac{N}{4n\pi} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \quad \left(1 \leq n \leq \frac{N}{2} \right).$$

(A.16) の分子を評価する。

$$|e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})| = \left| \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv n \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{|m|} (e^{in\theta} - e^{im\theta}) \right|,$$

$|m| \equiv n$ のとき、すなわち $|m| = lN \pm n$ ($l \in \mathbb{N}$) とする。

$$\begin{aligned}
& |e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})| \\
& = \frac{N}{4\pi} \left| \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{lN+n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{lN+n} (e^{in\theta} - e^{i(lN+n)\theta}) + \frac{1}{lN-n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{lN-n} (e^{in\theta} - e^{i(lN-n)\theta}) \right\} \right| \\
& \leq \frac{N}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{1}{lN+n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{lN+n} (e^{in\theta} - e^{i(lN+n)\theta}) + \frac{1}{lN-n} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{lN-n} (e^{in\theta} - e^{i(lN-n)\theta}) \right|,
\end{aligned}$$

$|e^{in\theta} - e^{i(lN+n)\theta}| \leq 2, |e^{in\theta} - e^{i(lN-n)\theta}| \leq 2$ より、

$$\begin{aligned} & |e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})| \\ & \leq \frac{N}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{lN+n} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{lN+n} + \frac{1}{lN-n} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{lN-n} \right\} \\ & = \frac{N}{2\pi(N-n)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-n} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{N-n}{lN+n} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{(l-1)N+2n} + \frac{N-n}{lN-n} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{(l-1)N} \right\}, \end{aligned}$$

$\frac{N-n}{lN+n} < 1, \frac{N-n}{lN-n} < 1$ より、

$$\begin{aligned} (A.18) \quad |e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})| & \leq \frac{N}{2\pi(N-n)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-n} \left\{ 1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n} \right\} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{(l-1)N} \\ & = \frac{N}{2\pi(N-n)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-n} \frac{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^N} \\ & \leq \frac{2N}{\pi(N-n)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-n}. \end{aligned}$$

(A.17), (A.18) より (2.22) は示された。

□

A.7 ソースプログラム

円板領域問題の数値実験のソースプログラムを紹介する。

不変スキームのプログラムは、以下のソースプログラム “ f が調和多項式のときの誤差のグラフ (不変スキーム)” を参考に通常スキームのプログラムを書き直せばよいので省略する。

また、 f が対数ポテンシャルのときの不変スキームによる近似解のグラフと、近似解と厳密解を比較するグラフは、以下のソースプログラム “ f が対数ポテンシャルのときの不変スキームによる近似解のグラフ” と “ f が調和多項式のときの不変スキームによる近似解と厳密解を比較するグラフ” を参考に対数ポテンシャルに書き直せばよいので省略する。このプログラムを通常スキームに直すことも容易である。

• f が調和多項式のときの誤差のグラフ (通常スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 % {(x,y);x^2+y^2<rho^2}
3 % Δ u = 0
4 % u(x,y)=rho^m * cos(m theta) (cos=real)
5 % 通常スキームにより解く。厳密解と近似解の誤差表示。
6 % 桂田論文 Fig 9-1 9-2 グラフ
7
8 format "long" "e"
9

```

```

10 rho=1;
11 R=2;
12
13 mmax=5; % m の最大値
14 Nmax=64; % N ( 分割数 ) の最大値
15
16 maxerror=zeros(Nmax-1,mmax);
17 ns=2:Nmax;
18
19 for N=2:Nmax;
20
21     omega=exp(2*pi*I/N); %  $\omega$  の値
22     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
23
24     x=rho*w; % 拘束点
25     y=R*w; % 電荷点
26
27     Fs=zeros(N,mmax); % F; f を mmax 列並べて行列を作る
28     for m=1:mmax
29         f=real(x.^m);
30         Fs(:,m)=f;
31     end
32
33     G=zeros(N,N);
34     for i=1:N
35         G(i,:)=-log(abs(x(i)-y))'/(2*pi); % G;  $E(x_i, y_j)$  を要素とした  $N \times N$  行列
36     end
37
38     Qs=G\Fs; % Q; N 行 mmax 列の行列
39
40     n=100; % 境界上に n 個の点を取る
41     theta=(2*pi/N)*rand(n,1);
42     Z=rho*exp(I*theta);
43     error=zeros(n,mmax);
44     for m=1:mmax
45         Q=Qs(:,m);
46         for l=1:n
47             U=(Q'*(-log(abs(Z(l)-y))))/(2*pi); % csm による近似解
48
49             xx=Z(l).^m;
50
51             u=real(xx); % 境界上の点の値
52
53             error(l,m)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
54         end
55     end
56     maxerror(N-1,m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
57 end
58 end
59
60 % グラフ表示
61 gset title"Conventional Scheme"
62 gset xlabel"N"
63 gset ylabel"log_10(e^(N))"
64
65 semilogy(ns,maxerror)
66 gset term postscript eps color
67 gset output "fig9-1.eps"

```

• f が調和多項式のときの誤差のグラフ (不変スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 %  $\{(x,y); x^2+y^2 < \rho^2\}$ 
3 %  $\Delta u = 0$ 
4 %  $u(x,y) = \rho^m \cdot \cos(m \theta)$  (cos=real)
5 % 不変スキームにより解く。厳密解と近似解の誤差表示。
6
7 format "long" "e"
8
9 rho=1;
10 R=2;
11
12 mmax=5; % m の最大値
13 Nmax=64; % N (分割数) の最大値
14
15 maxerror=zeros(Nmax-1,mmax);
16 ns=2:Nmax;
17 fo=zeros(1,mmax);
18
19 for N=2:Nmax;
20
21     gp1=[0 ones(1,N)]; % Gtilde の 1 列目の成分
22     gp2=ones(N,1); % Gtilde の 1 行目の成分
23
24     omega=exp(2*pi*I/N); %  $\omega$  の値
25     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
26
27     x=rho*w; % 拘束点
28     y=R*w; % 電荷点
29
30     Fs=zeros(N,mmax); % F; f を mmax 列並べて行列を作る
31     for m=1:mmax
32         f=real(x.^m);
33         Fs(:,m)=f;
34         Fos=[fo ; Fs];
35     end
36
37     G=zeros(N,N);
38     for i=1:N
39         G(i,:) = -log(abs(x(i)-y))'/(2*pi); % G;  $E(x_i, y_j)$  を要素とした N*N 行列
40     end
41     Gtilde=[gp1;[gp2 G]]; % Gtilde を作る。
42
43     Qos=Gtilde\Fos; % Q; N 行 mmax 列の行列
44
45     n=100; % 境界上に n 個の点を取る
46     theta=2*pi*rand(n,1);
47     Z=rho*exp(I*theta);
48     error=zeros(n,mmax);
49
50     Qo2=zeros(N-1,1);
51
52     for m=1:mmax
53         Qo=Qos(:,m);

```

```

54
55     for s=1:N
56         Qo2(s)=Qo(s+1);
57     end
58
59     for l=1:n
60         U=Qo(1)+(Qo2'*(-log(abs(Z(l)-y))))/(2*pi); % 不変スキームによる近似解
61
62         xx=Z(l).^m;
63
64         u=real(xx); % 境界上の点の値
65
66         error(l,m)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
67     end
68
69     maxerror(N-1,m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
70 end
71 end
72
73 % グラフ表示
74 gset title "Invariant Scheme"
75 gset xlabel "N"
76 gset ylabel "log_10(e^(N))"
77
78 semilogy(ns,maxerror)
79 gset term postscript eps color
80 gset output "invariant.eps"
81 replot

