Javaによる波動方程式のシミュレーショ

4年16組7番　伊藤　秀範

February 21, 2005

初期値境界値問題 (プログラムで扱える

波動方程式

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \quad (t > 0,(x,y) \in \Omega)$$

$$\Omega = \{-2 <$$

初期条件

$$u(x,y,0) = \phi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \quad ((x,y$$

境界条件は次のいずれかとする

(Dirichlet 境界条件) $\quad u(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (t$

(Neumann 境界条件) $\quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0 \quad ($

平面波について

U を滑らかな関数とし、ν を単位ベクトルとするとき、

$$u(x,y,t) = U(\nu \cdot \chi - ct), \quad \chi = (x,y)$$

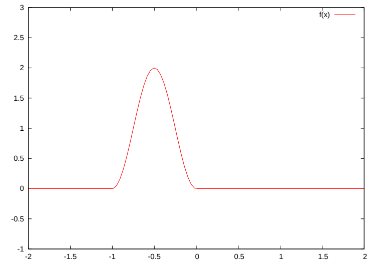
とおくと、u は $\mathbb{R}^2$ 全体で波動方程式をみたす。これは ν の
む波 (**平面波**) を表す。

初期値は

$$\begin{aligned} u(x,y,0) &= U(\nu \cdot \chi) =: \phi(x,y), \\ u_t(x,y,0) &= -cU(\nu \cdot \chi) =: \psi(x,y). \end{aligned}$$

平面波の実験

$$c = 1, \quad U(r) = \begin{cases} \phi(x) = 1/4(\sin \pi(2x - 0.5) + 1) \\ 0 \end{cases}$$



(1) $\nu = (1, 0)$: x 軸方向に進む平面波

(2) $\nu = (0, 1)$: y 軸方向に進む平面波

(3) $\nu = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$: 斜めに動く平面波

注意: 厳密には、平面波は初期値境界値問題の解にはなら
した波の影響が及ばないところでは、平面波と同じになる

定常波について

初期値境界値問題を Fourier の方法で解いた解の公式

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin n\pi x \sin m\pi y (a_{nm} \cos(\sqrt{n^2+m^2}c\pi t)$$

の一つ一つの項も波動方程式と境界条件をみたす。これを
いう。

定常波の数値実験

$\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$ における定常波

$$c = 1, \quad u(x, y, t) = \sin 2\pi x \sin \pi y \cos \sqrt{5}\pi t$$

を数値実験で確認する。

初期値は

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \sin 2\pi x \sin \pi y \\ \psi(x, y) &= 0 \end{aligned}$$