```

● f が調和多項式のときの誤差のグラフ (通常双極子スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 % {(x,y);x^2+y^2<rho^2}
3 % Δ u = 0
4 % u(x,y)=rho^m * cos(m theta) (cos=real)
5 % dipole シミュレーション。双極子通常スキーム。
6 % 桂田論文 Fig 9-3 のグラフ。
7
8 format "long" "e"
9
10 rho=1;
11 R=2;
12
13 mmax=5; % m の最大値
14 Nmax=64; % N (分割数) の最大値
15
16 maxerror=zeros(Nmax-1,mmax);
17 ns=2:Nmax;
18
19 for N=2:Nmax;
20
21     omega=exp(2*pi*I/N); % ω の値
22     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル (ω^1 ω^2 ... ω^N-1)'
23
24     x=rho*w; % 拘束点
25     y=R*w; % 電荷点
26     nu=(1/R)*y; % ν_y 単位ベクトル

```

```

27
28 Fs=zeros(N,mmax); % F; f を mmax 列並べて行列を作る
29 for m=1:mmax
30     f=real(x.^m);
31     Fs(:,m)=f;
32 end
33
34 G=zeros(N,N);
35 for i=1:N
36     G(:,i)=(-1/(2*pi))*(real(nu(i).*((y(i)-x)')'.')')./(abs((y(i)-x))).^2);
37     % Dipole G
38 end
39
40 Qs=G\Fs; % Q; N 行 mmax 列の行列
41
42 n=100; % 境界上に n 個の点を取る
43 theta=2*pi*rand(n,1);
44 Z=rho*exp(I*theta);
45 error=zeros(n,mmax);
46 for m=1:mmax
47     Q=Qs(:,m);
48     for l=1:n
49         U=Q'*((-1/(2*pi))*real(nu.*((y-Z(l))')'.')')./(abs(y-Z(l))).^2);
50         % Dipole による近似解
51
52         xx=Z(l).^m;
53
54         u=real(xx); % 境界上の点の値
55
56         error(l,m)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
57     end
58
59     maxerror(N-1,m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
60 end
61 end
62 % グラフ表示
63 gset title"Conventional Dipole Scheme"
64 gset xlabel"N"
65 gset ylabel"log_10(e^(N))"
66
67 semilogy(ns,maxerror)
68 gset term postscript eps color
69 gset output "fig9-3.eps"
70 replot

```

● f が調和多項式のときの不変スキームによる近似解のグラフ

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 %  $\{(x,y); x^2+y^2 < \rho^2\}$ 
3 %  $\Delta u = 0$ 
4 %  $u(x,y) = \rho^m \cdot \cos(m \theta)$  (cos=real)
5 % 不変スキームにより解く。
6 % 厳密解と近似解のグラフ。
7
8 format "long" "e"
9
10 rho=1;

```

```

11 R=2;
12
13 m=2; % m
14 N=10; % N ( 分割数 )
15
16 gp1=[0 ones(1,N)]; % Gtilde の 1 列目の成分
17 gp2=ones(N,1); % Gtilde の 1 行目の成分
18
19 omega=exp(2*pi*I/N); %  $\omega$  の値
20 w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
21
22 x=rho*w; % 拘束点
23 y=R*w; % 電荷点
24
25 f=real(x.^m);
26 fo=[0 ; f];
27
28 G=zeros(N,N);
29 for i=1:N
30     G(i,:)=-log(abs(x(i)-y))'/(2*pi);
31 end
32 Gtilde=[gp1;[gp2 G]]; % Gtilde を作る。
33
34 Qo=Gtilde\fo; % Q; N 行 mmax 列の行列
35
36 for s=1:N
37     Qo2(s)=Qo(s+1);
38 end
39
40 rhod=0:0.05:rho;
41 [th,r] = meshgrid(2*pi*(0:N)/N,rhod);
42 [X,Y] = pol2cart(th,r);
43
44 Z=X+I*Y;
45 n=length(rhod);
46
47 Us=zeros(n,N+1);
48 for i=1:n
49     for j=1:N+1
50         U=Qo(1)+(Qo2*(-log(abs(Z(i,j)-y)))/(2*pi)); % 不変スキームによる近似解
51         Us(i,j)=U;
52     end
53 end
54
55 %u=(r.^m).*(cos(m*th)); %厳密解をグラフにする。
56 [th2,r2] = meshgrid(2*pi*(0:100)/100,rhod);
57 [X2,Y2] = pol2cart(th2,r2);
58 ZZ=X2+I*Y2;
59 u=real(ZZ.^m);
60
61 % グラフ表示 (mesh のグラフ)
62 grid "on"
63
64 gset xlabel"Real"
65 gset ylabel"Imaginary"
66 gset zlabel"U"
67
68 mesh(X,Y,Us)

```

```

69 %mesh(X2,Y2,u)
70
71 gset term postscript eps color
72 gset output "invmesh.eps"
73 replot

```

● f が調和多項式のときの不変スキームによる近似解と厳密解を比較するグラフ

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 %  $\{(x,y); x^2+y^2 < \rho^2\}$ 
3 %  $\Delta u = 0$ 
4 %  $u(x,y) = \rho^m * \cos(m \theta)$  (cos=real)
5 % 不変スキームにより解く。
6 % 厳密解と近似解を比較するグラフ。
7
8 format "long" "e"
9
10 R=2;
11
12 m=2; % m
13 N=10; % N (分割数)
14 n=100; % 選点の間の点の数
15
16 omega=exp(2*pi*i/N); %  $\omega$  の値
17 w=exp(2*pi*i*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
18 y=R*w; % 電荷点
19 fo=0;
20 gp1=[0 ones(1,N)]; % Gtilde の 1 列目の成分
21 gp2=ones(N,1); % Gtilde の 1 行目の成分
22
23 rho=0:0.05:1.0;
24 randN=0:1/n:N;
25 rhod=length(rho);
26 randNd=length(randN);
27 [th,r] = meshgrid(2*pi*(randN)/N,rho);
28 [X,Y] = pol2cart(th,r);
29
30 Z=X+i*Y;
31
32 for k=1:rhod
33     x=rho(k)*w; % 拘束点
34
35     f=real(x.^m);
36     Fos=[fo ; f];
37
38     G=zeros(N,N);
39     for i=1:N
40         G(i,:) = -log(abs(x(i)-y))'/(2*pi);
41     end
42     Gtilde=[gp1;[gp2 G]]; % Gtilde を作る。
43
44     Qo=Gtilde\Fos; % Q; N 行 mmax 列の行列
45
46     for s=1:N
47         Qo2(s)=Qo(s+1);
48     end
49

```

```

50     Us=zeros(rhod,randNd);
51     for i=1:rhod
52         for j=1:randNd
53             U=Qo(1)+(Qo2'*(-log(abs(Z(i,j)-y))))/(2*pi); % 不変スキームによる近似解
54             Us(i,j)=U;
55         end
56     end
57 end
58
59 %u=(r.^m).*(cos(m*th));
60 u=real(Z.^m); %厳密解
61
62 UU=abs(Us-u);
63
64 % グラフ表示 (mesh のグラフ)
65 grid "on"
66
67 gset xlabel"Real"
68 gset ylabel"Imaginary"
69 gset zlabel"error"
70
71 mesh(X,Y,UU)
72
73 gset term postscript eps color
74 gset output "invgosamesh.eps"
75 replot

```

● f が対数ポテンシャルのときの誤差のグラフ (通常スキーム)

```

1  % ラプラス方程式の内部領域問題
2  %  $\{(x,y); x^2+y^2 < \rho^2\}$ 
3  %  $\Delta u = 0$ 
4  %  $u(x,y) = 1_p(x) = \log|x-p|$ 
5  % 通常スキームにより解く。p (p=1.2,1.4,...,2.6) と変化。
6  % 桂田論文 Fig 9-4 のグラフ。
7
8  format "long" "e"
9
10 rho=1;
11 R=2;
12
13 Nmax=64; % N ( 分割数 ) の最大値
14
15 p=[1.2:0.2:2.6]';
16 mmax=length(p);
17
18 maxerror=zeros(Nmax-1,mmax); %
19 ns=2:Nmax;
20
21 for N=2:Nmax;
22
23     omega=exp(2*pi*I/N); %  $\omega$  の値
24     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
25
26     x=rho*w; % 拘束点
27     y=R*w; % 電荷点
28

```

```

29 Fs=zeros(N,mmax); % F: f を mmax 列並べて行列を作る
30 for m=1:mmax
31     f=log(abs(x-p(m)));
32     Fs(:,m)=f;
33 end
34
35 G=zeros(N,N);
36 for i=1:N
37     G(i,:)=-log(abs(x(i)-y))'/(2*pi);
38 end
39
40 Qs=G\Fs; % Q: N 行 mmax 列の行列
41
42 n=100; % 境界上に n 個の点を取り比較
43 theta=2*pi*rand(n,1);
44 Z=rho*exp(I*theta);
45 error=zeros(n,mmax);
46 for m=1:mmax
47     Q=Qs(:,m);
48     for l=1:n
49         U=(Q'*(-log(abs(Z(l)-y))))/(2*pi); % csm による近似
50
51         u=log(abs(Z(l)-p(m))); % 境界上の点の値
52
53         error(l,m)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
54     end
55
56     maxerror(N-1,m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
57 end
58 end
59
60 % グラフ表示
61 gset title"Conventional Scheme"
62 gset xlabel"N"
63 gset ylabel"log_10(e^(N))"
64
65 semilogy(ns,maxerror)
66 gset term postscript eps color
67 gset output "fig9-4.eps"
68 replot

```

● f が対数ポテンシャルのときの傾きのグラフ (通常スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 % {(x,y);x^2+y^2<rho^2}
3 % Δ u = 0
4 % u(x,y) = l_p(x)=log|x-p|
5 % 通常スキームにより解く。 p(p=1.2,1.4,...,7.0) と変化。 gradient の計算。
6 % 桂田論文 Fig 9-5 のグラフ。
7
8 format "long" "e"
9
10 rho=1;
11 R=2;
12
13 p=[1.2:0.2:7.0]';
14 mmax=length(p);

```

```

15
16 maxerror1=zeros(1,mmax);
17 maxerror2=zeros(1,mmax);
18
19 Ns=[4;50]; %N=4 と N=50 で比較して傾きを計算する。
20
21 for j=1:2
22
23     N=Ns(j);
24
25     omega=exp(2*pi*I/N);      %  $\omega$  の値
26     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
27
28     x=rho*w; % 拘束点
29     y=R*w;   % 電荷点
30
31     Fs=zeros(N,mmax); % F: f を mmax 列並べて行列を作る
32     for m=1:mmax
33         f=log(abs(x-p(m)));
34         Fs(:,m)=f;
35     end
36
37     G=zeros(N,N);
38     for i=1:N
39         G(i,:)=-log(abs(x(i)-y))'/(2*pi);
40     end
41
42     Qs=G\Fs; % Q: N 行 mmax 列の行列
43
44     n=100; % 境界上に n 個の点を取る
45     theta=2*pi*rand(n,1);
46     Z=rho*exp(I*theta);
47     error=zeros(n,mmax);
48     for m=1:mmax
49         Q=Qs(:,m);
50         for l=1:n
51             U=(Q'*(-log(abs(Z(l)-y))))/(2*pi); % csm による近似
52
53             u=log(abs(Z(l)-p(m))); % 境界上の点の値
54
55             error(l,m)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
56         end
57
58         if j==1
59             maxerror1(m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
60         else
61             maxerror2(m)=max(error(:,m));
62         end
63     end
64 end
65
66 tau=zeros(mmax,1);
67 for m=1:mmax
68     g=(log10(maxerror2(m))-log10(maxerror1(m)))/(Ns(2)-Ns(1)); %傾きの計算
69     tau(m)=10^g;
70 end
71
72 pp=[0.0:0.05:7.0]';

```

```

73 mp=length(pp);
74
75 for k=1:mp
76     taua(k)=sqrt(rho/pp(k));
77     taub(k)=rho/R;
78 end
79
80 % グラフ表示
81 grid "on"
82 gset title"Conventional Scheme Gradient"
83 gset xlabel"p"
84 gset ylabel"tau"
85
86 axis([0.0 7.0 0.0 1.1])
87
88 plot(p,tau,"@",pp,taua,";sqrt(rho/pp(k));3",pp,taub,";rho/R;3")
89 gset term postscript eps color
90 gset output "fig9-5.eps"
91 replot

```

● f が対数ポテンシャルのときの傾きのグラフ (通常双極子スキーム)

```

1  % ラプラス方程式の内部領域問題
2  %  $\{(x,y); x^2+y^2 < \rho^2\}$ 
3  %  $\Delta u = 0$ 
4  %  $u(x,y) = l_p(x) = \log|x-p|$ 
5  % 通常スキームにより解く。 p(p=1.2,1.4,...,7.0) と変化。 gradient の計算。
6  % 桂田論文 Fig 9-6 のグラフ。
7
8  format "long" "e"
9
10 rho=1;
11 R=2;
12
13 p=[1.2:0.2:7.0]';
14 mmax=length(p);
15
16 maxerror1=zeros(1,mmax);
17 maxerror2=zeros(1,mmax);
18
19 Ns=[4;50]; %N=4 と N=50 で比較して傾きを計算する。
20
21 for j=1:2
22
23     N=Ns(j);
24
25     omega=exp(2*pi*I/N); %  $\omega$  の値
26     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
27
28     x=rho*w; % 拘束点
29     y=R*w; % 電荷点
30     nu=(1/R)*y; %  $v_y$  単位ベクトル
31
32     Fs=zeros(N,mmax); % F: f を mmax 列並べて行列を作る
33     for m=1:mmax
34         f=log(abs(x-p(m)));
35         Fs(:,m)=f;

```

```

36     end
37
38     G=zeros(N,N);
39     for i=1:N
40         G(:,i)=(-1/(2*pi))*(real(nu(i).*((y(i)-x)')'.'))/(abs((y(i)-x))).^2);
41         % Dipole G
42     end
43
44     Qs=G\Fs; % Q; N 行 mmax 列の行列
45
46     n=100; % 境界上に n 個の点を取る
47     theta=2*pi*rand(n,1);
48     Z=rho*exp(I*theta);
49     error=zeros(n,mmax);
50     for m=1:mmax
51         Q=Qs(:,m);
52         for l=1:n
53             U=Q'*((-1/(2*pi))*real(nu.*((y-Z(l))')'.'))/(abs(y-Z(l))).^2);
54             % Dipole による近似解
55
56             u=log(abs(Z(l)-p(m))); % 境界上の点の値
57
58             error(l,m)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
59         end
60
61         if j==1
62             maxerror1(m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
63         else
64             maxerror2(m)=max(error(:,m));
65         end
66     end
67 end
68 end
69
70 tau=zeros(mmax,1);
71 for m=1:mmax
72     g=(log10(maxerror2(m))-log10(maxerror1(m)))/(Ns(2)-Ns(1)); %傾きの計算
73     tau(m)=10^g;
74 end
75
76 pp=[0.0:0.05:7.0]';
77 mp=length(pp);
78
79 for k=1:mp
80     taua(k)=sqrt(rho/pp(k));
81     taub(k)=rho/R;
82 end
83
84 % グラフ表示
85 grid "on"
86 gset title"Conventional Diple Scheme Gradient"
87 gset xlabel"p"
88 gset ylabel"tau"
89
90 axis([0.0 7.0 0.0 1.1])
91
92 plot(p,tau,"@",pp,taua,";sqrt(rho/pp(k));3",pp,taub,";rho/R;3")
93 gset term postscript eps color

```

```

94 gset output "fig9-6.eps"
95 replot

```

● 領域 Ω の収束を見るための誤差のグラフ (通常スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 %  $\{(x,y); x^2+y^2 < r_0^2\}$ 
3 %  $\Delta u = 0$ 
4 %  $u(x,y) = f = \rho \cdot \cos(\theta)$ 
5 % 通常スキームにより解く。
6 %  $r_0$  ( $r_0=0.2, 0.4, \dots, 1.8$ ) と変化。
7 % 桂田論文 Fig9-9 のグラフ。
8
9 format "long" "e"
10
11 rho=[0.2:0.2:1.8]';
12 rhomax=length(rho);
13
14 R=2;
15
16 Nmax=60; % N (分割数) の最大値
17 maxerror=zeros(rhomax, Nmax/2);
18
19 for N=2:2:Nmax
20     for k=1:rhomax
21
22         omega=exp(2*pi*I/N); %  $\omega$  の値
23         w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
24
25         x=rho(k)*w; % 拘束点
26         y=R*w; % 電荷点
27         f=real(x.^1);
28
29         G=zeros(N,N);
30         for i=1:N
31             G(i,:) = -log(abs(x(i)-y))'/(2*pi);
32         end
33
34         Q=G\f; % Q: N 行 mmax 列の行列
35
36         n=100; % 境界上に n 個の点を取る
37         theta=2*pi*rand(n,1);
38         Z=rho(k)*exp(I*theta);
39         error=zeros(n, Nmax/2);
40         for l=1:n
41             U=(Q'*(-log(abs(Z(l)-y))))/(2*pi); % csm による近似解
42
43             xx=Z(l).^1;
44
45             u=real(xx); % 境界上の点の値
46
47             error(l, N/2) = abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
48         end
49
50         maxerror(k, N/2) = max(error(:, N/2)); % error の最大値を取り記憶
51     end
52 end

```

```

53 % グラフ表示
54 gset title"Conventional Scheme"
55 gset xlabel"r"
56 gset ylabel"log_10(e^(N))"
57
58 semilogy(rho,maxerror)
59 gset term postscript eps color
60 gset output "fig9-9.eps"
61 replot

```

• $N = 64$, $\kappa = \frac{1}{2}$ として拘束点の配置を変えたときの誤差のグラフ (通常スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 % {(x,y);x^2+y^2<rho^2}
3 %  $\Delta u = 0$ 
4 %  $u(x,y)=\rho^m * \cos(m \theta)$  (cos=real)
5 % 通常スキームにより解く。
6 % 拘束点を  $\kappa = 1/2$  ずらす。 N は奇数だけでなくすべてとる。
7
8 format "long" "e"
9
10 rho=1;
11 R=2;
12
13 mmax=5; % m の最大値
14 Nmax=64; % N ( 分割数 ) の最大値
15
16 maxerror=zeros(Nmax-1,mmax);
17 ns=2:Nmax;
18
19 for N=2:Nmax;
20
21     omega=exp(2*pi*I/N); %  $\omega$  の値
22     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \omega^2 \dots \omega^{N-1}$ )'
23
24     kappa=0.5;
25     diff=exp(2*pi*I*kappa/N);
26     x=rho*w*diff; % 拘束点
27     y=R*w; % 電荷点
28
29     Fs=zeros(N,mmax); % F; f を mmax 列並べて行列を作る
30     for m=1:mmax
31         f=real(x.^m);
32         Fs(:,m)=f;
33     end
34
35     G=zeros(N,N);
36     for i=1:N
37         G(i,:)=-log(abs(x(i)-y))'/(2*pi);
38     end
39
40     Qs=G\Fs; % Q; N 行 mmax 列の行列
41
42     %
43     %上の [\] を使って計算させてしまうと
44     %Octave は誤差を修正してしまうようだ。
45     %下のように qr 分解を使って計算すると、偶数、奇数の場合わけがあらわれる。

```

```

46 %
47 %Qs=zeros(N,mmax);
48 %w=zeros(N,1);
49 %[q r] = qr(G);
50 %for m=1:mmax
51 % v=q'*Fs(:,m);
52 %
53 % w(N)=v(N)/r(N,N);
54 % for k=N-1:-1:1
55 % w(k)=(v(k)-r(k,k+1:N)*w(k+1:N))/r(k,k);
56 % end
57 % Qs(:,m)=w;
58 %end
59 %
60
61 n=100; % 境界上に n 個の点を取る
62 theta=2*pi*rand(n,1);
63 Z=rho*exp(I*theta);
64 error=zeros(n,mmax);
65 for m=1:mmax
66 Q=Qs(:,m);
67 for l=1:n
68 U=(Q'*(-log(abs(Z(l)-y))))/(2*pi); % csm による近似解
69
70 xx=Z(l).^m;
71
72 u=real(xx); % 境界上の点の値
73
74 error(l,m)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
75 end
76
77 maxerror(N-1,m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
78 end
79 end
80
81 % グラフ表示
82 gset title"Conventional Scheme"
83 gset xlabel"N"
84 gset ylabel"log_10(e^(N))"
85
86 semilogy(ns,maxerror)
87 gset term postscript eps color
88 gset output "fig9-7all.eps"
89 replot

```

• N 奇数, $\kappa = \frac{1}{2}$ として拘束点の配置を変えたときの誤差のグラフ (通常スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 % {(x,y);x^2+y^2<rho^2}
3 % Δ u = 0
4 % u(x,y)=rho^m * cos(m theta) (cos=real)
5 % 通常スキームにより解く。
6 % 拘束点を kappa = 1/2 ずらす。 N は奇数とする。
7 % 桂田論文 Fig 9-7 グラフ
8
9 format "long" "e"
10

```

```

11 rho=1;
12 R=2;
13
14 mmax=5; % m の最大値
15 Nmax=64; % N ( 分割数 ) の最大値
16
17 maxerror=zeros(Nmax/2-1,mmax);
18 ns=3:2:Nmax;
19
20 for N=3:2:Nmax;
21
22     omega=exp(2*pi*I/N); %  $\omega$  の値
23     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
24
25     kappa=1/2;
26     diff=exp(2*pi*I*kappa/N);
27     x=rho*w*diff; % 拘束点
28     y=R*w; % 電荷点
29
30     Fs=zeros(N,mmax); % F; f を mmax 列並べて行列を作る
31     for m=1:mmax
32         f=real(x.^m);
33         Fs(:,m)=f;
34     end
35
36     G=zeros(N,N);
37     for i=1:N
38         G(i,:)=-log(abs(x(i)-y))'/(2*pi);
39     end
40
41
42     Qs=G\Fs; %Q; N 行 mmax 列の行列
43
44     %上の [\] を使って計算させてしまうと
45     %Octave は誤差を修正してしまう。
46     %qr 分解を使って Q を求める方法を記す。
47     %
48     %
49     %Qs=zeros(N,mmax);
50     %w=zeros(N,1);
51     %[q r] = qr(G);
52     %for m=1:mmax
53     % v=q'*Fs(:,m);
54     %
55     % w(N)=v(N)/r(N,N);
56     % for k=N-1:-1:1
57     % w(k)=(v(k)-r(k,k+1:N)*w(k+1:N))/r(k,k);
58     % end
59     % Qs(:,m)=w;
60 %end
61 %
62
63 n=100; % 境界上に n 個の点を取る
64 theta=2*pi*rand(n,1);
65 Z=rho*exp(I*theta);
66 error=zeros(n,mmax);
67 for m=1:mmax
68     Q=Qs(:,m);

```

```

69     for l=1:n
70         U=(Q'*(-log(abs(Z(l)-y)))/(2*pi)); % csm による近似解
71
72         xx=Z(l).^m;
73
74         u=real(xx); % 境界上の点の値
75
76         error(l,m)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
77     end
78
79     maxerror((N-1)/2,m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
80 end
81 end
82
83 % グラフ表示
84 gset title"Conventional Scheme"
85 gset xlabel"N"
86 gset ylabel"log_10(e^(N))"
87
88 semilogy(ns,maxerror)
89 gset term postscript eps color
90 gset output "fig9-7.eps"
91 replot

```

- $\kappa = \frac{1}{2} - 10^{-m}$ として拘束点の配置を変えたのときの誤差のグラフ (通常スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の内部領域問題
2 % {(x,y);x^2+y^2<rho^2}
3 % Δ u = 0
4 % u(x,y)=f=rho*cos(theta)
5 % 通常スキームにより解く。
6 % 拘束点を kappa=1/2-10^(-m) ずらす。 m の値を (m=2,4,...,14) と変化。
7 % N は偶数とする。
8 % 桂田論文 Fig9-8 のグラフ。
9
10 format "long" "e"
11
12 rho=1;
13 R=2;
14
15 Nmax=64; % N ( 分割数 ) の最大値
16
17 m=[2:2:14]';
18 mmax=length(m);
19
20 maxerror=zeros(Nmax/2,mmax);
21 ns=2:2:Nmax;
22
23 for N=2:2:Nmax
24
25     omega=exp(2*pi*I/N); % ω の値
26     w=exp(2*pi*I*(0:N-1)/N)'; % ベクトル (ω^1 ω^2 ... ω^N-1)'
27
28     y=R*w; %電荷点
29
30     for j=1:mmax
31         kappa=1/2-10^(-m(j));

```

```

32     diff=exp(2*pi*I*kappa/N);
33     x=rho*w*diff; %拘束点
34
35     f=real(x.^1);
36
37     G=zeros(N,N);
38     for i=1:N
39         G(i,:)=-log(abs(x(i)-y))'/(2*pi);
40     end
41
42     Q=G\f; % Q; N 行 mmax 列の行列
43
44     n=100; % 境界上に n 個の点を取る
45     theta=2*pi*rand(n,1);
46     Z=rho*exp(I*theta);
47     error=zeros(n,mmax);
48
49     for l=1:n
50         U=(Q'*(-log(abs(Z(l)-y))))/(2*pi); % csm による近似解
51
52         xx=Z(l).^1;
53
54         u=real(xx); % 境界上の点の値
55
56         error(l,j)=abs(u-U); % 境界上で厳密解と近似解を比較
57     end
58
59     maxerror(N/2,j)=max(error(:,j)); % error の最大値を取り記憶
60 end
61 end
62
63 % グラフ表示
64 gset title"Conventional Scheme"
65 gset xlabel"N"
66 gset ylabel"log_10(e^(N))"
67
68 semilogy(ns,maxerror)
69 gset term postscript eps color
70 gset output "fig9-8.eps"
71 replot

```

• Laplace 方程式 の Neumann 問題の誤差のグラフ (通常スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の 外部領域 Neumann 問題
2 % {(x,y);x^2+y^2>rho^2}
3 % Δ u = 0
4 % u(x,y)=(1/rho)^m+1 * cos(m theta) (cos=real)
5 % 通常スキームにより解く。厳密解と近似解の誤差表示。
6
7 format "long" "e"
8
9 rho=1;
10 R=2;
11
12 mmax=5; % m の最大値
13 Nmax=64; % N ( 分割数 ) の最大値
14

```

```

15 maxerror=zeros(Nmax-1,mmax);
16 ns=2:Nmax;
17
18 for N=2:Nmax
19
20     omega=exp(2*pi*I/N);      %  $\omega$  の値
21     theta=(2*pi*(0:N-1)/N)';
22     w=exp(theta*I);          % ベクトル ( $\omega^1 \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1}$ )'
23
24     x=rho*w;                % 拘束点
25     y=R*w;                  % 電荷点
26     nu=(1/rho)*x;          %  $\nu_x$ 
27
28     Fs=zeros(N,mmax); % F; f を mmax 列並べて行列を作る
29     for m=1:mmax
30         f=rho^(m-1)*cos(m*theta);
31         Fs(:,m)=f;
32     end
33
34     G=zeros(N,N);
35     for i=1:N
36         G(:,i)=(-1/(2*pi))*(real(((x-y(i)).*((nu)').'))./((abs(x-y(i)).^2)));
37         % G; d/d  $\nu_x$  ( E(x_i,y_j) ) を要素とした N*N 行列
38     end
39
40     Qs=G\Fs;
41
42     n=100;
43     Ztheta=(2*pi*rand(n,1));
44     Z=rho*exp(Ztheta*I);
45     error=zeros(n,mmax);
46     for m=1:mmax
47         Q=Qs(:,m);
48         for l=1:n
49             U=(Q'*(-log(abs(Z(l)-y)))/(2*pi); %通常スキームによる近似解。
50             U0=(Q'*(-log(abs(-y)))/(2*pi);    % x=0 の時の値。誤差を比べるため。
51
52             u=(rho/m)*rho^(m-1)*cos(m*Ztheta(l)); %厳密解 r=rho のとき。
53
54             error(l,m)=abs(u-(U-U0));
55         end
56     end
57     maxerror(N-1,m)=max(error(:,m));
58 end
59 end
60
61 % グラフ表示
62 gset title"Conventional Scheme"
63 gset xlabel"N"
64 gset ylabel"log_10(e^(N))"
65
66 semilogy(ns,maxerror)
67 gset term postscript eps color
68 gset output "neumann.eps"
69 replot

```

付録B 円の外部領域問題で用いた定理の紹介, 補題の証明とソースプログラム

B.1 円の外部領域に関する最大値原理

準備として以下の定義と定理を用意する。

定義 B.1.1 (鏡像変換). $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = R\}$ とする。 \mathbb{R}^n の点 x, x^* が条件

$$(B.1) \quad \begin{cases} x \text{ と } x^* \text{ はベクトルとして同じ方向を持つ。} \\ \|x\| \cdot \|x^*\| = R^2 \end{cases}$$

を満たすとき、 x と x^* は S に関して互いに鏡像になっているという。点 x にその鏡像 x^* を対応させる変換を S に関する鏡像変換といい、 x の鏡像変換を Φx と書く。

注意 B.1.1. 写像 Φ は、 $\Phi = \Phi^{-1}$, $\Phi^2 = id$ (恒等写像) という性質をもっている。

注意 B.1.2. 鏡像変換によって、 S の内部の点は S の外部の点にうつるが、 S 上の点は変わらない。

定義 B.1.2 (n 次元の Kelvin 変換). \mathbb{R}^n の領域 Ω で定義された関数 u に対して

$$(B.2) \quad v(x) = \left(\frac{R}{\|x\|} \right)^{n-2} u(x^*) \quad (x \in \Omega^* = \Phi\Omega)$$

で定義される関数 v を u の Kelvin 変換という。

注意 B.1.3. ここでは、 x の Kelvin 変換を $\mathcal{K}x$ と書くことにする。写像 \mathcal{K} は、 $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{-1}$, $\mathcal{K}^2 = id$ (恒等写像) という性質をもっている。

定理 B.1.1. u がある領域 Ω で調和ならば $v = \mathcal{K}u$ は Ω の Φ による像 Ω^* において調和である

定理 B.1.1 の証明.

極座標を用いて計算する。

Ω の任意の点 x の極座標を (r, θ, φ) , Ω^* の任意の点 y の極座標を (ρ, θ, φ) で表す。
 u が調和であることにより、

$$\begin{aligned}
 \Delta_x u &= \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} u \\
 (B.3) \quad &= u_{rr} + \frac{u-1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} u \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

ただし、 $\Delta = \Delta_{\theta, \varphi}$ は、Laplace-Beltrami 作用素である。
 一方、

$$(B.4) \quad v(\rho, \theta, \varphi) = \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} \cdot v \left(\frac{R^2}{\rho}, \theta, \varphi \right)$$

である。

ここで、 $\Delta_y v$ を計算する。ただし、 $r = \frac{R^2}{\rho}$ と関係づける。

$$\begin{aligned}
 \Delta_y v &= \frac{1}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{\theta, \varphi} v \\
 &= \frac{1}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} u(r, \theta, \varphi) \right) \right\} + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{\theta, \varphi} \left(\left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} u \right) \\
 &= \frac{1}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{n-1} \left(-(n-2) \frac{R^{n-2}}{\rho^{n-1}} u + \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} u_r \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) \right\} + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{\theta, \varphi} \left(\left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} u \right).
 \end{aligned}$$

$r = \frac{R^2}{\rho}$ より、 $\frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{R^2}{\rho^2}$ となるので、

$$\begin{aligned}
 \Delta_y v &= \frac{1}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{n-1} \left(-(n-2) \frac{R^{n-2}}{\rho^{n-1}} u + \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} u_r \left(-\frac{R^2}{\rho^2} \right) \right) \right\} + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{\theta, \varphi} \left(\left(\frac{R}{\rho} \right)^{n-2} u \right) \\
 &= \frac{1}{\rho^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ -(n-2) R^{n-2} u - \frac{R^n}{\rho} u_r \right\} + \frac{R^{n-2}}{\rho^n} \Delta_{\theta, \varphi} u \\
 &= \frac{1}{\rho^{n-1}} \left\{ -(n-2) R^{n-2} \frac{\partial}{\partial \rho} u - R^n \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{u_r}{\rho} \right\} + \frac{R^{n-2}}{\rho^n} \Delta_{\theta, \varphi} u.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \text{ より、} \\
&= \frac{1}{\rho^{n-1}} \left\{ -(n-2)R^{n-2}u_r \cdot \left(-\frac{R^2}{\rho^2}\right) - R^n \left(-\frac{1}{\rho^2}u_r + \frac{1}{\rho}u_{rr} \cdot \left(-\frac{R^2}{\rho^2}\right)\right) \right\} + \frac{R^{n-2}}{\rho^n} \wedge_{\theta, \varphi} u \\
&= \frac{1}{\rho^{n-1}} \left[\left\{ (n-2)\frac{R^n}{\rho^2} + \frac{R^n}{\rho^2} \right\} u_r + \frac{R^{n+2}}{\rho^3} u_{rr} \right] + \frac{R^{n-2}}{\rho^n} \wedge_{\theta, \varphi} u \\
&= \frac{1}{\rho^{n-1}} \left(\frac{R^{n+2}}{\rho^3} u_{rr} + (n-1)\frac{R^n}{\rho^2} u_r \right) + \frac{R^{n-2}}{\rho^n} \wedge_{\theta, \varphi} u \\
&= \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+2}} \left(u_{rr} + (n-1)\frac{\rho}{R^2} u_r + \left(\frac{\rho}{R^2}\right)^2 \wedge_{\theta, \varphi} u \right).
\end{aligned}$$

$$\frac{\rho}{R} = \frac{1}{r} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned}
\text{(B.5)} \quad \Delta_y v &= \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+2}} \left(u_{rr} + (n-1)\frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2} \wedge_{\theta, \varphi} u \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

定理 B.1.1 は示された。

□

以上より、定義 B.1.1, 定義 B.1.2, 定理 B.1.1 によって \mathbb{R}^2 のとき、次の定理、外部領域に関する最大値原理が成り立つ。

定理 B.1.2 (円の外部領域に関する最大値原理). $\rho > 0$, $\Omega_{rho} = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > \rho\}$, Γ はその境界であるとする。 $u \in C(\overline{\Omega_\rho}) \cap C^2(\Omega_\rho)$, $\Delta u = 0$ in Ω_ρ , u は Ω_ρ で有界ならば

$$\sup_{x \in \overline{\Omega_e}} u(x) = \max_{x \in \Gamma} u(x), \quad \inf_{x \in \overline{\Omega_e}} u(x) = \min_{x \in \Gamma} u(x).$$

B.2 円の外部領域における Laplace 方程式 Dirichlet 問題の厳密解

2次元円の外部領域、

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > \rho\}$$

における Laplace 方程式の Dirichlet 問題、

$$\text{(B.6)} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{(B.7)} \quad u \text{ は有界}$$

を考える。ただし、 Γ は Ω の境界であり、 f は Γ で定義された関数とする。

この問題の厳密解は、複素 Fourier 級数解を用いて、

$$(B.8) \quad u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{|n|} e^{in\theta},$$

$$(B.9) \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

と書ける。

定理 B.2.1 (外部 Dirichlet 問題の解の一意性). Laplace 方程式の外部 Dirichlet 問題の解は一意である。

定理 B.2.2. $f(\theta)$ は $[-\pi, \pi]$ で連続、 $f(-\pi) = f(\pi)$ 、かつ $f'(\theta)$ は $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続とする。そのとき Dirichlet 問題 (B.6), (B.7) の解 $u(re^{i\theta})$ は $f(\theta)$ の Fourier 係数 (B.9) を用いて作った無限級数 (B.8) で与えられる。

B.3 補題 3.2.1 の証明

証明.

$p \equiv q \pmod{N}$ のとき、 $\varphi_p^{(N)} = \varphi_q^{(N)}$ である。

$p \equiv 0 \pmod{N}$ のとき

$$\varphi_p^{(N)} = \sum_{k=0}^{N-1} \Gamma(z, R\omega^k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \log \frac{|z - R\omega^k|}{|z|} = -\frac{1}{2\pi} \log \prod_{k=0}^{N-1} \left|1 - \frac{R}{z} \omega^k\right| = -\frac{1}{2\pi} \log \left|1 - \left(\frac{R}{z}\right)^N\right|.$$

$p \not\equiv 0 \pmod{N}$ のとき

$$\begin{aligned} \Gamma(z, R\omega^k) &= -\frac{1}{2\pi} \log \left|1 - \left(\frac{R}{z}\right) \omega^k\right| = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \log \left(1 - \frac{R\omega^k}{z}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{R\omega^k}{z}\right)^n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{R}{r}\right)^n (e^{in\theta} \omega^{-nk} + e^{-in\theta} \omega^{nk}). \end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{lk} = \begin{cases} N & (l \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を用いて $\varphi_p^{(N)}(z)$ を計算する。

$$\begin{aligned} \varphi_p^{(N)}(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \Gamma(z, R\omega^k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{k=0}^{N-1} \{e^{in\theta} \omega^{(p-n)k} + e^{-in\theta} \omega^{(p+n)k}\} \end{aligned}$$

$p - n \equiv 0$ または $p + n \equiv 0$ のとき、すなわち $n = p \pm mN$ とすると、

$$\begin{aligned} &= \frac{N}{4\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mN - p} \left(\frac{R}{r} \right)^{mN-p} e^{-i(mN-p)\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mN + p} \left(\frac{R}{r} \right)^{mN+p} e^{i(mN+p)\theta} \right\} \\ &= \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{R}{r} \right)^{|m|} e^{im\theta}. \end{aligned}$$

□

B.4 補題 3.2.2 の証明

(3.19) の証明.

$$\varphi_p^{(N)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \Gamma(z, R\omega^k) \quad (z \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{Z})$$

より、

$$(B.10) \quad \varphi_{-n}^{(N)}(z) = \overline{\varphi_n^{(N)}(z)} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

したがって、

$$\begin{aligned} g_{-n,\rho}^{(N)} &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{-in\theta} - \frac{\varphi_{-n}^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_{-n}^{(N)}(\rho)} \right| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{-in\theta} - \frac{\overline{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}}{\overline{\varphi_n^{(N)}(\rho)}} \right| \\ &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| = g_{n,\rho}^{(N)}. \end{aligned}$$

(3.19) は示された。

□

(3.20) の証明.

$n \notin N\mathbb{Z} = \{lN; l \in \mathbb{Z}\}$ のとき、

$$(B.11) \quad \begin{aligned} |\varphi_n^{(N)}(z)| &= \left| \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{R}{r} \right)^{|m|} e^{im\theta} \right| = \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \left| \frac{1}{|m|} \left(\frac{R}{r} \right)^{|m|} e^{im\theta} \right| \\ &\leq \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{R}{r} \right)^{|m|} |e^{im\theta}| = \varphi_n^{(N)}(|z|). \end{aligned}$$

したがって、

$$(B.12) \quad \begin{aligned} g_{n,\rho}^{(N)} &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(|e^{in\theta}| + \left| \frac{-\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| \right) \\ &\leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(|e^{in\theta}| + \frac{\varphi_n^{(N)}(|\rho e^{i\theta}|)}{\varphi_n^{(N)}(|\rho|)} \right) \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |e^{in\theta}| + | -1 | \leq 2. \end{aligned}$$

$n \in N\mathbb{Z}$ のとき、

$$\begin{aligned} \sup_{|z| \leq \rho} |\varphi_n^{(N)}(z)| &= \sup_{|z| \leq \rho} \left| -\frac{1}{2\pi} \log \left| 1 - \left(\frac{R}{z} \right)^N \right| \right| = \sup_{|z| \leq \rho} \frac{1}{2\pi} \left| \log \left| 1 - \left(\frac{R}{z} \right)^N \right| \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max \left\{ \log \left| 1 - \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \right|, \log \left| 1 + \left(\frac{R}{\rho} \right)^N \right| \right\} \leq 1. \end{aligned}$$

したがって、

$$(B.13) \quad g_{n,\rho}^{(N)} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left(|e^{in\theta}| + \left| \frac{-\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| \right) \leq 2.$$

(B.12), (B.13) より (3.20) は示された。

□

(3.21) の証明.

$$(B.14) \quad g_{n,\rho}^{(N)} = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| e^{in\theta} - \frac{\varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \right| = \frac{\sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})|}{|\varphi_n^{(N)}(\rho)|}.$$

(B.14) の分母を評価する。

$$(B.15) \quad \varphi_n^{(N)}(\rho) = \frac{N}{4\pi} \sum_{m \equiv n} \frac{1}{|m|} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{|m|} e^{im\theta} \geq \frac{N}{4n\pi} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n \quad \left(1 \leq n \leq \frac{N}{2} \right).$$

(B.14) の分子を評価する。

$$|e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})| = \left| \frac{N}{4\pi} \sum_{\substack{m \equiv n \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{|m|} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{|m|} (e^{in\theta} - e^{im\theta}) \right|,$$

$|m| \equiv n$ のとき、すなわち $|m| = lN \pm n$ ($l \in \mathbb{N}$) とする。

$$\begin{aligned}
& |e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})| \\
&= \frac{N}{4\pi} \left| \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{lN+n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{lN+n} (e^{in\theta} - e^{i(lN+n)\theta}) + \frac{1}{lN-n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{lN-n} (e^{in\theta} - e^{i(lN-n)\theta}) \right\} \right| \\
&\leq \frac{N}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{1}{lN+n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{lN+n} (e^{in\theta} - e^{i(lN+n)\theta}) + \frac{1}{lN-n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{lN-n} (e^{in\theta} - e^{i(lN-n)\theta}) \right|,
\end{aligned}$$

$|e^{in\theta} - e^{i(lN+n)\theta}| \leq 2$, $|e^{in\theta} - e^{i(lN-n)\theta}| \leq 2$ より、

$$\begin{aligned}
& |e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})| \\
&\leq \frac{N}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{lN+n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{lN+n} + \frac{1}{lN-n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{lN-n} \right\} \\
&= \frac{N}{2\pi(N-n)} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{N-n} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{N-n}{lN+n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{(l-1)N+2n} + \frac{N-n}{lN-n} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{(l-1)N} \right\},
\end{aligned}$$

$\frac{N-n}{lN+n} < 1$, $\frac{N-n}{lN-n} < 1$ より、

(B.16)

$$\begin{aligned}
|e^{in\theta} \varphi_n^{(N)}(\rho) - \varphi_n^{(N)}(\rho e^{i\theta})| &\leq \frac{N}{2\pi(N-n)} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{N-n} \left\{ 1 + \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n} \right\} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{(l-1)N} \\
&= \frac{N}{2\pi(N-n)} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{N-n} \frac{1 + \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{R}{\rho}\right)^N} \leq \frac{2N}{\pi(N-n)} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{N-n}.
\end{aligned}$$

(B.15), (B.16) より (3.21) は示された。

□

B.5 ソースプログラム

円の外部領域問題の数値実験のソースプログラムを紹介する。

円の外部領域問題では、円板領域問題のソースプログラムを外部領域問題に書き直せばよい。参考として“ f が調和多項式のときの誤差のグラフ (通常スキーム)” と “ f が調和多項式のときの誤差のグラフ (不変スキーム)” のソースプログラムを紹介する。

• f が調和多項式のときの誤差のグラフ (不変スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の外部領域問題
2 % {(x,y);x^2+y^2>rho^2}
3 % Δ u = 0

```

```

4 % u(x,y)=(1/rho^m) * cos(m theta)
5 % 通常スキームにより解く。厳密解と近似解の誤差表示。
6
7 format "long" "e"
8
9 rho=2;
10 R=0.8;
11
12 mmax=5; % m の最大値
13 Nmax=64; % N ( 分割数 ) の最大値
14
15 maxerror=zeros(Nmax-1,mmax);
16 ns=2:Nmax;
17
18 for N=2:Nmax;
19
20     omega=exp(2*pi*I/N); % ω の値
21     theta=(2*pi*(0:N-1)/N)';
22     w=exp(theta*I); % ベクトル (ω^1 ω^2 ... ω^N-1)'
23
24     x=rho*w; % 拘束点
25     y=R*w; % 電荷点
26
27     Fs=zeros(N,mmax); % F; f(境界値) を mmax 列並べて行列を作る
28     for m=1:mmax
29         f=(1/rho)^m*cos(m*theta);
30         Fs(:,m)=f;
31     end
32
33     G=zeros(N,N);
34     for i=1:N
35         G(i,:)=-((log(abs(x(i)-y)./abs(x(i)))))/(2*pi));
36         % G; Γ(x_i,y_j) を要素とした N*N 行列
37     end
38
39     Qs=G\Fs; % Q; N 行 mmax 列の行列 連立方程式を解く
40
41     n=100; % 境界上に n 個の点を取る
42     Ztheta=2*pi*rand(n,1);
43     Z=rho*exp(I*Ztheta);
44     error=zeros(n,mmax);
45     for m=1:mmax
46         Q=Qs(:,m);
47         for l=1:n
48             U=Q'*((-log(abs(Z(l)-y)./abs(Z(l)))))/(2*pi)); % csm による近似解
49
50             u=(1/rho)^m*cos(m*Ztheta(l)); % 境界上の厳密解の値
51
52             error(l,m)=abs(u-U); % 厳密解と近似解を比較
53         end
54
55         maxerror(N-1,m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
56     end
57 end
58
59 % グラフ表示
60 gset title"Conventional Scheme"
61 gset xlabel"N"

```

```

62 gset ylabel"log_10(e^(N))"
63
64 semilogy(ns,maxerror)
65 gset term postscript eps color
66 gset output "gaibuconv.eps"
67 replot

```

● f が調和多項式のときの誤差のグラフ (不変スキーム)

```

1 % ラプラス方程式の外部領域問題
2 % {(x,y);x^2+y^2>rho^2}
3 % Δ u = 0
4 % u(x,y)=rho^m * cos(m theta)
5 % 不変スキームにより解く。厳密解と近似解の誤差表示。
6
7 format "long" "e"
8
9 rho=2;
10 R=0.8;
11
12 mmax=5; % m の最大値
13 Nmax=64; % N (分割数) の最大値
14
15 maxerror=zeros(Nmax-1,mmax);
16 ns=2:Nmax;
17 fo=zeros(1,mmax);
18
19 for N=2:Nmax;
20
21     gp1=[0 ones(1,N)];
22     gp2=ones(N,1);
23
24     omega=exp(2*pi*I/N); % ω の値
25     theta=(2*pi*(0:N-1)/N)';
26     w=exp(theta*I); % ベクトル (ω^1 ω^2 … ω^N-1)'
27
28     x=rho*w; % 拘束点
29     y=R*w; % 電荷点
30
31     Fs=zeros(N,mmax); % F; f を mmax 列並べて行列を作る
32     for m=1:mmax
33         f=(1/rho)^m*cos(m*theta);
34         Fs(:,m)=f;
35         Fos=[fo ; Fs];
36     end
37
38     G=zeros(N,N);
39     for i=1:N
40         G(i,:)=-((log(abs(x(i)-y)./abs(x(i)))))/(2*pi));
41         % G; Γ(x_i,y_j) を要素とした N*N 行列
42     end
43     Gtilde=[gp1;[gp2 G]];
44
45     Qos=Gtilde\Fos; % Q; N 行 mmax 列の行列 連立方程式を解く
46
47     n=100; % 境界上に n 個の点を取る
48     Ztheta=2*pi*rand(n,1);

```

```

49     Z=rho*exp(I*Ztheta);
50     error=zeros(n,mmax);
51
52     Qo2=zeros(N-1,1);
53
54     for m=1:mmax
55         Qo=Qos(:,m);
56
57         for s=1:N
58             Qo2(s)=Qo(s+1);
59         end
60
61         for l=1:n
62             U=Qo(1)+(Qo2'*(-log(abs(Z(l)-y)./abs(Z(1)))))/(2*pi);
63             % 不変スキームによる近似解
64
65             u=(1/rho)^m*cos(m*Ztheta(l)); % 境界上の厳密解の値
66
67             error(l,m)=abs(u-U); % 厳密解と近似解を比較
68         end
69
70         maxerror(N-1,m)=max(error(:,m)); % error の最大値を取り記憶
71     end
72 end
73
74 % グラフ表示
75 gset title "Invariant Scheme"
76 gset xlabel "N"
77 gset ylabel "log_10(e^(N))"
78
79 semilogy(ns,maxerror)
80 gset term postscript eps color
81 gset output "gaibuin.v.eps"
82 replot

```

謝辞

この論文を作成するにあたり丁寧な指導と適切な助言をして下さった、桂田祐史助教授に深く感謝致します。

関連図書

- [1] イ・ゲ・ペトロフスキー:偏微分方程式論, 東京図書 (1950).
- [2] 伊理正夫:一般線形代数, 岩波書店 (2003).
- [3] Masashi Katsurada and Hisashi Okamoto, “A mathematical study of charge simulation method I”, 1988, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., Vol. 35, pp.507 – 518.
- [4] Masashi Katsurada, “A mathematical study of charge simulation method II”, 1989, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math., Vol. 36, pp.135 – 162.
- [5] 桂田祐史, 『解析的境界を持つ Jordan 領域における代用電荷法』, 1989, 京都大学数理解析研究所講究録, 703, pp.157 – 171.
- [6] Masashi Katsurada, ”Asymptotic error analysis of the charge simulation method in a Jordan region with an analytic boundary”, 1990, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., Vol. 37, pp.635 – 657.
- [7] 草野尚:偏微分方程式 理工系基礎の数学 4, 朝倉書店 (1980).
- [8] 西田詩: 2次元楕円領域における代用電荷法の数学的及び数値的考察, Vol.5, No.3, September 1995, pp.158–198.
- [9] 藤田宏, 池部晃生, 犬井鉄郎, 高見穎郎:数理物理に現われる偏微分方程式 I,II, 岩波講座 (1977).
- [10] 村島定行:代用電荷法とその応用, 森北出版 (1983).
- [11] 室田一雄: 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について 情報処理学会論文誌 34 (1993), pp.533–535.
- [12] 室田一雄: Comparison of conventional and “invariant” schemes of fundamental solutions method for annular domains, Japan J. Indust. Appl. Math. 12 (1995), no. 1, 61–85.